Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

R. S. Gusarova, Stability of the solution of the Cauchy problem for a system of linear partial differential equations,
Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ., 1959, Issue 186, 219–234

https://www.mathnet.ru/eng/uzmu15

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
January 20, 2026, 05:46:06

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ МГУ
Вып. 186, Математика, т. IX

Р. С. ГУСАРОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Введение

В настоящей работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)} a_{ij}^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t)\, u_j, \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\sum\limits_{(k_s)}$ означает суммирование по всем целым $k_s \geqslant 0$, сумма которых больше нуля и не больше некоторого числа M, функции $a_{ij}^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}(t)$, $b_{ij}(t)$ — непрерывные функции действительного аргумента t, $u_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — комплексные функции действительных аргументов t, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, причем $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.

Систему (1) удобно записывать в виде одного матричного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{(k_s)} A^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} U}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} + B(t)\, U, \tag{1'}$$

где U — одноколонная матрица, или вектор, с компонентами $u_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_N(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $A^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}(t)$ и $B(t)$ — квадратные матрицы из коэффициентов

$$a_{ij}^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}(t) \quad \text{и} \quad b_{ij}(t).$$

Известно ([1]), что необходимым и достаточным условием для того, чтобы задача Коши для системы (1) на конечном интервале (t_0, T) при всех действительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ была бы поставлена равномерно корректно, является выполнение „условия A“ И. Г. Петровского.

Целью настоящей работы является нахождение условий непрерывной зависимости решения задачи Коши для системы (1) от начальных условий при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При этом оказывается удобным рассматривать „обобщенные решения“ системы (1),

удовлетворяющие начальным условиям из $L^2(-\infty, \infty)$ и за „меру отклонения“ двух функций брать отклонение в среднем.

§ 1

В дальнейшем под нормой вектора $\Phi(t, x)$ с компонентами $\{\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ будем понимать функцию переменного t, равную $\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n}$, и обозначать $\|\Phi(t, x)\|$. Функция $\Phi(t, x) \in L^2(-\infty, \infty)$ при каждом значении $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, если $\|\Phi(t, x)\| < +\infty$ при любом фиксированном $t \geqslant t_0$. $\Phi(t, x)$ есть предел в среднем равномерно по t для последовательности векторов $\Phi_k(t, x) \in L^2(-\infty, \infty)$, если $\lim\limits_{k \to \infty} \|\Phi - \Phi_k\| = 0$ равномерно относительно t.

Обобщенным решением матричного уравнения (1′) по начальному условию $U(t_0, x) = \Phi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ мы будем называть вектор $U(t, x)$, являющийся пределом в среднем равномерно по t для последовательности векторов $U_k(t, x)$, удовлетворяющих уравнению (1′) и начальным условиям:

$$U_k(t_0, x) = \Phi_k(x), \quad \text{где} \lim_{k \to \infty} \|\Phi_k(x) - \Phi(x)\| = 0.$$

Ниже будет показано, что при выполнении условий теоремы I такое обобщенное решение существует, единственно и не зависит от выбора последовательности $\Phi_k(x)$, сходящейся в среднем к $\Phi(x)$. При этом мы считаем два решения U_1 и U_2 одинаковыми, если $\|U_1 - U_2\| = 0$. Предполагая условия существования и единственности обобщенного решения по начальному условию из $L^2(-\infty, \infty)$ выполненными, дадим следующие определения:

1. Обобщенное решение задачи Коши $U_\varphi(t, x)$ для уравнения (1′) по начальному условию

$$U_\varphi(t_0, x) = \varphi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$$

будем называть устойчивым в среднем при $t \geqslant t_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что как только $\|\varphi - \psi\| < \eta$, так при всех $t \geqslant t_0$ $\|U_\varphi - U_\psi\| < \varepsilon$, где U_ψ — обобщенное решение по начальному условию $U_\psi(t_0, x) = \psi(x)$.

2. Обобщенное решение задачи Коши $U_\varphi(t, x)$ по начальному условию $U_\varphi(t_0, x) = \varphi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ будем называть равномерно устойчивым в среднем, если какое бы ни было $\varepsilon > 0$ и какое бы ни было $t_0 \geqslant 0$, можно указать такое независящее от t_0 число $\eta > 0$, что как только $\|\varphi - \psi\| < \eta$, так $\|U_\varphi - U_\psi\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Эту устойчивость назовем асимптотической, если $\|U_\varphi - U_\psi\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Из линейности уравнения (1′) следует, что все обобщенные решения его по начальным условиям из $L^2(-\infty, \infty)$ одновременно или устойчивы, или неустойчивы, так что, для краткости, мы будем говорить об устойчивости и неустойчивости самого уравнения (1′).

