Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 1. С. 27–37.

УДК 517.91

НАЧАЛЬНАЯ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

М. Г. Мажгихова

Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН (ИПМА КБНЦ РАН), Нальчик, Россия
mazhgihova.madina@yandex.ru

Исследованы начальная и краевая задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом. Доказаны теоремы существования и единственности решения для исследуемых задач. Решение краевой задачи выписано в терминах функции Грина.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение дробного порядка, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, функция Грина.*

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(\eta) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau) u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

где

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(t) = D_{0t}^{\alpha-n} u^{(n)}(t) \tag{2}$$

есть дробная производная Капуто [1, с. 11], D_{0t}^{α} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля [1, с. 9], $H(t)$ — функция Хевисайда, $n-1 < \alpha \leq n$, λ, μ — произвольные постоянные, τ — фиксированное положительное число.

Исследование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка началось с работы [2], в которой методом последовательных приближений получено решение линейного дифференциального уравнения дробного порядка. В [3] доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения дробного порядка. Краевая задача типа Штурма — Лиувилля для дифференциального уравнения дробного порядка исследована в работе [4]. Задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах была рассмотрена в работе [5]. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка исследована в работе [6].

Постановки начальной и краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом приведены в работе [7]. Значительному развитию теории обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом способствовали работы [8–11].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 16-01-00462-а).

Задача Коши для уравнения (1) с оператором Римана — Лиувилля была решена в [12]. В работах [13] и [14] для уравнения (1) получены решения задачи Дирихле и задачи Неймана. Отметим также работы [15; 16], посвящённые дифференциальным уравнениям дробного порядка с отклоняющимся аргументом смешанного типа.

В данной работе для уравнения (1) получены решения начальной и краевой задач. Решение краевой задачи выписано в терминах функции Грина. Для этих задач доказаны теоремы существования и единственности.

Регулярным решением уравнения (1) назовём функцию $u = u(t)$, имеющую абсолютно непрерывные производные до порядка $n-1$ на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющую этому уравнению.

Рассмотрим функцию

$$W_\nu(t) = W_\nu(t;\tau,\lambda,\mu) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (t-m\tau)_+^{\alpha m+\nu-1} E_{\alpha,\alpha m+\nu}^{m+1}(\lambda(t-m\tau)_+^{\alpha}), \quad \nu \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!} \; -$$

обобщённая функция Миттаг-Лёффлера [17], $(\rho)_k$ — символ Похгаммера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера,

$$(t-m\tau)_+^{\rho} = \begin{cases} (t-m\tau)^{\rho}, & t-m\tau > 0, \\ 0, & t-m\tau \le 0. \end{cases}$$

Замечание 1. Начиная с некоторого номера m, выражение $t - m\tau < 0$, поэтому в ряде (3) содержится конечное число слагаемых $N \le [\frac{t}{\tau}] + 1$.

Приведём некоторые свойства функции $W_\nu(t)$.

1. Для функции $W_\nu(t)$ справедлива формула интегро-дифференцирования порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ [13]:

$$D_{0t}^{\alpha} W_\nu(t) = W_{\nu-\alpha}(t). \tag{4}$$

2. Функция $W_\nu(t)$ удовлетворяет соотношению [14]:

$$W_\nu(t) = \lambda W_{\nu+\alpha}(t) + \mu W_{\nu+\alpha}(t-\tau), \quad \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \nu \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Справедливость (5) следует из свойства обобщённой функции Миттаг-Лёффлера [18]

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(t) - E_{\alpha,\beta}^{\rho-1}(t) = t E_{\alpha,\alpha+\beta}^{\rho}(t). \tag{6}$$

2. Начальная задача

Задача 1. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u^{(k-1)}(0) = u_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть функция $f(t) \in C(0,1)$ представима в виде*

$$f(t) = D_{0t}^{\alpha-n} g(t), \qquad g(t) \in L(0,1). \tag{8}$$

Тогда решение задачи (1), (7) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t)=\sum_{k=1}^{n}u_kW_k(t)+\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi, \tag{9}$$

где $W_k(t)$ *определяется формулой* (3).

