



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Фонарёв, О решении нелинейной задачи типа Неймана, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, номер 8, 77–81

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

16 января 2025 г., 21:51:24



**О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА**

В [1] предлагаются проекционный метод и проекционно-итерационный процесс для отыскания решения некоторой нелинейной задачи Неймана, при этом рассматривается аппроксимация исходного уравнения проекционными уравнениями. Значительно больший практический интерес представляет аппроксимация исходного уравнения при помощи какого-либо разностного (проекционно-разностного) метода.

В данной работе рассматриваются разностный метод (РМ) и разностно-итерационный процесс (РИП) для отыскания решения задачи типа Неймана в операторном виде при условиях, аналогичных условиям в [1], и при выполнении типичного для теории разностных схем предположения о том, что решение исходной задачи существует. В качестве иллюстрирующего примера рассматривается одномерная задача Неймана.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A\varphi = f(\varphi), \tag{1}$$

где  $A$ —линейный оператор из  $\Phi$  в  $F$ , а  $f$ —нелинейный оператор из  $\Phi$  в  $F$ . Здесь  $\Phi$  и  $F$ —гильбертовы пространства вещественнозначных функций с областями определения элементов в некоторой области  $D$ .

Будем считать, что: 1)  $\Phi \subseteq F$ ; 2) ядро оператора  $A$  одномерно и порождается функцией  $\varphi_0 \in \Phi$ ; 3) уравнение  $A\varphi = \psi$  ( $\varphi \in \Phi$ ) имеет решение тогда и только тогда, когда  $\psi$  ортогонально  $\varphi_0$  в  $F$ .

Вышеприведенные условия 1)–3) означают, что уравнение (1) может соответствовать нелинейной задаче Неймана.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение в конечномерном пространстве сеточных функций

$$A^n \varphi^n = f^n(\varphi^n), \tag{2}$$

где  $A^n$ —линейный оператор из  $\Phi_n$  в  $F_n$ , зависящий от шага сетки  $h_n > 0$  ( $h_n \geq h_{n+1}$  для  $n = 1, 2, \dots, h_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ),  $f^n$ —нелинейный оператор из  $\Phi_n$  в  $F_n$ , а  $\Phi_n$  и  $F_n$ —конечномерные евклидовы пространства сеточных функций со скалярными произведениями  $(\cdot, \cdot)_{\Phi_n}$ ,  $(\cdot, \cdot)_{F_n}$  и нормами  $\|\cdot\|_{\Phi_n} = (\cdot, \cdot)_{\Phi_n}^{1/2}$ ,  $\|\cdot\|_{F_n} = (\cdot, \cdot)_{F_n}^{1/2}$  соответственно.

Пусть  $(\cdot)_n$ —линейный оператор, который элементу  $\varphi \in \Phi$  ставит в соответствие элемент  $(\varphi)_n \in \Phi_n$ .

Будем говорить, что уравнение (2) аппроксимирует уравнение (1) с порядком  $\alpha > 0$  на решении  $\varphi$  уравнения (1), если существует такая константа  $K > 0$ , что

$$\|A^n(\varphi)_n - f^n((\varphi)_n)\|_{F_n} \leq Kh_n^\alpha$$

(см. [2], с. 37, [3]).

Предположим, что: 1)  $J_n: \Phi_n \rightarrow \Phi_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) суть такие линейные операторы, что  $\|J_n u\|_{\Phi_{n+1}} \leq \|u\|_{\Phi_n}$  для всех  $u \in \Phi_n$ ; 2) для каждого  $n$  ядро оператора  $A^n$  одномерно и порождается  $\varphi_0^n \in \Phi_n$ , причем  $\varphi_0^n \in F_n$ ,  $J_n \varphi_0^n = \varphi_0^{n+1}$ ,  $\|\varphi_0^n\|_{\Phi_n} = 1$ ,  $\|\varphi_0^n\|_{F_n} \leq 1$ , и уравнение

$$A^n \varphi^n = \psi^n \quad (\varphi^n \in \Phi_n) \tag{3}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда  $\psi^n$  ортогонально  $\varphi_0^n$  в  $F_n$ .

