



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Марковъ, О распредѣленіи корней
нѣкоторыхъ уравненій,
*Сообщ. и протоколы засѣданій Матем.
общ. при Император. Харьков. унив. 1885
года, 1886, выпуск 2, 89–98*

<https://www.mathnet.ru/khmo372>

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны
с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

19 мая 2025 г., 11:26:47



О РАСПРЕДЪЛЕНІИ КОРНЕЙ
НѢКОТОРЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

А. А. Маркова.

Уравненія, о которыхъ идетъ рѣчь въ настоящей замѣткѣ, получаются при разложеніи въ непрерывную дробь слѣдующей функціи

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(y)}{z-y} dy - \xi \int_c^d \frac{f(y)}{z-y} dy. \quad (1)$$

При этомъ мы предполагаемъ числа a, b, c, d вещественными, а разности $b-a, c-b, d-c$, переменный параметръ ξ и функціи $g(y), f(y)$ положительными (по крайней мѣрѣ для рассматриваемыхъ нами значеній y).

Положимъ вообще

$$\int_a^b y^i g(y) dy = \alpha_i, \quad \int_c^d y^i f(y) dy = \beta_i. \quad (2)$$

Тогда для опредѣленія знаменателя

$$\varphi_n(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_n z^n \quad (3)$$

n -ой дроби $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$, подходящей къ $F(z)$, будемъ имѣть систему уравненій первой степени.

$$\begin{aligned}
 p_0(\alpha_0 - \xi\beta_0) + p_1(\alpha_1 - \xi\beta_1) + \dots + p_n(\alpha_n - \xi\beta_n) &= 0 \\
 p_0(\alpha_1 - \xi\beta_1) + p_1(\alpha_2 - \xi\beta_2) + \dots + p_n(\alpha_{n+1} - \xi\beta_{n+1}) &= 0 \\
 \dots & \\
 p_0(\alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1}) + p_1(\alpha_n - \xi\beta_n) + \dots + p_n(\alpha_{2n-1} - \xi\beta_{2n-1}) &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

которая, вообще говоря, опредѣляетъ отношенія

$$\frac{p_0}{p_n}, \frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_n}.$$

А именно, эти отношенія выражаются дробями съ однимъ и тѣмъ же знаменателемъ, равнымъ цѣлой функціи n -ой степени относительно ξ

$$\Phi_n(\xi) = \begin{vmatrix} \alpha_0 - \xi\beta_0 & , & \alpha_1 - \xi\beta_1, \dots, & \alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1} \\ \alpha_1 - \xi\beta_1 & , & \alpha_2 - \xi\beta_2, \dots, & \alpha_n - \xi\beta_n \\ \dots & & \dots & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1}, & \alpha_n - \xi\beta_n, \dots, & \alpha_{2n-2} - \xi\beta_{2n-2} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Исключеніе представляютъ только тѣ случаи, когда

$$\Phi_n(\xi) = 0.$$

Въ этихъ исключительныхъ случаяхъ можно положить $p_n = 0$ и понизить такимъ образомъ степень цѣлой функціи $\varphi_n(z)$ на единицу.

Для нашей цѣли важно замѣтить, что при

$$\Phi_n(\xi) \neq 0$$

всѣ корни уравненія n -ой степени

$$\varphi_n(z) = 0$$

числа конечныя и потому, при безпредѣльномъ возрастаніи одного изъ корней послѣдняго уравненія, ξ приближается къ одному изъ корней уравненія

$$\Phi_n(\xi) = 0.$$

Вопросъ, которому посвящена эта замѣтка, состоитъ въ опредѣленіи числа корней уравненія

$$\varphi_n(z) = 0,$$

лежащихъ соотвѣтственно въ промежуткахъ отъ $-\infty$ до a , отъ a до b , отъ b до c , отъ c до d , отъ d до $+\infty$.

Рѣшеніе этого вопроса заключается въ нижеслѣдующихъ теоремахъ.

ТЕОРЕМА 1.

Всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

вещественны и различны. Изъ нихъ $n - 1$ навѣрно лежатъ въ предѣлахъ

отъ a до b и отъ c до d ;

въ предѣлахъ же

отъ b до c

ни одного.

Доказательство.

Допустимъ сначала, что

$$\varphi_n(E) = 0 \text{ при } b \leq \varepsilon \leq c.$$

Тогда произведем

$$\varphi_n(z) \frac{\varphi_n(z)}{z - \varepsilon} = \varphi_n(z) \theta(z)$$

число отрицательное при $z < b$ и положительное при $z > c$, и потому

$$\int_a^b g(y) \varphi_n(y) \theta(y) dy - \xi \int_c^d f(y) \varphi_n(y) \theta(y) dy \quad (A)$$

не нуль.