Доказательство. Из формулы (3) следует, что

$$W_k^{(i)}(0)=\begin{cases}0,\ k\neq i+1,\\ 1,\ k=i+1.\end{cases}$$

Значит, формула (9) удовлетворяет начальным условиям (7).

Теперь покажем, что решение (9) удовлетворяет уравнению (1). Для этого подставим его в уравнение (1) и сгруппируем отдельно слагаемые с $W_k(t)$ ($k=1,2,\ldots,n$) и слагаемые с интегралом. Тогда получим, что $W_k(t)$ в силу соотношений (4) и (5) удовлетворяют однородному уравнению

$$\partial_{0t}^{\alpha}W_k(t)-\lambda W_k(t)-\mu H(t-\tau)W_k(t-\tau)=0,\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Остаётся показать, что

$$\partial_{0t}^{\alpha}\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi-\lambda\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi-\mu H(t-\tau)\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi-\tau)d\xi=f(t).$$

Используя определение производной Капуто (2) и представление (8) функции $f(t)$, получим, что

$$\partial_{0t}^{\alpha}\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi=D_{0t}^{\alpha-n}\frac{d^n}{dt^n}\int\limits_0^t D_{0t}^{\alpha-n}g(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi.$$

Учитывая формулу дробного интегрирования по частям [19, с. 15]

$$\int\limits_a^b g(s)D_{as}^{\alpha}h(s)ds=\int\limits_a^b h(s)D_{bs}^{\alpha}g(s),\quad \alpha\le 0, \tag{10}$$

и свойство (4), получим равенства

$$D_{0t}^{\alpha-n}\frac{d^n}{dt^n}\int\limits_0^t g(\xi)W_n(t-\xi)d\xi=D_{0t}^{\alpha-n}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t g(\xi)W_1(t-\xi)d\xi=$$

$$=D_{0t}^{\alpha-n}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t g(\xi)\left[\lambda W_{\alpha+1}(t-\xi)+\mu W_{\alpha+1}(t-\xi-\tau)\right]d\xi=$$

$$=D_{0t}^{\alpha-n}g(t)+\lambda\int\limits_0^t D_{0t}^{\alpha-n}g(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi+\mu\int\limits_0^t D_{0t}^{\alpha-n}g(\xi)W_\alpha(t-\xi-\tau)d\xi=$$

$$= f(t) + \lambda \int\limits_0^t f(\xi) W_\alpha(t-\xi) d\xi + \mu \int\limits_0^t f(\xi) W_\alpha(t-\xi-\tau) d\xi.$$

Теперь докажем единственность решения задачи (1), (7). Для этого покажем, что однородная задача

$$\partial_{0t}^\alpha u(\eta) - \lambda u(t) = \mu H(t-\tau) u(t-\tau), \quad t > 0, \quad u^{(k-1)}(0) = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

имеет только тривиальное решение.

С учётом однородности начальных условий перепишем (11) в виде

$$u(t) - \lambda D_{0t}^{-\alpha} u(t) = \mu D_{0t}^{-\alpha} [H(t-\tau) u(t-\tau)]. \tag{12}$$

Докажем теорему методом математической индукции. Для этого разобьём интервал $(0,1)$ на интервалы длины τ: $I_i = ((i-1)\tau, i\tau)$, $i = 1, 2, \ldots$ При $i = 1$ уравнение (12) принимает вид

$$u(t) - \lambda D_{0t}^{-\alpha} u(t) = 0, \ t \in (0, \tau),$$

и имеет нулевое решение $u(t) = 0$ [19, с. 16].

Предполагая, что при $i \leq j$ решение $u(t) = 0$ при $t \in I_i$, покажем, что $u(t) = 0$ при $t \in I_{j+1}$. На интервале I_{j+1} (12) запишется в виде уравнения

$$u(t) - \lambda D_{(j-1)\tau, t}^{-\alpha} u(t) = 0, \ t \in ((j-1)\tau, j\tau),$$

решение которого $u(t) = 0$ [19, с. 16].

Получено, что решение однородной задачи (11) нулевое. Значит, решение неоднородной задачи (1), (7) единственно. $\square$

3. Краевая задача

Задача 2. Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения (1) при $1 < \alpha \leq 2$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} au(0) + bu'(0) = 0, \\ cu(1) + du'(1) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где a, b, c, d — заданные постоянные, причём $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$.