Если уравнение (2) аппроксимирует уравнение (1) с порядком  $\alpha > 0$  на решении  $\varphi$  уравнения (1), то

$$|(f^n((\varphi)_n), \varphi_0^n)_{F_n}| \leq Kh_n^\alpha \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{4}$$

Действительно, взяв в этом случае  $\delta_n = A^n(\varphi)_n - f^n((\varphi)_n)$ , рассмотрим уравнение (3) с  $\psi^n = f^n((\varphi)_n) + \delta_n$ , которое имеет решение  $(\varphi)_n$ . Следовательно,  $(f^n((\varphi)_n), \varphi_0^n)_{F_n} = -(\delta_n, \varphi_0^n)_{F_n}$ , что влечет (4).

Пусть  $\Phi_n^0$  и  $F_n^0$  — подпространства  $\Phi_n$  и  $F_n$ , натянутые на  $\varphi_n^0$ , а  $\Phi_n^1$  и  $F_n^1$  — подпространства  $\Phi_n$  и  $F_n$ , ортогональные подпространствам  $\Phi_n^0$  и  $F_n^0$  (в  $\Phi_n$  и  $F_n$  соответственно). Тогда в силу конечномерности сеточных пространств для каждого  $n$  существует такая постоянная  $\beta_n > 0$ , что из  $\varphi^n \in \Phi_n^1$  следует

$$\beta_n \|A^n \varphi^n\|_{F_n} \geq \|\varphi^n\|_{\Phi_n}. \quad (5)$$

Обозначим через  $B_n^{-1}$  оператор, обратный к оператору  $B_n: \Phi_n^1 \rightarrow F_n^1$ , являющемуся сужением  $A^n$  на  $\Phi_n^1$ .

Далее будем использовать обозначение  $\Phi_n^1 \times \Phi_n^0$  для пространства пар  $(u_1, u_0)$  с  $u_1 \in \Phi_n^1$  и  $u_0 \in \Phi_n^0$  со скалярным произведением  $((u_1, u_0), (v_1, v_0))_n = (u_1, v_1)_{\Phi_n^1} + (u_0, v_0)_{\Phi_n^0}$  и нормой  $\|(u_1, u_0)\|_n = ((u_1, u_0), (u_1, u_0))_n^{1/2}$  для  $(u_1, u_0)$ ,  $(v_1, v_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ . Имеем  $\|(u_1, u_0)\|_n = \|u\|_{\Phi_n}$  для  $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ , где  $u = u_1 + u_0$ . Наоборот, если  $u \in \Phi_n$ , то  $\|u\|_{\Phi_n} = \|(u_1, u_0)\|_n$ , где  $u_0 = (u, \varphi_n^0)_{\Phi_n} \varphi_n^0$  и  $u_1 = u - u_0$ .

Предположим, что  $J_n u_1 \in \Phi_{n+1}^1$  для всех  $u_1 \in \Phi_n^1$ , и определим линейный оператор  $J_n: \Phi_n^1 \times \Phi_n^0 \rightarrow \Phi_{n+1}^1 \times \Phi_{n+1}^0$  правилом  $J_n(u_1, u_0) = (J_n u_1, J_n u_0)$  для  $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ . Имеем  $\|J_n(u_1, u_0)\|_{n+1} \leq \|(u_1, u_0)\|_n$  для всех  $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ .

Для любого  $n$  введем оператор  $Q_n: \Phi_n^1 \times \Phi_n^0 \rightarrow \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$  правилом  $Q_n(u_1, u_0) = (B_n^{-1}(f^n(u) - G_n(u)), u_0 - \theta G_n(u))$  для  $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ ,  $u = u_1 + u_0$ , где  $G_n(u) = (f^n(u), \varphi_n^0)_{F_n} \varphi_n^0$ , а  $\theta$  — положительный параметр. Тогда уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$(u_1, u_0) = Q_n(u_1, u_0) \quad ((u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0), \quad (6)$$

ибо если  $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$  есть решение уравнения (6), то  $u = u_1 + u_0 \in \Phi_n$  есть решение уравнения (2). И, наоборот, если  $u \in \Phi_n$  есть решение уравнения (2), то  $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$  с  $u_0 = (u, \varphi_n^0)_{\Phi_n} \varphi_n^0$  и  $u_1 = u - u_0$  есть решение уравнения (6).