Если рассматривать $U_\varphi(t, x)$ как двухпараметрическое (с параметрами t, t_0) семейство операторов, определенных на линейном пространстве $L^2(-\infty, \infty)$, то, очевидно, что $U_\varphi(t, x)$ при каждой паре значений t, t_0, $(t \geqslant t_0)$ есть аддитивный оператор.

Тогда равномерная устойчивость уравнения (1′) равносильна равномерной по t, t_0 непрерывности семейства операторов $U_\varphi(t, x)$. Но для того, чтобы аддитивный оператор, зависящий от параметров t, t_0, был равномерно по t, t_0 непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был равномерно ограничен. (Доказательство этого утверждения почти дословно совпадает с обычным доказательством теоремы о непрерывности аддитивного оператора.) Итак, верна следующая лемма.

Лемма. *Для равномерной устойчивости в среднем матричного уравнения* (1′) *необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная K такая, что при всех t, t_0 $(t \geqslant t_0)$, $\|U_\varphi(t, x)\| \leqslant K \cdot \|\varphi\|$ для любого вектора $\varphi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$.*

Обозначим через $V^*(t, t_0, \alpha)$ нормальное решение матричного уравнения (см. [1]):

$$\frac{dV}{dt} = \left[\sum_{(k_s)} A^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}(t)(i\alpha_1)^{k_1}(i\alpha_2)^{k_2}\ldots(i\alpha_n)^{k_n} + B(t)\right] V \qquad (1'')$$

(где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — действительные параметры), т. е. решение, для которого $V^*(t_0, t_0, \alpha) = E$, E — единичная матрица.

Под нормой матрицы $A = (a_{ij})$ мы будем понимать величину $\sqrt{\sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}|^2}$ и обозначать $|A|$.

Теорема I (основная). *Для равномерной устойчивости в среднем матричного уравнения (1′) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная C, что*

$$|V^*(t, t_0, \alpha)| < C$$

для всех t_0, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и всех $t \geqslant t_0$. Для того чтобы эта устойчивость была асимптотической, необходимо и достаточно, чтобы $|V^*(t, t_0, \alpha)| \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

§ 2

Покажем сначала, что при выполнении условий теоремы I обобщенные решения по начальным функциям из $L^2(-\infty, \infty)$ существуют.

Пусть $\Phi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, $\Phi(x) = \{\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$, $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L^2(-\infty, \infty)$.

Построим системы гладких функций $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аппроксимирующие в среднем $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. системы функций, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n \to 0$$

при $k \to \infty$. Это можно сделать, например, следующим образом: для каждой функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L^2(-\infty, \infty)$ можно построить такую последовательность функций $\varphi_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, каждая из которых непрерывна и обращается в нуль вне некоторого куба Q_{a_k}, определяемого неравенствами $|x_i| \leqslant a_k$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{i1}, (x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n \to 0$$

при $k \to +\infty$.

Каждую из функций $\varphi_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности гладкими функциями $\varphi_{ik}^{(l)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда система гладких функций $\varphi_{ik}^{(l)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет аппроксимировать в среднем функцию $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Поставим следующие задачи Коши для системы (1): найти решения (в классическом смысле) системы (1), удовлетворяющие начальным условиям:

$$u_i^k(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Если нормальное решение $V^*(t, t_0, \alpha)$ матричного уравнения (1″) удовлетворяет „условию А“ И. Г. Петровского, т. е. $|V^*(t, t_0, \alpha)| < c_1(1+\alpha_M)^p$ (равномерно по t_0) при всех $t \geqslant t_0$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, где c_1 и p — положительные постоянные, $\alpha_M = \max\limits_i \{|\alpha_i|\}$, то, как известно, ([1]), решения поставленных задач Коши при всех $\{x_i\}$ и $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ даются функциями

$$u_i^k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{N} E_{\varphi_l^k}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \times$$
$$\times v_i^l(t, t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}\, d\alpha_1 d\alpha_2, \ldots d\alpha_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N;\ k = 1, 2, \ldots),$$