Рассмотрим функцию

$$G(t,\xi) = H(t-\xi) W_\alpha(t-\xi) + \Big(cW_\alpha(1-\xi) + dW_{\alpha-1}(1-\xi)\Big) \left(\frac{b}{\triangle} W_1(t) - \frac{a}{\triangle} W_2(t)\right), \tag{14}$$

где

$$\triangle = a[cW_2(1) + dW_1(1)] - b[cW_1(1) + \lambda d W_\alpha(1) + \mu d W_\alpha(1-\tau)] \neq 0, \tag{15}$$

$W_\nu(t)$ определяется с помощью равенства (3).

Для функции $G(t,\xi)$, определённой формулой (14), справедливы свойства:

1. *Функция $G(t,\xi)$ непрерывна для всех значений t и ξ из отрезка* $[0,1]$.

Справедливость этого свойства следует из формулы (4), а также из условия (15).

2. *$G(t,\xi)$ удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [D_{1\xi}^{\alpha-1} G(t,\xi)|_{\xi = t-\varepsilon} - D_{1\xi}^{\alpha-1} G(t,\xi)|_{\xi = t+\varepsilon}] = 1.$$

Действительно,

$$D_{1\xi}^{\alpha-1} G(t,\xi) = H(t-\xi) W_1(t-\xi) +$$

$$+\Big(cW_1(1-\xi)+\lambda dW_\alpha(1-\xi)+\mu dW_\alpha(1-\xi-\tau)\Big)\left(\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right).$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[W_1(\varepsilon)+(cW_1(1-t+\varepsilon)+\lambda dW_\alpha(1-t+\varepsilon)+\mu dW_\alpha(1-t+\varepsilon-\tau)-$$

$$-\ cW_1(1-t-\varepsilon)-\lambda dW_\alpha(1-t-\varepsilon)-\mu dW_\alpha(1-t-\varepsilon-\tau))\left(\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right)\Big]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}E_{\alpha,1}(\lambda\varepsilon^\alpha)=1,$$

где $E_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ — функция Миттаг-Лёффлера [20, с. 117].

3. *Функция* $G(t,\xi)$ *является решением уравнения*

$$D^\alpha_{1\xi}G(t,\xi)-\lambda G(t,\xi)-\mu H(1-\tau-\xi)G(t,\xi+\tau)=0.$$

Справедливость свойства 3 следует из (4), а также из свойства обобщённой функции Миттаг-Лёффлера (6).

4. *Функция* $G(t,\xi)$ *удовлетворяет краевым условиям*

$$aD^{\alpha-2}_{1\xi}G(t,\xi)|_{\xi=0}-bD^{\alpha-1}_{1\xi}G(t,\xi)|_{\xi=0}=0,$$
$$cD^{\alpha-2}_{1\xi}G(t,\xi)|_{\xi=1}-dD^{\alpha-1}_{1\xi}G(t,\xi)|_{\xi=1}=0.$$

Действительно,

$$D^{\alpha-1}_{1\xi}G(t,\xi)=H(t-\xi)W_1(t-\xi)+$$

$$+(cW_1(1-\xi)+\lambda dW_\alpha(1-\xi)+\mu dW_\alpha(1-\xi-\tau))\left(\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right),$$

$$D^{\alpha-2}_{1\xi}G(t,\xi)=H(t-\xi)W_2(t-\xi)+(cW_2(1-\xi)+dW_1(1-\xi))\left(\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right).$$