**Теорема 1.** Пусть: 1) уравнение (2) аппроксимирует уравнение (1) с порядком  $\alpha > 0$  на решении  $\varphi$  уравнения (1); 2) для операторов  $B_n$  выполняется условие устойчивости, т. е.  $\beta_n \rightarrow \beta > 0$  при  $n \rightarrow \infty$  (см. (5)), при этом  $\beta_n \geq \beta$  для  $n = 1, 2, \dots$ ; 3) для каждого  $n$  имеем  $\|j^n(u) - j^n(v)\|_{F_n} \leq L\|u - v\|_{\Phi_n}$  для всех  $u, v \in \Phi_n$  с константой  $L > 0$ , не зависящей от  $n$ ; 4) существует такая постоянная  $\gamma > 0$ , что для каждого  $n$  из  $u = u_1 + u_0$ ,  $v = v_1 + v_0 \in \Phi_n$ ,  $u_1, v_1 \in \Phi_n^1$ ,  $u_0, v_0 \in \Phi_n^0$  следует  $(f^n(u) - f^n(v), \varphi_n^0)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_n^0)_{\Phi_n} \geq \gamma^{-1} (u_0 - v_0, \varphi_n^0)_{\Phi_n}^2$ ; 5)  $S = \beta L(1 + \beta L) < 1$ ; 6) либо  $M' = L\gamma(1 + \beta L) < 2$  и  $\theta \in (c, \beta]$ , где  $c = \gamma S/2$ , либо  $\gamma \leq 2\beta$  и  $\theta \in [\gamma/2, \beta]$ ; 7)  $(u_1^n, u_0^n) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) есть такая последовательность, что  $\|(u_1^n, u_0^n) - Q_n(u_1^n, u_0^n)\|_n \leq \varepsilon_n$ , где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Тогда: 1)  $\|u_1^n + u_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ; 2) имеет место оценка  $\|u_1^n + u_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n} \leq (\varepsilon_n + (2\beta_n + \theta)Kh_n^\alpha)/(1 - q_n)$ , где  $q_n = (\max(S_n, p_n(\theta)))^{1/2}$ ,  $S_n = \beta_n L(1 + \beta_n L)$ ,  $p_n(\theta) = S_n + 1 - 2\theta\gamma^{-1}$  (из условий 5), 6) теоремы вытекает, что  $q_n \rightarrow q \in (0, 1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому предполагаем, без ограничения общности, что  $q_n \in (0, 1)$  для всех  $n$ .

**Доказательство.** Для  $(u_1, u_0), (v_1, v_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ ,  $u = u_1 + u_0$ ,  $v = v_1 + v_0$  имеем

$$\begin{aligned} \|Q_n(u_1, u_0) - Q_n(v_1, v_0)\|_n^2 &\leq \beta_n^2 \|f^n(u) - f^n(v) - (G_n(u) - G_n(v))\|_{F_n}^2 + \\ &+ \|u_0 - v_0 - \theta(G_n(u) - G_n(v))\|_{\Phi_n}^2 = \beta_n^2 (\|f^n(u) - f^n(v)\|_{F_n}^2 - \\ &- 2(f^n(u) - f^n(v), \varphi_n^0)_{F_n}^2 + (f^n(u) - f^n(v), \varphi_n^0)_{F_n}^2 \|\varphi_n^0\|_{F_n}^2) + \|u_0 - v_0\|_{\Phi_n}^2 - \\ &- 2\theta(f^n(u) - f^n(v), \varphi_n^0)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_n^0)_{\Phi_n} + \theta^2 (f^n(u) - f^n(v), \varphi_n^0)_{F_n}^2 \|\varphi_n^0\|_{\Phi_n}^2 \leq \\ &\leq \beta_n^2 L^2 \|u - v\|_{\Phi_n}^2 + \|u_0 - v_0\|_{\Phi_n}^2 - 2\theta(f^n(u) - f^n(v), \varphi_n^0)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_n^0)_{\Phi_n} \end{aligned}$$