где v_i^l — элементы матрицы V^*,

$$E_{\varphi_l^k}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{Q_{a_k}} \varphi_l^k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-i\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

По условию теоремы I $|V^*(t, t_0, \alpha)| < C$, т. е. $p = 0$. Покажем, что тогда последовательность решений

$$U^k(t, x) = \{u_i^k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

имеет предел в среднем равномерно по t при $k \to \infty$, равный

$$U(t, x) = \{u_i(t_1, x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$
$$u_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{N} E_{\varphi_l}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, v_i^l(t, t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \times$$
$$\times e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}\, d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\varphi(x) = \{\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ есть предел в среднем векторов $\varphi^{(k)}(x) = \{\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ при $k \to \infty$.

В самом деле, вектор $U(t, x) \in L^2(-\infty, \infty)$, так как его компоненты суть суммы преобразований Фурье функций

$$E_{\varphi_l}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, v_i^l(t, t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L^2(-\infty, \infty).$$

Оценим $\| U(t, x) - U^k(t, x) \|$ при $k \to \infty$.

$$\int \cdots \int | u_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) - u_i^k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) |^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int \cdots \int \left| \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \cdots \int \sum_{l=1}^{N} \left(E_{\varphi_l} - E_{\varphi_l^{(k)}} \right) v_i^l(t, t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) e^{i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} \times \right.$$

$$\left. \times d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \right|^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int \cdots \int \left| \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \cdots \int \left(E_{\varphi_l} - E_{\varphi_l^{(k)}} \right) v_i^l(t, t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) e^{i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} \times \right.$$

$$\left. \times d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \right|^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant N \int \cdots \int \sum_{l=1}^{N} \left| \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \cdots \int \left(E_{\varphi_l} - E_{\varphi_l^{(k)}} \right) v_i^l(t, t_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n) \times \right.$$

$$\left. \times e^{i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \right|^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$\left(\text{в силу элементарного неравенства} \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i| \right)^2 \leqslant N \sum_{i=1}^{N} |a_i|^2 \right)$.

Таким образом

$$\int \cdots \int | u_i - u_i^k |^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant N \sum_{l=1}^{N} \int \cdots \int \left| \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \cdots \int \left(E_{\varphi_l} - E_{\varphi_l^{(k)}} \right) v_i^l(t, t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) e^{i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} \times \right.$$

$$\left. \times d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \right|^2 dx_1 dx_2 dx_n .$$

Все интегралы под знаком $\sum_{l=1}^{N}$ по теореме Парсеваля равны

$$\int \cdots \int \left| \left(E_{\varphi_l} - E_{\varphi_{(l)}^{(k)}} \right) v_i^l(t, t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \int \cdots \int \left| E_{\varphi_l} - E_{\varphi_l^{(k)}} \right|^2 d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n =$$

$$= C^2 \int \cdots \int | \varphi_l - \varphi_l^{(k)} |^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n .$$

Поэтому

$$\int \cdots \int |u_i - u_i^k|^2 dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$
$$\leqslant C^2 \cdot N \cdot \sum_{l=1}^{N} \int \cdots \int |\varphi_l - \varphi_l^k|^2 dx_1 \ldots dx$$

и

$$\| U(t, x) - U^k(t, x) \|^2 = \sum_{i=1}^{N} \int \cdots \int |u_i - u_i^k|^2 dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} C^2 N \sum_{l=1}^{N} |\varphi_l - \varphi_l^{(k)}|^2 dx_1 \ldots dx_n = C^2 N^2 \| \varphi - \varphi^{(k)} \|^2.$$

Итак,

$$\| U(t, x) - U^k(t, x) \| \leqslant C \cdot N \cdot \| \varphi - \varphi^{(k)} \|. \tag{2}$$

Но по условию $\|\varphi - \varphi^{(k)}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\| U - U^k \| \to 0$ равномерно по t при $k \to \infty$. Таким образом, вектор $U(t, x)$ с компонентами

$$u_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \cdots \int \sum_{l=1}^{N} E_{\varphi_l}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \times$$
$$\times v_i^l(t, t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) e^{i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

является обобщенным решением матричного уравнения (1′) по начальному условию

$$U(t_0, x) = \varphi(x) \in L^2(-\infty, \infty).$$

Единственность такого решения следует из того, что решения $U^k(t, x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие гладким начальным условиям $\varphi^{(k)}(x)$, согласно ([1]), единственны. Кроме того, оценка (2) показывает, что обобщенное решение не зависит от выбора последовательности $\varphi^{(k)}(x)$, сходящейся в среднем к $\varphi(x)$.