Тогда,

$$aD^{\alpha-2}_{1\xi}G(t,\xi)|_{\xi=0}-bD^{\alpha-1}_{1\xi}G(t,\xi)|_{\xi=0}=$$

$$=aW_2(t)+a(cW_2(1)+dW_1(1))\left(\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right)-$$

$$-bW_1(t)-b(cW_1(1)+\lambda dW_\alpha(1)+\mu dW_\alpha(1-\tau))\left(\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right)=$$

$$=[bW_1(t)-aW_2(t)]\left[-1+\frac{a(cW_2(1)+dW_1(1))}{\triangle}+\right.$$

$$\left.+\frac{-b(cW_1(1)+\lambda dW_\alpha(1)+\mu dW_\alpha(1-\tau))}{\triangle}\right]=[bW_1(t)-aW_2(t)]\left[-1+\frac{\triangle}{\triangle}\right]=0;$$

$$cD^{\alpha-2}_{1\xi}G(t,\xi)|_{\xi=1}-dD^{\alpha-1}_{1\xi}G(t,\xi)|_{\xi=1}=c(cW_2(0)+dW_1(0))\left(\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right)-$$

$$-d(cW_1(0)+\lambda dW_\alpha(0))\left(\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right)=$$

$$=\left(\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right)(c^2W_2(0)+dcW_1(0)-dcW_1(0)-\lambda d^2W_\alpha(0))=0,$$

учитывая, что $W_\alpha(0)=W_2(0)=0$.

Функцию $G(t,\xi)$, удовлетворяющую условиям 1–4, назовём функцией Грина задачи 2.

Теорема 2. 1. *Пусть функция* $f(t)\in C(0,1)$ *представима в виде* (8) *при* $n=2$ *и выполнено условие* (15). *Тогда существует регулярное решение задачи* (1), (13). *Решение имеет вид*

$$u(t)=\int\limits_0^1 f(\xi)G(t,\xi)d\xi. \tag{16}$$

2. *Решение задачи* (1), (13) *единствено тогда и только тогда, когда выполнено условие* (15).

Доказательство. Покажем, что решение задачи (1), (13) имеет вид (16). Домножим уравнение (1) на функцию $G(t,\xi)$ и проинтегрируем от 0 до 1:

$$\int\limits_0^1 G(t,\xi)\partial_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi-\lambda\int\limits_0^1 G(t,\xi)u(\xi)d\xi-\mu\int\limits_0^1 H(\xi-\tau)G(t,\xi)u(\xi-\tau)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^1 G(t,\xi)f(\xi)d\xi. \tag{17}$$

Учитывая определение оператора Капуто (2) и формулу дробного интегрирования по частям (10), первый интеграл в левой части (17) перепишем в виде

$$\int\limits_0^1 G(t,\xi)\partial_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi=\int\limits_0^1 G(t,\xi)D_{0\xi}^{\alpha-2}u''(\xi)d\xi=\int\limits_0^1 u''(\xi)D_{1\xi}^{\alpha-2}G(t,\xi)d\xi=$$

$$=u'(\xi)D_{1\xi}^{\alpha-2}G(t,\xi)|_0^1+\int\limits_0^1 u'(\xi)D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)d\xi=u'(\xi)D_{1\xi}^{\alpha-2}G(t,\xi)|_0^1+$$

$$+\int\limits_0^{t-0} u'(\xi)D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)d\xi+\int\limits_{t+0}^1 u'(\xi)D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)d\xi=u'(\xi)D_{1\xi}^{\alpha-2}G(t,\xi)|_0^1+$$

$$+u(\xi)D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_0^{t-0}+u(\xi)D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{t+0}^1+\int\limits_0^1 u(\xi)D_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi)d\xi=$$

$$=-[u(0)D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=0}+u'(0)D_{1\xi}^{\alpha-2}G(t,\xi)|_{\xi=0}]+[u(1)D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=1}+$$

$$+u'(1)D_{1\xi}^{\alpha-2}G(t,\xi)|_{\xi=1}]+u(t)[D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=t-0}-D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=t+0}]+$$

$$+\int\limits_0^1 u(\xi)D_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi)d\xi.$$

Учитывая свойства 2 и 4 функции Грина, получим равенство

$$\int\limits_0^1 G(t,\xi)\partial_{0\xi}^{\alpha}u(\xi)d\xi=u(t)+\int\limits_0^1 u(\xi)D_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi)d\xi. \tag{18}$$

Подставив (18) в (17), имеем

$$u(t)+\int\limits_0^1 u(\xi)D_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi)d\xi-\lambda\int\limits_0^1 G(t,\xi)u(\xi)d\xi-\mu\int\limits_0^1 H(\xi-\tau)G(t,\xi)u(\xi-\tau)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^1 G(t,\xi)f(\xi)d\xi$$

или

$$u(t)+\int\limits_0^1 u(\xi)[D_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi)-\lambda G(t,\xi)-\mu H(1-\tau-\xi)G(t,\xi+\tau)]d\xi=\int\limits_0^1 G(t,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Отсюда с учётом свойства 3 функции Грина получаем (16).