при  $\theta \in (0, \beta]$ . Отсюда с использованием

$$(f^n(u) - f^n(v), \varphi_0^n)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \geq \gamma^{-1} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{\Phi_n}^2 + (f^n(u_1 + v_0) - f^n(v), \varphi_0^n)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{\Phi_n}, (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{\Phi_n}^2 = \|u_0 - v_0\|_{\Phi_n}^2$$

и

$$2\theta L \|u_1 - v_1\|_{\Phi_n} \|u_0 - v_0\|_{\Phi_n} \leq \beta_n L (\|u_1 - v_1\|_{\Phi_n}^2 + \|u_0 - v_0\|_{\Phi_n}^2) \quad (\theta \in (0, \beta])$$

имеем

$$\|Q_n(u_1, u_0) - Q_n(v_1, v_0)\|_n^2 \leq S_n \|u_1 - v_1\|_{\Phi_n}^2 + p_n(\theta) \|u_0 - v_0\|_{\Phi_n}^2,$$

где  $S_n = \beta_n L (1 + \beta_n L)$  и  $p_n(\theta) = S_n + 1 - 2\theta\gamma^{-1}$ , т. е.  $\|Q_n(u_1, u_0) - Q_n(v_1, v_0)\|_n \leq q_n \|u_1, u_0 - (v_1, v_0)\|_n$ , где  $q_n = (\max(S_n, p_n(\theta)))^{1/2}$ .

Имеем  $S_n \rightarrow S$ ,  $p_n(\theta) \rightarrow p(\theta) = S + 1 - 2\theta\gamma^{-1}$  при  $n \rightarrow \infty$ . При  $M < 2$  для  $\theta \in (c, \beta]$  имеем  $p(\theta) < 1$ . При  $\gamma \leq 2\beta$  имеем  $p(\theta) \leq S$  для  $\theta \in [\gamma/2, \beta]$ . Следовательно,  $q_n \rightarrow q \in (0, 1)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому предполагаем, без ограничения общности, что  $q_n \in (0, 1)$  для всех  $n$ .

С использованием равенств  $(\varphi)_n - ((\varphi)_n, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \varphi_0^n = B_n^{-1} A^n(\varphi)_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) для  $(\psi_1^n, \psi_0^n) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$  с  $\psi_0^n = ((\varphi)_n, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \varphi_0^n$  и  $\psi_1^n = (\varphi)_n - \psi_0^n$  имеем  $\|(\psi_1^n, \psi_0^n) - Q_n(\psi_1^n, \psi_0^n)\|_n = \|B_n^{-1} (A^n(\varphi)_n - f^n((\varphi)_n) + G_n((\varphi)_n)) + \theta G_n((\varphi)_n)\|_{\Phi_n} \leq (2\beta_n + \theta) K h_n^n$ . Значит,  $\|u_1^n + u_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n} \leq \|(u_1^n, u_0^n) - Q_n(u_1^n, u_0^n)\|_n + \|(\psi_1^n, \psi_0^n) - Q_n(\psi_1^n, \psi_0^n)\|_n + \|Q_n(u_1^n, u_0^n) - Q_n(\psi_1^n, \psi_0^n)\|_n \leq \varepsilon_n + (2\beta_n + \theta) K h_n^n + q_n \|u_1^n + u_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n}$ . Теорема 1 доказана.

Отметим, что условия 5), 6) теоремы 1 аналогичны условиям теоремы 1 в [1].

**Замечание 1.** Из доказательства теоремы 1 вытекает, что заключение 1) теоремы 1 остается справедливым, если условие 1) теоремы 1 заменить (при сохранении остальных условий теоремы 1) на условие  $\|A^n(\varphi)_n - f^n((\varphi)_n)\|_{F_n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для решения  $\varphi$  задачи (1).

**Замечание 2.** Теорема 1 является теоремой о сходимости РМ, т. к.  $(u_1^n, u_0^n)$  из условия 7) теоремы 1 при  $\varepsilon_n = 0$  является решением уравнения (6). Из теоремы 1 вытекает, что РМ является устойчивым в силу того, что в условии 7) теоремы 1 рассматривается приближенное решение уравнения (6). Так как при выполнении условий 1)–6) теоремы 1 оператор  $Q_n$  является сжимающим, то решение  $(u_1^n, u_0^n)$  уравнения (6) можно найти с использованием итерационного процесса, сходящегося со скоростью геометрической прогрессии.

