



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Крючков, В. А. Сиренек, Вероятностное представление решения гиперболического уравнения массопереноса с конвективным членом,  
*Изв. вузов. Матем.*, 2000, номер 7, 77–80

<https://www.mathnet.ru/ivm796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

17 мая 2025 г., 08:31:35



А.Ф. КРЮЧКОВ, В.А. СИРЕНЕК

**ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МАССОПЕРЕНОСА  
С КОНВЕКТИВНЫМ ЧЛЕНОМ**

Математическое моделирование интенсивных процессов нестационарного массо-энергопереноса с наличием релаксационных эффектов приводит к необходимости решения уравнения

$$\sigma(\partial^2 c / \partial t^2) + \partial c / \partial t = D(\partial^2 c / \partial x^2) + S(\partial c / \partial x), \quad (1)$$

называемого гиперболическим уравнением массопереноса с конвективным членом [1], и различных его аналогов. Здесь  $c(x, t)$  — переносимое физическое поле,  $\sigma$  — время релаксации среды,  $D$  — коэффициент диффузии,  $S$  — скорость сноса. Собственно конвективным членом в (1) называют выражение  $S(\partial c / \partial x)$ . Если он отсутствует ( $S = 0$ ), то с помощью (1) описывают, в частности, волновой процесс распространения в среде возмущений некоторого вещества (с конечной скоростью  $w$ ), причем имеет место соотношение  $w = \sqrt{D/\sigma}$ . В этом случае, если положить  $a = 1/(2\sigma)$ , уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\partial^2 c / \partial t^2 + 2a(\partial c / \partial t) = w^2(\partial^2 c / \partial x^2). \quad (2)$$

Обычно (2) называют телеграфным уравнением; несколько последних десятилетий оно находилось под пристальным вниманием многих математиков. Дело в том, что (2) — одно из простейших уравнений гиперболического типа, а при решении последних традиционным методом конечных разностей возникают трудности, связанные с искажениями концентрационного фронта при переходе от дифференциального уравнения к разностному. Принципиально другой подход к этой проблеме доставляют вероятностные методы, успешное применение которых к эллиптическим и параболическим уравнениям хорошо известно [2]. Этот подход, как правило, основан на связи уравнений со скачкообразными марковскими процессами, однако для гиперболических уравнений столь явной связи не существует.

Пусть  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — достаточно регулярные функции. В дальнейшем будем различать следующие три вида начальных условий:

$$c(x, 0) = \varphi(x), \quad (\partial c / \partial t)|_{t=0} \equiv 0; \quad (3)$$

$$c(x, 0) \equiv 0, \quad (\partial c / \partial t)|_{t=0} = \psi(x); \quad (4)$$

$$c(x, 0) = \varphi(x), \quad (\partial c / \partial t)|_{t=0} = \psi(x). \quad (5)$$

Началом вероятностного исследования уравнения (2) принято считать классическую работу М. Каца [3], где рассматривается стохастическая модель, связанная с (2), — случайное блуждание материальной точки (частицы) по прямой с постоянной скоростью  $w$ , причем направление движения изменяется с постоянной интенсивностью  $a$ . В [3] приведена также вероятностная формула для решения задачи Коши (2), (3). В [4] Дж. Кизинский, используя теорию однопараметрических групп и полугрупп линейных операторов, обобщил формулу Каца на случай задачи

(2), (5); этому результату после некоторых преобразований можно придать следующую форму:

$$c(x, t) = \mathbf{E}\{\varphi(x + \varepsilon w \bar{t})\} + \mathbf{E}\left\{(\varepsilon/w) \int_0^{x+\varepsilon w \bar{t}} \psi(\tau) d\tau\right\}, \quad (6)$$

где  $\bar{t}$  — рандомизированное время ( $\bar{t} = \int_0^t (-1)^{N(\tau)} d\tau$ ,  $N(\tau)$  — однородный процесс Пуассона с параметром  $a$ ),  $\varepsilon$  — независимая от  $N(\tau)$  случайная величина, принимающая значения  $\pm 1$  с вероятностью  $1/2$ ,  $\mathbf{E}$  — операция математического ожидания.

Целью данной работы является получение формулы, аналогичной (6), для решения задачи Коши (1), (5).