Теперь покажем, что функция (16) является решением задачи (1), (13). Функцию (16) можно представить в виде

$$u(t)=\left[\frac{b}{\triangle}W_1(t)-\frac{a}{\triangle}W_2(t)\right]\int\limits_0^1 f(\xi)[cW_\alpha(1-\xi)+dW_{\alpha-1}(1-\xi)]d\xi+\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi.$$

Тогда получаем, что

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t)=\partial_{0t}^{\alpha}\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi.$$

Учитывая представление (8) функции $f(t)$ при $n=2$ и формулу дробного интегрирования по частям (10), получим

$$\int\limits_0^t f(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi=\int\limits_0^t D_{0\xi}^{\alpha-2}g(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi=\int\limits_0^t g(\xi)W_2(t-\xi)d\xi.$$

Подставляя последнее выражение в предыдущее, имеем

$$\partial_{0t}^{\alpha}\int\limits_0^t g(\xi)W_2(t-\xi)d\xi=D_{0t}^{\alpha-2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^t g(\xi)W_2(t-\xi)d\xi=D_{0t}^{\alpha-2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t g(\xi)W_1(t-\xi)d\xi.$$

Так как в силу (5) $W_1(t)=\lambda W_{\alpha+1}(t)+\mu W_{\alpha+1}(t-\tau)$, то последнее можно переписать в виде

$$D_{0t}^{\alpha-2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t g(\xi)[\lambda W_{\alpha+1}(t-\xi)+\mu W_{\alpha+1}(t-\xi-\tau)]d\xi=f(t)+\lambda u(t)+\mu H(t-\tau)u(t-\tau).$$

Далее докажем, что найденное решение удовлетворяет краевым условиям (13). Так как $W_\alpha(0)=0$, то

$$au(0)+bu'(0)=\int\limits_0^1 f(\xi)[cW_\alpha(1-\xi)+dW_{\alpha-1}(1-\xi)]\left(\frac{ab}{\triangle}+\lambda\frac{b^2}{\triangle}W_\alpha(0)-\frac{ab}{\triangle}\right)d\xi=0;$$

$$cu(1)+du'(1)=\int\limits_0^1 f(\xi)\left(cW_\alpha(1-\xi)+dW_{\alpha-1}(1-\xi)\right)\times$$

$$\times\left(1+c\left(\frac{b}{\triangle}W_1(1)-\frac{a}{\triangle}W_2(1)\right)+d\left(\lambda\frac{b}{\triangle}W_\alpha(1)+\mu\frac{b}{\triangle}W_\alpha(1-\tau)-\frac{a}{\triangle}W_1(1)\right)\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\triangle}\int\limits_0^1 f(\xi)\left(cW_\alpha(1-\xi)+dW_{\alpha-1}(1-\xi)\right)(\triangle-\triangle)d\xi=0.$$

Получили, что найденное решение удовлетворяет краевым условиям (13).

Покажем теперь, что если условие (15) не выполняется, то есть если

$$\triangle=a[cW_2(1)+dW_1(1)]-b[cW_1(1)+\lambda dW_\alpha(1)+\mu dW_\alpha(1-\tau)]=0,$$

то решение однородной задачи не единственно.

Рассмотрим функцию $\overline{u}(t)=u(0)W_2(t)+u'(0)W_1(t)$, которая является решением задачи

$$\begin{gathered}\partial_{0t}^{\alpha}\overline{u}(\eta)-\lambda\overline{u}(t)-\mu H(t-\tau)\overline{u}(t-\tau)=0,\\ a\overline{u}(0)+b\overline{u}'(0)=0,\\ c\overline{u}(1)+d\overline{u}'(1)=0.\end{gathered}\tag{19}$$

Второе из условий (19) можно переписать в виде

$$\overline{u}(0)[cW_2(1)+dW_1(1)]+\overline{u}'(0)[cW_1(1)+\lambda dW_\alpha(1)+\mu dW_\alpha(1-\tau)]=0.\tag{20}$$