При отыскании решения уравнения (6) решается нелинейное уравнение. Ниже, в теореме 2, предлагается РИП, на каждом шаге которого решается только линейное уравнение. При этом будет использоваться оператор  $I_n$  (соответственно,  $J_n$ ), который в теореме 1 не используется.

**Теорема 2.** Пусть: 1) выполняются условия 1)–6) теоремы 1, причем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^n$  сходится; 2)  $\|(\varphi)_{n+1} - J_n(\varphi)_n\|_{\Phi_{n+1}} \leq b_n$  для  $n = 1, 2, \dots$ , и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится; 3)  $(v_1^n, v_0^n) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) есть такая последовательность, что  $\|(v_1^{n+1}, v_0^{n+1}) - Q_{n+1}(I_n(v_1^n, v_0^n))\|_{n+1} \leq \varepsilon_n$ , и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$  сходится.

Тогда: 1)  $\|v_1^n + v_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ; 2) имеет место оценка

$$\|v_1^{n+m} + v_0^{n+m} - (\varphi)_{n+m}\|_{\Phi_{n+m}} \leq \left( \prod_{i=n}^{n+m-1} q_{i+1} \right) \|v_1^n + v_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n} + \sum_{i=n}^{n+m-1} d_i t_i \text{ для всех}$$

$m \geq 1$  и  $n$ , где  $d_{n+m-1} = 1$  и  $d_i = \prod_{k=i+1}^{n+m-1} q_{k+1}$  ( $i = n, n+1, \dots, n+m-2$ ),  $t_i = q_{i+1} b_i + (2\beta_{i+1} + \theta) K h_{i+1}^i + \varepsilon_i$  ( $q_n$  см. в заключении 2) теоремы 1).

Доказательство. Теорема 2 вытекает из оценок  $\|Q_n(u_1, u_0) - Q_n(v_1, v_0)\|_n \leq q_n \| (u_1, u_0) - (v_1, v_0) \|_n$  для всех  $(u_1, u_0), (v_1, v_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ ,  $\|(\psi_1^n, \psi_0^n) - Q_n(\psi_1^n, \psi_0^n)\|_n \leq (2\beta_n + \theta) K h_n^2$ , где  $\psi_0^n = ((\varphi)_n, \varphi_0^n)_{\Phi_n}$  и  $\psi_1^n = (\varphi)_n - \psi_0^n$  (см. доказательство теоремы 1), оценки условия 2) теоремы 2 и теоремы в [4]. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. В условии 2) теоремы 2 можно взять  $b_n = K_0 h_n^2$  с постоянными  $K_0 > 0$  и  $\eta > 0$ , не зависящими от  $n$ , причем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2$  сходится.

Замечание 4. Если выполнены условия 1), 2) теоремы 2, то для РИП  $(v_1^{n+1}, v_0^{n+1}) = Q_{n+1}(I_n(v_1^n, v_0^n))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), начатого с любого элемента  $(v_1^1, v_0^1) \in \Phi_1^1 \times \Phi_1^0$ , имеем  $\|v_1^n + v_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и справедлива оценка из заключения 2) теоремы 2 с  $\epsilon_i = 0$ . Из теоремы 2 вытекает, что РИП обладает известной устойчивостью, ибо последовательные приближения РИП можно находить с некоторой ошибкой (см. условие 3) теоремы 2).

Отметим, что операторы  $A^n$  в (2) могут быть самосопряженными и неотрицательными при рассмотрении краевых задач с краевыми условиями типа Неймана (см. [2], [3], [5]), что позволяет использовать при отыскании последовательных приближений РИП известные методы.

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу Неймана

$$-u'' = f(x, u) \text{ в } [0, 1], \quad (7) \quad u'(0) = u'(1) = 0, \quad (8)$$

где  $f(x, u)$  — вещественнозначная функция, заданная на  $[0, 1] \times R$  ( $R$  — вещественная прямая).