Перейдем к построению вероятностной модели, позволяющей получить решение уравнения (1). Выделим на плоскости  $(x, v)$ ,  $x \in \mathbf{R}^1$ ,  $v$  — скорость, две параллельные прямые  $(x, w)$  и  $(x, -w)$ , объединение которых примем за фазовое пространство состояний  $X$ . Рассмотрим на  $X$  следующий скачкообразный марковский процесс. Потребуем, чтобы его состояние в момент времени  $t$ , обозначаемое через  $z_t = (x_t, v_t)$ ,  $v_t = \pm w$ , за бесконечно малый промежуток времени  $[t, t + dt]$  с вероятностью  $1 - a_i dt + o(dt)$  переходило в состояние  $(x_t + v_t dt, v_t)$ , а с вероятностью  $a_i dt + o(dt)$  совершало скачок в область  $(x_t + O(1), -v_t)$  на другой прямой ( $i = 1, 2$ ). Интенсивность соскока  $a_i$  зависит, вообще говоря, от прямой: с прямой  $(x, w)$  примем ее за  $a_1$ , а с  $(x, -w)$  — за  $a_2$ . Функцию  $F$  на  $X$  здесь удобно задавать парой функций  $f_1, f_2$ , определенных на  $\mathbf{R}^1$ , причем  $f_1(x) = F(x, w)$ ,  $f_2(x) = F(x, -w)$ . Тогда соответствующая этому процессу полугруппа также представляется в виде пары

$$U_t(z) = (u_1(x, t), u_2(x, t)) = (\mathbf{E}_{(x, w)}\{F(z_t)\}, \mathbf{E}_{(x, -w)}\{F(z_t)\}),$$

при этом  $U_0(z) = (f_1(x), f_2(x))$ . Непосредственно по определению находим инфинитезимальный оператор  $A$  нашего процесса. Этому оператору можно придать следующую матричную форму:

$$A = \begin{pmatrix} w(\partial/\partial x) - a_1 & a_1 \\ a_2 & -w(\partial/\partial x) - a_2 \end{pmatrix}.$$

Если теперь воспользоваться известным соотношением для полугруппы (обратным уравнением Колмогорова)  $\partial U_t(z)/\partial t = AU_t(z)$ , то относительно компонент  $U_t(z)$  получим систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\partial u_i/\partial t = \delta_i[w(\partial u_i/\partial x) + a_i(u_2 - u_1)]; \quad i = 1, 2; \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1. \quad (7)$$

Из (7) вытекает, что функции  $\hat{c}_i = (u_1 + \delta_i u_2)/2$  являются решениями уравнения

$$\partial^2 c/\partial t^2 + (a_1 + a_2)(\partial c/\partial t) = w^2(\partial^2 c/\partial x^2) + (a_2 - a_1)w(\partial c/\partial x), \quad (8)$$

причем (1) является частным случаем (8) при  $a_i = (w - \delta_i S)/(2\sigma w)$ ,  $i = 1, 2$ . Понятно, что асимметричность процесса ( $a_1 \neq a_2$ ) приводит к преимущественному движению в одном направлении (дрейфу), а при  $a_1 = a_2 = a$  (8) переходит в (2). Ввиду неотрицательности  $a_1, a_2$  замечаем также, что предлагаемая модель приемлема при  $|S| \leq w$ , что согласуется с физикой процесса.

Можно показать, что первое слагаемое в правой части (6) есть не что иное, как решение задачи Коши (2), (3), а второе — задачи (2), (4). Так как  $(\partial u_i/\partial t)|_{t=0} = \delta_i[w(df_i/dx) + a_i(f_2 - f_1)]$ ,  $i = 1, 2$ , находим, что  $\hat{c}_i(x, 0) = (f_1(x) + \delta_i f_2(x))/2$ ;  $(\partial \hat{c}_i/\partial t)|_{t=0} = (w/2)(d(f_1 - \delta_i f_2)/dx) + (a_1 - \delta_i a_2)(f_2 - f_1)/2$ . Из последних двух соотношений видно, что если  $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ , то

$$\hat{c}_1(x, 0) = f(x), \quad (\partial \hat{c}_1/\partial t)|_{t=0} \equiv 0; \quad (9)$$

$$\hat{c}_2(x, 0) \equiv 0, \quad (\partial \hat{c}_2/\partial t)|_{t=0} = w(df/dx). \quad (10)$$

Понятно, что такие  $\hat{c}_1$  и  $\hat{c}_2$  являются решениями некоторых задач (8), (3) и (8), (4) соответственно. Однако в (9) и (10)  $f(x)$  можно выбирать по-разному. Положим в (9)  $f(x) = \varphi(x)$ , а в (10) —  $w(df/dx) = \psi(x)$ , т. е.