Тогда определитель системы (19) (с учётом (20)) равен

$$\overline{\triangle}=\begin{vmatrix} a & b\\ cW_2(1)+dW_1(1) & cW_1(1)+\lambda dW_\alpha(1)+\mu dW_\alpha(1-\tau)\end{vmatrix}=0.$$

Значит, решение задачи (1), (13) единственно только при выполнении условия (15). $\square$

Замечание 2. Выполнение условий $\lambda,\mu>0$, $ab<0$ обеспечивает выполнение условия (15).

Замечание 3. При $\lambda=0$ условие разрешимости (15) переходит в условие

$$ac+ad-bc\neq 0.$$

Список литературы

1. **Нахушев, А. М.** Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.
2. **Barrett, J. H.** Differential equation of non-integer order / J. H. Barrett // Canadian Journal of Mathemtics. — 1954. — Vol. 4. — P. 529–541.
3. **Джрбашян, М. М.** Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка / М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян // Изв. АН Армян. ССР. Математика. — 1968. — Т. 3, № 1. — С. 3–28.
4. **Джрбашян, М. М.** Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма — Лиувилля / М. М. Джрбашян // Изв. АН Армян. ССР. Математика. — 1970. — Т. 5, № 2. — С. 71–96.

5. **Нахушев, А. М.** Задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах / А. М. Нахушев // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 234, № 2. — С. 308–311.
6. **Псху, А. В.** Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка / А. В. Псху // Мат. сб. — 2011. — Т. 202, № 4. — С. 111–122.
7. **Норкин, С. Б.** О решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / С. Б. Норкин // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, вып. 1. — С. 199–206.
8. **Bellman, R. E.** Differential-Difference Equations / R. E. Bellman, K. L. Cooke. — N. Y.; London : Academic Press, 1963. — 478 p.
9. **Эльсгольц, Л. Э.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. — М. : Наука, 1971. — 296 с.
10. **Мышкис, А. Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкис. — М. : Наука, 1972. — 352 с.
11. **Hale, J.** Theory of Functional Differential Equations / J. Hale. — N. Y.; Heidelberg; Berlin, Springer-Verlag, 1977. — 365 p.
12. **Мажгихова, М. Г.** Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производной Римана — Лиувилля с запаздывающим аргументом / М. Г. Мажгихова // Учёные зап. Орлов. гос. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. — 2015. — № 4 (67). — С. 46–47.
13. **Мажгихова, М. Г.** Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом / М. Г. Мажгихова // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 2015. — Т. 17, № 2. — С. 42–47.
14. **Мажгихова, М. Г.** Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом / М. Г. Мажгихова // Изв. Кабардино-Балкар. науч. центра РАН. — 2016. — Т. 70, № 2. — С. 15–20.
15. **Зарубин, А. Н.** Об алгоритме решения начально-краевой задачи для уравнения смешанного типа / А. Н. Зарубин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1997. — Т. 37, № 2. — С. 184–187.
16. **Зарубин, А. Н.** Начально-краевая задача для уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом / А. Н. Зарубин // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 1. — С. 87–93.
17. **Prabhakar, T. R.** A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel / T. R. Prabhakar // Yokohama Mathematical Journal. — 1977. — Vol. 19. — P. 7–15.
18. **Shukla, A. K.** On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties / A. K. Shukla, J. C. Prajapati // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2007. — Vol. 336. — P. 797–811.
19. **Псху, А. В.** Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.
20. **Джрбашян, М. М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. — М. : Наука, 1966. — 672 с.

Поступила в редакцию 09.11.2017.
После переработки 20.12.2017

Сведения об авторе

Мажгихова Мадина Гумаровна, младший научный сотрудник, отдел дробного исчисления, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия; e-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 1. P. 27–37.

INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF FRACTIONAL ORDER WITH DELAY

M.G. Mazhgikhova

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS, Nalchik, Russia
mazhgihova.madina@yandex.ru

We obtained the initial and boundary value problems for linear ordinary differential equation of fractional order with delay. The theorems of solution existence and uniqueness are proved for the investigated problems. The solution of the boundary value problem is written out in terms of the Green's function.