Предположим, что: 1) функция  $f(x, u)$  имеет частную производную по  $u$ , т. е.  $f_u(x, u)$ , для всех  $x \in [0, 1]$ ,  $u \in R$ ; 2)  $|f_u(x, u)| \leq L$  для всех  $x \in [0, 1]$  и  $u \in R$  с постоянной  $L > 0$ ; 3)  $f_u(x, u) \geq a(x)$  для всех  $x \in [0, 1]$  и  $u \in R$ , где  $a(x)$  — такая интегрируемая (по Риману) функция, что

$$\int_0^1 a(x) dx > \gamma^{-1} \quad (9)$$

с постоянной  $\gamma > 0$ ; 4) для любого  $r > 0$  существует такая постоянная  $C(r) > 0$ , что  $|f(x, u) - f(y, u)| \leq C(r)|x - y|$  для всех  $x, y \in [0, 1]$  и  $u \in R$  с  $|u| \leq r$ ; 5)  $\beta L(1 + \beta L) < 1$ , здесь и далее  $\beta = \pi^{-2}$ ; 6) выполняется хотя бы одно из следующих двух неравенств:  $L\gamma(1 + \beta L) < 2$  и  $\gamma \leq 2\beta$ .

Тогда задача (7)–(8) имеет решение  $\varphi(x)$  (см. [1]), вторая производная которого в силу условий на функцию  $f(x, u)$  удовлетворяет условию Липшица на  $[0, 1]$ .

Для произвольного натурального числа  $n$  введем  $(2^n + 1)$ -мерное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{E_n} = h_n((u_0 v_0 + u_{2^n} v_{2^n})/2 + \sum_{i=1}^{2^n-1} u_i v_i)$$

(здесь и далее  $h_n = 2^{-n}$ ) и нормой  $\|u\|_{E_n} = (u, u)_{E_n}^{1/2}$  для  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{2^n})$ ,  $v = (v_0, v_1, \dots, v_{2^n}) \in E_n$  ( $u_i, v_i \in R$  для  $i = 0, 1, \dots, 2^n$ ). В примере  $\Phi_n = F_n = E_n$ .

Для вещественнозначных функций  $u(x)$ , определенных на  $[0, 1]$ , введем оператор  $(\cdot)_n$ , ставящий в соответствие  $u(x)$  элемент  $(u)_n \in E_n$  правилом  $(u)_n = (u(x_0), \dots, u(x_1), \dots, u(x_{2^n}))$ , где  $x_i = ih_n$  для  $i = 0, 1, \dots, 2^n$ .

Из интегрируемости функции  $a(x)$  вытекает, что существует такой номер  $N$ , что для всех  $n \geq N$  имеем

$$h_n((a(0) + a(1))/2 + \sum_{i=1}^{2^n-1} a(ih_n)) \geq \gamma^{-1}, \quad (10)$$

т. к. в левой части неравенства (10) стоит формула трапеций для интеграла в (9).

Введем линейные операторы  $J_n: E_n \rightarrow E_{n+1}$  правилом  $u_{2i} = v_i$  при  $i = 0, 1, \dots, 2^n$  и  $u_{2i-1} = (v_{i-1} + v_i)/2$  при  $i = 1, \dots, 2^n$  для  $u \equiv (u_0, u_1, \dots, u_{2^{n+1}}) = Jv \in E_{n+1}$ ,  $v = (v_0, v_1, \dots, v_{2^n}) \in E_n$ . Для  $v \in E_n$  имеем  $\|J_n v\|_{E_{n+1}} \leq \|v\|_{E_n}$ .

Введем разностный аналог задачи (7)–(8)  $A_n^* v = f^n(v)$  ( $v \in E_n$ ), где  $A_n^*$  — линейный оператор из  $E_n$  в  $E_n$  (см. [2], с. 354–356, [3], с. 104), задаваемый для  $v = (v_0, v_1, \dots, v_{2^n}) \in E_n$  правилом  $A_n^* v = w \equiv (w_0, w_1, \dots, w_{2^n}) \in E_n$ ,  $w_0 = 2(v_0 - v_1)/h_n^2$ ,  $w_i = (-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1})/h_n^2$  ( $i = 1, \dots, 2^n - 1$ ),  $w_{2^n} = 2(-v_{2^n-1} + v_{2^n})/h_n^2$ , а  $f^n$  — оператор из  $E_n$  в  $E_n$ , задаваемый правилом  $f^n(v) = (f(0, v_0), f(h_n, v_1), \dots, f(ih_n, v_i), \dots, f(1, v_{2^n}))$ .