Между тем, согласно уравнениям (4), выражение (A) должно быть равно нулю.

Мы пришли, таким образом, къ противорѣчю, которое ясно указываетъ, что между b и c нѣтъ ни одного корня уравненія $\varphi_n(z) = 0$.

Положимъ теперь, что между a и d функція $\varphi_n(z)$ мѣняетъ свой знакъ ровно m разъ при

$$z = x_1, x_2, \dots, x_m,$$

и составимъ функцію

$$\theta(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_m)(z - \varepsilon),$$

гдѣ ε произвольное число, лежащее между b и c .

Тогда

$$\int_a^b g(y) \varphi_n(y) \theta(y) dy - \xi \int_c^d f(y) \varphi_n(y) \theta(y) dy \quad (B)$$

не нуль.

Между тѣмъ, согласно уравненіямъ (4), выраженіе (B) должно приводиться къ нулю, если только степень функціи $\theta(z)$ меньше n .

Поэтому

$$m + 1 \geq n \text{ и } m > n - 1.$$

Такимъ образомъ теорема наша доказана вполне.

Примѣчаніе 1.

При $\xi = 0$ всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

лежатъ между a и b , такъ какъ тогда функція $F(z)$ обращается въ

$$\int_a^b \frac{g(y)}{z-y} dy.$$

Напротивъ, при $\xi = \infty$ всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

лежатъ между c и d , такъ какъ тогда функція $\frac{-F(z)}{\xi}$ обращается въ

$$\int_c^d \frac{f(y)}{z-y} dy^*.$$

Примѣчаніе 2.

При непрерывномъ измѣненіи ξ число корней уравненія $\varphi_n(z) = 0$, лежащихъ въ какомъ нибудь промежуткѣ, остается неизмѣннымъ

* См., напр., мое разсужденіе «О нѣкоторыхъ приложеніяхъ непрерывныхъ дробей» стр. 22.

до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не достигнетъ одного изъ предѣловъ разсматриваемаго промежутка.

Примѣчаніе 3.

При непрерывномъ измѣненіи ξ число корней уравненія $\varphi_n(z) = 0$, лежащихъ между a и b , остается неизмѣннымъ до тѣхъ поръ, пока $\varphi_n(a)$ не достигнетъ значенія равнаго нулю.

Въ тѣхъ же случаяхъ, когда $\varphi_n(a)$ переходитъ черезъ нуль, упомянутое выше число можетъ измѣняться; однако всякій разъ не болѣе какъ на единицу.

Что же касается промежутка отъ $z = c$ до $z = d$, то число корней уравненія $\varphi_n(z) = 0$, лежащихъ въ этомъ промежуткѣ, можетъ измѣняться только при переходѣ $\varphi_n(d)$ черезъ нуль и также всякій разъ не болѣе какъ на единицу.

Отсюда непосредственно вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема 2.

При возрастаніи ξ отъ 0 до ∞ всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

последовательно переходятъ

черезъ $a, -\infty, +\infty, d$

изъ промежутка (a, b) въ промежутокъ (c, d) .

Поэтому всѣ корни уравненій n -ой степени относительно ξ

$$\varphi_n(a) = 0, \quad \Phi_n(\xi) = 0, \quad \varphi_n(d) = 0$$

вещественны и положительны.

Кромѣ того, если обозначимъ по порядку ихъ величины корни

$$\left. \begin{array}{l} \text{уравненія } \varphi_n(a) = 0 \text{ черезъ } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \text{» } \Phi_n(\xi) = 0 \quad \text{»} \quad \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n \\ \text{» } \varphi_n(d) = 0 \quad \text{»} \quad \xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_n \end{array} \right\} (6)$$

то будемъ имѣть слѣдующія неравенства

$$\xi_1 < \xi'_1 < \xi''_1 < \xi_2 < \xi'_2 < \xi''_2 \dots < \xi_n < \xi'_n < \xi''_n. \quad (7)$$

Наконецъ относительно корней уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

можемъ утверждать, что

- | | | |
|--------------------------------------|-------------|-----------------------------------|
| при $\xi''_i < \xi < \xi_{i+1}$ | $n - i$ | изъ нихъ лежатъ между a и b , |
| | | а остальные i между c и d ; |
| при $\xi_{i+1} < \xi < \xi'_{i+1}$ | $n - i - 1$ | между a и b , |
| | i | » c и d , |
| | одинъ | » $-\infty$ и a ; |
| при $\xi'_{i+1} < \xi < \xi''_{i+1}$ | $n - i - 1$ | между a и b , |
| | i | » c и d , |
| | одинъ | » d и $+\infty$. |