Действительно, пусть $\overline{\varphi}^{(k)}(x)$ — другая последовательность векторов, сходящихся в среднем к $\varphi(x)$, и $\overline{U}(t, x)$ есть предел в среднем векторов $\overline{U}^{(k)}(t, x)$, где $\overline{U}^k(t, x)$ — решения, удовлетворяющие начальным данным: $\overline{U}^k(t_0, x) = \overline{\varphi}^{(k)}(x)$.
Тогда

$$\| U(t, x) - \overline{U}(t, x) \| \leqslant \| U(t, x) - U^k(t, x) \| +$$
$$+ \| U^k(t, x) - \overline{U}^k(t, x) \| + \| \overline{U}^k(t, x) - \overline{U}(t, x) \| \leqslant$$
$$\leqslant CN \| \varphi - \varphi^{(k)} \| + C \cdot N \| \varphi^{(k)} - \overline{\varphi}^{(k)} \| + C \cdot N \cdot \| \overline{\varphi}^{(k)} - \overline{\varphi} \|.$$

Правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$, а левая часть от k не зависит; следовательно,

$$\| U(t, x) - \overline{U}(t, x) \| = 0.$$

Из оценки (2) следует также достаточность условия первой части теоремы 1. В самом деле, оценка (2) показывает, что для любого обобщенного решения $U(t, x)$ имеет место неравенство

$$\| U(t_0, x) \| \leqslant C \cdot N \cdot \| \varphi \|,$$

если $U(t_0, x) = \varphi(x)$, что в силу леммы означает равномерную устойчивость уравнения (1′).

Для доказательства достаточности условия второй части теоремы обозначим $\sup\limits_{\alpha} |V^*(t, t_0, \alpha)|$ при каждом фиксированном значении t через $C(t, t_0)$. По условию $C(t, t_0) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда аналогично предыдущему мы можем написать:

$$\|U_\varphi(t, x)\| \leqslant N \cdot C(t, t_0) \cdot \|\varphi\|.$$

Отсюда, в силу аддитивности оператора $U_\varphi(t, x)$, получается следующее неравенство:

$$\|U_\varphi - U_\psi\| \leqslant C(t, t_0) N \|\varphi - \psi\|, \tag{3}$$

из которого следует асимптотическая устойчивость уравнения (1′).

Следствие. *Неравенство* (3) *показывает, что при выполнении условия второй части теоремы* I *любое обобщенное решение по начальному условию из* $L^2(-\infty, \infty)$ *стремится в среднем к нулю.*

§ 3

Докажем теперь необходимость условий теоремы I.

Допустим, что условие первой части теоремы I не выполнено. Это значит, что, какое бы большое число C мы ни взяли, найдутся такие t_0, t_1 и $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n) = \bar{\alpha}$, что $|V^*(t_1, t_0, \bar{\alpha})| > C$. Тогда хотя бы для одного элемента матрицы $V^*(t_1, t_0, \bar{\alpha})$, скажем с номером i_0, l_0, справедливо неравенство:

$$|v_{i_0}^{l_0}(t_1, t_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)| > \frac{C}{N}.$$

В силу непрерывной зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения (1″) от параметров найдется такая окрестность Ω точки $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ в пространстве параметров, что $|v_{i_0}^{l_0}(t, t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)| > \frac{C}{N}$ для всех $\alpha \in \Omega$ и $t \in [t_1 - \gamma, t_1 + \gamma]$, где γ — некоторое положительное число.

Рассмотрим следующую задачу Коши для системы уравнения (1).