Keywords: *differential equation of fractional order, differential equation with delay, Green's function.*

References

1. **Nakhushev A.M.** *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 272 p. (In Russ.).
2. **Barrett J.H.** Differential equation of non-integer order. *Canadian Journal of Mathematics*, 1954, vol. 6, no. 4, pp. 529–541.
3. **Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B.** Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka [Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order]. *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoy SSR. Matematika* [The News of the Academy of Science of the Armenian SSR], 1968, vol. 3, no. 1, pp. 3—29. (In Russ.).
4. **Dzhrbashyan M.M.** Krayevaya zadacha dlya differentsial'nogo operatora drobnogo poryadka tipa Shturma — Liuvillya [Boundary problem for fractional differential operator of Sturm — Liuoville type]. *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoy SSR. Matematika* [The News of the Academy of Science of the Armenian SSR], 1970, vol. 5, no. 2, pp. 71—96. (In Russ.).
5. **Nakhushev A.M.** Zadacha Shturma — Liuvillya dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s drobnymi proizvodnymi v mladshikh chlenakh [Sturm — Liouville problem for an ordinary second order differential equation with fractional derivatives in the low member]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1977, vol. 234, no. 2, pp. 308–311. (In Russ.).
6. **Pskhu A.V.** Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order. *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 4, pp. 571—582.
7. **Norkin S.B.** O resheniyakh lineynogo neodnorodnogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s zapazdyvayushchim argumentom [On the solutions of a linear homogeneous second order differential equation with delay]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Progress of Mathematical Sciences], 1959, vol. 14, no. 1, pp. 199–206. (In Russ.).
8. **Bellman R.E., Cooke K.L.** *Differential-Difference Equations.* N. Y.; London, Academic Press, 1963. 478 p.
9. **Elsgolts L.E., Norkin S.B.** *Vvedeniye v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the theory of differential equations with deflecting argument]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 296 p. (In Russ.).
10. **Myshkis A.D.** *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear differential equations with delay]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 352 p. (In Russ.).
11. **Hale J.** *Theory of Functional Differential Equations.* N. Y.; Heidelberg; Berlin, Springer-Verlag, 1977. 365 p.

12. **Mazhgikhova M.G.** Nachal'naya zadacha dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s proizvodnoy Rimana — Liuvillya s zapazdyvayushchim argumentom [Initial value problem for ordinary differential equation with Riemann — Liouville derivative with delay]. *Uchyonye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta* [Scientific Notes of Oryol State University], 2015, vol. 67, no. 4, pp. 46–47. (In Russ.).
13. **Mazhgikhova M.G.** Zadacha Dirikhle dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya drobnogo poryadka s zapazdyvayushchim argumentom [Dirichlet problem for ordinary differential equation of fractional order with delay]. *Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk* [Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences], 2015, vol. 17, no. 2, pp. 42–47. (In Russ.).
14. **Mazhgikhova M.G.** Zadacha Neymana dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya drobnogo poryadka s zapazdyvayushchim argumentom [Neumann problem for ordinary differential equation of fractional order with delay]. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk* [News of Kabardino-Balkarian scientific center of the Russian Academy of Sciences], 2016, vol. 70, no. 2, pp. 15–20. (In Russ.).
15. **Zarubin A.N.** An algorithm for solving an initial boundary value problem for a mixed-type equation with delayed argument. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1997, vol. 37, no. 2, pp. 180–183.
16. **Zarubin A.N.** Initial-boundary value problem for a mixed-type equation with nonsmooth degeneration line and with retarded argument in the derivative. *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 12, pp. 1710–1721.
17. **Prabhakar T.R.** A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Mathematical Journal*, 1971, vol. 19, pp. 7–15.
18. **Shukla A.K., Prajapati J.C.** On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, vol. 336, pp. 797–811.
19. **Pskhu A.V.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka Publ., 2005. 199 p. (In Russ.).
20. **Dzhrbashyan M.M.** *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti* [Integral transforms and representations of functions in the complex domain]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 672 p. (In Russ.).

Accepted article received 09.11.2017
Corrections received 20.12.2017