Лемма 1.

$$\Phi_{n+1}(\xi) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_0}{p_n} (\alpha_n - \xi \beta_n) + \frac{p_1}{p_n} (\alpha_{n+1} - \xi \beta_{n+1}) + \dots \\ \dots + \frac{p_{n-1}}{p_n} (\alpha_{2n-1} - \xi \beta_{2n-1}) + \alpha_{2n} - \xi \beta_{2n} \end{array} \right\} \Phi_n(\xi). \quad (8)$$

Эта формула получается на основаніи теоремы о разложеніи опредѣлителя по элементамъ какого нибудь столбца (въ данномъ случаѣ послѣдняго).

Примѣчаніе.

Полагая для удобства

$$p_n = \Phi_n(\xi),$$

можем переписать формулу (8) слѣдующимъ образомъ

$$\Phi_{n+1}(\xi) = \int_a^b g(y) \varphi_n(y) \cdot y^n dy - \xi \int_c^d f(y) \varphi_n(y) \cdot y^n dy. \quad (9)$$

Лемма 2.

При $\varphi_n(a) = 0$ произведение

$$\Phi_n(\xi) \cdot \Phi_{n+1}(\xi)$$

число отрицательное; напротивъ, при $\varphi_n(d) = 0$ тоже произведение число положительное.

Доказательство.

При $\varphi_n(a) = 0$ выражение

$$\frac{\varphi_n(z) \cdot (z-b)}{z-a}$$

представляетъ цѣлую функцию n -ой степени отъ z .

Коэффициентъ при высшей степени z въ этой функции равенъ $\Phi_n(\xi)$.

На этомъ основаніи нетрудно преобразовать равенство (9) въ слѣдующее:

$$\begin{aligned} \Phi_n(\xi) \cdot \Phi_{n+1}(\xi) &= \int_a^b g(y) \varphi_n(y) \frac{\varphi_n(y) \cdot (y-b)}{y-a} dy - \\ &- \xi \int_c^d f(y) \varphi_n(y) \frac{\varphi_n(y) \cdot (y-b)}{y-a} dy, \end{aligned}$$

первая часть котораго, очевидно, число отрицательное, и потому

$$\Phi_n(\xi) \cdot \Phi_{n+1}(\xi) < 0.$$

Подобнымъ же образомъ при $\varphi_n(d) = 0$ получимъ

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n(\xi) \cdot \Phi_{n+1}(\xi) &= \int_a^b g(y) \varphi_n(y) \frac{\varphi_n(y) \cdot (y-b)}{y-d} dy - \\ &- \xi \int_c^d f(y) \varphi_n(y) \frac{\varphi_n(y) \cdot (y-b)}{y-d} dy \end{aligned} \right\} > 0.$$

Слѣдствіе.

Всѣ корни уравненія

$$\Phi_{n+1}(\xi) = 0$$

расположены, по одному, въ слѣдующихъ $n+1$ промежуткахъ:

$$(0, \xi_1), (\xi''_1, \xi_2), (\xi''_2, \xi_3), \dots, (\xi''_{n-1}, \xi_n), (\xi''_n, \infty).$$

Сопоставляя, наконецъ, послѣднее слѣдствіе съ теоремою 2, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

ТЕОРЕМА 3.

Если

$$\xi^0_1, \xi^0_2, \dots, \xi^0_n, \xi^0_{n+1}$$

означаютъ всѣ корни уравненія

$$\Phi_{n+1}(\xi) = 0$$

въ возрастающемъ порядкѣ, то при

$$\xi = \xi^0_k$$

$n-k+1$ корней уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

лежатъ между a и b , а остальные $k-1$ между c и d .

Примѣчаніе.

При рассмотрѣніи выраженій подобныхъ (1) можно придти между прочимъ къ функціямъ Ламэ*.

Отсюда нетрудно видѣть связь между послѣднею нашею теоремою и дополненною г. Ляпуновымъ теоремою** Клейна на счетъ функцій Ламэ.

* *Heine*, «Handbuch der Kugelfunctionen», 1878 (§ 102). — *Сохотскій*, «Объ определенныхъ интегралахъ...», 1873 (глава III).

** *Klein*, «Ueber Lamé'sche Functionen». (Mathematische Annalen. Band XVIII). — *Ляпуновъ*, «Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости». С.-Петербургъ, 1884 (глава IV).