Найти решение системы (1) при начальных условиях:

$$u_{l_0}(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$u_i(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0, \quad i \neq l_0,$$

где функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ достаточно гладкая функция, преобразование Фурье которой

$$E_\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-i\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} dx_1, \ldots dx_n$$

отлично от нуля только в области Ω. Это, очевидно, можно сделать, так как для этого достаточно взять гладкую функцию $E_\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, отличную от нуля только в области Ω, и по ней построить функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Тогда решение поставленной задачи Коши будет даваться функциями

$$u_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\Omega} E_\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, v_{i_0}^{l_0}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Оценим

$$\| U(t, x) \|^2 = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} | u_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) |^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} | u_{l_0}(t, x_1, x_2 \ldots x_n) |^2 dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} | E_\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, v_{i_0}^{l_0}(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

(в силу теоремы Парсеваля). Следовательно, при $t \in [t_1 - \gamma, t_1 + \gamma]$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} | u_{l_0}(t, x_1, \ldots, x_n) |^2 dx_1 \ldots dx_n >$$

$$> \frac{C^2}{N^2} \int\limits_{\Omega} | E_\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n =$$

$$= \frac{C^2}{N^4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} | \varphi(x_1, \ldots, x_n) |^2 dx_1 \ldots dx_n.$$

Тогда

$$\| U(t, x) \|^2 = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} | u_i(t, x_1, \ldots, x_n) |^2 dx_1 \ldots dx_n \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C^2}{N^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} | \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) |^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Обозначим через $\Phi(x)$ вектор с компонентами $(0, 0, \ldots, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), 0, \ldots, 0)$; тогда

$$\| \Phi(x) \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} | \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) |^2 dx_1, \ldots, dx_n.$$

Поэтому

$$U(t, x) \|^2 \geqslant \frac{C^2}{N^2} \| \Phi(x) \|^2,$$

или

$$\| U(t, x) \| \geqslant \frac{C}{N} \| \Phi(x) \|.$$

По предположению, число C может быть как угодно большим, откуда в силу леммы следует, что уравнение (1′) неустойчиво, что доказывает необходимость условия первой части теоремы.

Докажем необходимость условия второй части теоремы I. Допустим, что это условие не выполнено. Это означает, что существует

последовательность значений $t, t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, и последовательность векторов $\vec{\alpha}_k = \{\alpha_i^k\}$, для которых

$$\left| V^* (t_k, t_0, \vec{\alpha}_k) \right| > c_1,$$

где c_1 — некоторое фиксированное положительное число. Тогда для каждого номера k хотя бы один элемент матрицы $V^* (t_k, t_0, \vec{\alpha}_k)$, скажем элемент $v_{i_k}^{l_k}$, удовлетворяет неравенству:

$$\left| v_{i_k}^{l_k} (t_k, t_0, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_n^k) \right| > \frac{c_1}{N}.$$

Так как $1 \leqslant i_k, l_k \leqslant n$, а $k \to +\infty$, то среди элементов $v_{i_k}^{l_k}$ есть хотя бы один, пусть $v_{i_1}^{l_1}$, который для бесчисленного множества значений k_1 удовлетворяет неравенству

$$\left| v_{i_1}^{l_1} (t_{k_1}, t_0, \alpha_1^{k_1}, \alpha_2^{k_1}, \ldots, \alpha_n^{k_1}) \right| > \frac{c_1}{N}.$$

В силу непрерывной зависимости решения системы (1) от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ для каждого k_1 существует такая окрестность Ω_{k_1} точки $(\alpha_1^{k_1}, \alpha_2^{k_1}, \ldots, \alpha_n^{k_1})$ в пространстве параметров, что

$$\left| v_{i_1}^{l_1} (t_{k_1}, t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \right| > \frac{c_1}{N}$$

для всех точек $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \Omega_{k_1}$. При этом, очевидно, что можно взять Ω_{k_1} так, чтобы $\operatorname{mes} \Omega_{k_1} < \frac{1}{k_1^2}$.

Пусть

$$\Omega = \sum_{k_1} \Omega_{k_1}; \quad \operatorname{mes} \Omega < +\infty.$$

Построим гладкую функцию $E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, равную нулю всюду, кроме множества Ω, причем $|E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)| < 1$. Функцию, преобразованием Фурье которой является $E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, обозначим $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим следующую задачу Коши для системы (1):

найти решение системы (1) при начальных условиях:

$$u_{l_1}(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$
$$u_i(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \quad \text{для} \quad i \neq l_1.$$

Тогда, аналогично тому, как это делалось в доказательстве необходимости условия первой части теоремы I, мы получим, что решение $U(t, x) = \{u_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ u_2(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_N(t, x_1, \ldots, x_n)\}$ этой задачи Коши удовлетворяет неравенству

$$\| U(t_{k_1}, x) \| > \frac{c_1}{N} \| \Phi(x) \|,$$

где $\Phi(x)$ — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме компоненты с номером l_1, равной $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Так как $t_{k_1} \to +\infty$ при $k_1 \to +\infty$, то нулевое решение системы (1) не может быть асимптотически устойчивым, что доказывает необходимость условия второй части теоремы I. Таким образом теорема доказана полностью.