$$f(x) = (1/w) \int_0^x \psi(\tau) d\tau + \text{const}.$$

Тогда получаемая при этом функция  $c(x, t) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2$  будет, как легко видеть, решением задачи (8), (5); ему и придадим искомую вероятностную форму. Пусть  $\tilde{t} = \int_0^t (-1)^{N(\tau, \omega)} d\tau$  — случайное время, соответствующее описанному выше марковскому процессу, здесь  $N(\tau, \omega)$  — скачкообразный процесс Пуассона с переменной интенсивностью, равной  $a_1$  после четного числа скачков и  $a_2$  после нечетного их числа,  $\omega$  — элемент пространства событий (счетного множества состояний). Тогда по определению  $\hat{c}_i(x, t) = (\mathbf{E}_{(x, w)}\{F(z_t)\} + \delta_i \mathbf{E}_{(x, -w)}\{F(z_t)\})/2$ ,  $i = 1, 2$ , откуда при наших выборах  $f(x)$   $\hat{c}_1 = \mathbf{E}\{\varphi(x + \varepsilon w \tilde{t})\}$ ,  $\hat{c}_2 = \mathbf{E}\left\{(\varepsilon/w) \int_0^{x + \varepsilon w \tilde{t}} \psi(\tau) d\tau\right\}$ . Таким образом, формула вероятностного представления решения задачи Коши (8), (5) получается аналогичной (6): в (6) необходимо лишь заменить  $\bar{t}$  на  $\tilde{t}$ .

В заключение отметим, что к полученной формуле можно применять метод Монте-Карло аналогично тому, как это делается в работе авторов [5] (там же описано, как оценивать погрешность). Повышению эффективности такого метода посвящен § 5 работы [6]. Зависимость коэффициентов  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  от времени не является непреодолимым препятствием [7]: нужно воспользоваться результатами [8]–[9] и несколько модифицировать скачкообразный процесс Пуассона. По поводу приложений полученных в настоящей статье результатов мы отсылаем к [10]–[11], рассмотренные же выше математические модели встречались в работах [12]–[14], посвященных некоторым техническим задачам.

## Литература

1. Таганов И.Н. *Моделирование процессов массо- и энергопереноса. Нелинейные системы*. — Л.: Химия, 1979. — 204 с.
2. Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.С. *Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики*. — М.: Наука, 1984. — 208 с.
3. Кац М. *Несколько вероятностных задач физики и математики*. — М.: Наука, 1967. — 176 с.
4. Kisynski J. *On M. Kac's probabilistic formula for the solution of the telegraphist's equations* // *Ann. Polonici Math.* — 1974. — V. 29. — № 3. — P. 259–272.
5. Крючков А.Ф., Сиренек В.А. *О численно-вероятностных методах решения трехмерного гиперболического уравнения диффузии* // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1998. — Т. 38. — № 1. — С. 107–114.
6. Сиренек В.А., Крючков А.Ф. *Вероятностное решение начально-краевой задачи для гиперболического уравнения массопереноса* // *Матем. моделир.* — 1998. — Т. 10. — № 6. — С. 107–117.
7. Сиренек В.А., Крючков А.Ф. *О вероятностном решении гиперболического уравнения массопереноса с конвективным членом* // *Математика в вузе. Тр. межд. научно-метод. конф.* — С.-Петербург: Технологич. ун-т, 1998. — С. 238–239.
8. Kaplan S. *Differential equations in which the Poisson process plays a role* // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1964. — V. 70. — P. 264–268.
9. Coleman W.A. *Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the technique to radiation transport problems* // *Nucl. Sci. and Engng.* — 1968. — V. 32. — P. 78–81.
10. Сиренек В.А., Черемисин В.И., Кузичкин Н.В. *Применение метода Монте-Карло для решения гиперболических моделей гетерогенного катализа* // *Гетерогенные каталитические процессы*. — Л.: ЛТИ им. Ленсовета, — 1986. — С. 27–31.

11. Сиренек В.А., Кузичкин Н.В. *Вероятностное решение гиперболических моделей гетерогенного катализа* // Каталитические процессы и катализаторы. – Л.: ЛТИ им. Ленсовета, 1987. – С. 122–128.
12. Сиренек В.А., Таганов И.Н. *Математическая модель нестационарного выщелачивания стекла* // Физ. и хим. стекла. – 1981. – Т. 7. – № 5. – С. 637–640.
13. Сиренек В.А., Комаров Е.В., Иоффе И.В. *К теории выщелачивания стекла* // Физ. и хим. стекла. – 1984. – Т. 10. – № 1. – С. 106–109.
14. Sirenek V.A., Cholodnov V.A., Taganov I.N. *Mathematische Modellierung des nichtstationären Auslaugens von Glas unter Beachtung der Verzögerung der Diffusionsströme* // Wiss. Zeitschr. TH Leuna-Merseburg. – 1987. – Bd. 29. – № 4. – S. 470–478.

*Санкт-Петербургский государственный  
технологический институт  
(технический университет)*

*Поступили  
первый вариант 08.07.1996  
окончательный вариант 12.11.1999*