Пусть  $E_n^0$  — подпространство  $E_n$ , натянутое на вектор  $\varphi_0^n \in E_n$  с равными единице компонентами, а  $E_n^1$  — подпространство  $E_n$ , ортогональное  $E_n^0$  в  $E_n$ . Пусть  $B_n$  — сужение оператора  $A^n$  на  $E_n^1$ . Имеем  $\|\varphi_0^n\|_{E_n} = 1$ ,  $A^n \varphi_0^n = 0 \in E_n$  и  $(B_n v, v)_{E_n} \geq 4h_n^{-2} \sin^2(\pi h_n/2) \|v\|_{E_n}^2$  для всех  $v \in E_n^1$ .

Оператор  $A^n$  самосопряженный, и уравнение  $A^n v = w$  имеет решение тогда и только тогда, когда  $(w, \varphi_0^n)_{E_n} = 0$ . Значит,  $B_n$  отображает  $E_n^1$  на  $E_n^1$ , т. е. существует  $B_n^{-1}: E_n^1 \rightarrow E_n^1$  и  $\|B_n^{-1} w\|_{E_n} \leq \beta_n \|w\|_{E_n}$  для всех  $w \in E_n^1$  с  $\beta_n = (h_n/2)^2 / \sin^2(\pi h_n/2)$ . Отметим, что  $\beta_n \rightarrow \beta$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\beta_n \geq \beta$  для  $n = 1, 2, \dots$

Имеем  $\partial_n \varphi_0^n = \varphi_0^{n+1}$  и  $J_n u \in E_{n+1}^1$  для всех  $u \in E_n^1$ . Определим линейный оператор  $I_n: E_n^1 \times E_n^0 \rightarrow E_{n+1}^1 \times E_{n+1}^0$  правилом  $I_n(u_1, u_0) = (J_n u_1, J_n u_0)$  для  $(u_1, u_0) \in E_n^1 \times E_n^0$ . Имеем  $\|I_n(u_1, u_0)\|_{n+1} \leq \|(u_1, u_0)\|_n$ .

Для оператора  $f^n$  имеем  $\|f^n(u) - f^n(v)\|_{E_n} \leq L \|u - v\|_{E_n}$  для всех  $u, v \in E_n$ . И если  $(u_1, u_0), (v_1, v_0) \in E_n^1 \times E_n^0$ ,  $u = u_1 + u_0$ ,  $v = v_1 + v_0$ , то с использованием формулы конечных приращений Лагранжа имеем  $(f^n(u) - f^n(v), \varphi_0^n)_{E_n} \times (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{E_n} \geq \gamma^{-1} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{E_n}^2$  для всех  $n \geq N$ , т. к.  $(u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{E_n}$  — это разность между компонентами  $u_0$  и  $v_0$ .

Для решения  $\varphi$  задачи (7)–(8) имеем  $\|A^n(\varphi)_n - f^n((\varphi)_n)\|_{E_n} = O(h_n)$ ,  $\|(\varphi)_{n+1} - J_n(\varphi)_n\|_{E_n} = O(h_n^2)$  (см. [2], [3], с. 67).

Из вышеизложенного вытекает, что решение задачи (7)–(8) может быть найдено с использованием теоремы 2, т. е. РИП.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фонарёв А. А. О решении одной нелинейной задачи Неймана. — Изв. вузов. Матем., 1982, № 6, с. 60–62.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., 1977. 456 с.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983. 616 с.
4. Fomarev A. A. On the iterative method. — Abstracts Amer. Math. Soc., 1981, v. 2, № 2, p. 301.
5. Дьяконов Е. Г. О решении систем уравнений проекционно-разностного метода для неотрицательных операторов. — В сб.: Вычислительн. методы линейн. алгебры. Новосибирск, 1977, с. 51–60.

г. Москва

Поступила  
29.06.1984