§ 4

Применим теорему I к рассмотрению гиперболических систем с постоянными коэффициентами с двумя независимыми переменными t и x. Такие системы, как известно, могут быть приведены к следующему каноническому виду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

или в матричной записи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A \frac{\partial U}{\partial x} + BU, \tag{4}$$

где A — диагональная матрица с действительными элементами. Соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение запишется в виде

$$\frac{dV}{dt} = (i\alpha A + B)\, V. \tag{4'}$$

Нормальным решением этого матричного уравнения является матрица

$$V^* (t, t_0, \alpha) = e^{(i\alpha A + B)(t - t_0)}.$$

Если $AB = BA$, т. е. матрицы A и B перестановочны, то

$$V^* (t, t_0, \alpha) = e^{i\alpha A (t - t_0)} \cdot e^{B(t - t_0)};$$

но A — диагональная матрица, поэтому $| e^{i\alpha A (t - t_0)} | \leqslant N$, ибо

$$e^{i\alpha A (t - t_0)} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha a_1 (t - t_0)} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & e^{i\alpha a_2 (t - t_0)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & e^{i\alpha a_N (t - t_0)} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $| V^* (t, t_0, \alpha) | \leqslant N \cdot | e^{B (t - t_0)} |$. Матрица $e^{B (t - t_0)}$ представляет собой нормальное решение уравнения

$$\frac{dV}{dt} = BV \tag{4_0}$$

и ограниченность ее нормы (или равномерное стремление ее к нулю) равносильна устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову решений уравнения (4_0). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если $AB = BA$, то уравнение* (4) *равномерно (асимптотически) устойчиво в среднем тогда и только тогда, когда обыкновенное дифференциальное уравнение* (4_0) *устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову.*

В общем случае, когда $AB \neq BA$, положим $C = i\alpha A + B$. Тогда симметрическая часть матрицы C, т. е. $C_s = \frac{C + C^*}{2}$, равна $B_s = \frac{B + B^*}{2}$. Обозначим через m и M наименьшее и наибольшее собственные значения эрмитовой матрицы B_s. Тогда норма нормального решения уравнения (4′) удовлетворяет неравенствам (см. [2])

$$Ne^{m (t - t_0)} \leqslant | V^* (t, t_0, \alpha) | \leqslant Ne^{M (t - t_0)}.$$

Отсюда сразу следует следующее предложение:

Теорема 2. *Если уравнение* $\frac{dV}{dt} = B_s V$ *устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, то уравнение* (4) *равномерно (асимптотически) устойчиво в среднем.*

Необходимым условием равномерной (асимптотической) устойчивости в среднем уравнения (4) является устойчивость (асимптотическая устойчивость) по Ляпунову уравнения (4_0). Если матрица B симметрическая, то $B_s = B$, и устойчивость (асимптотическая устойчивость) по Ляпунову уравнения (4_0) является, в силу теоремы 2, необходимым и достаточным условием равномерной (асимптотической) устойчивости в среднем уравнения (4). В случае же несимметрической матрицы устойчивость по Ляпунову уравнения $\frac{dV}{dt} = B_s V$, как показывают примеры, не является необходимым условием устойчивости в среднем уравнения (4).

Пусть теперь в уравнении (4) $A = A(t)$ и $B = B(t)$, т. е. уравнение (4) имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A(t)\frac{\partial U}{\partial x} + B(t)U, \tag{5}$$

где $A(t)$ — диагональная матрица.

Сохраняя прежние обозначения, мы получим, что симметрическая часть матрицы $C(t) = i\alpha A(t) + B(t)$ равна симметрической части матрицы $B(t)$, т. е. $\frac{B(t) + B^*(t)}{2} = B_s(t)$. Обозначая $m(t)$ и $M(t)$ наименьшее и наибольшее (при каждом значении t) собственные значения симметрической матрицы $B_s(t)$, мы получим, что

$$Ne^{\int_{t_0}^{t} m(\tau)\,d\tau} \leqslant |V^*(t, t_0, \alpha)| \leqslant Ne^{\int_{t_0}^{t} M(\tau)\,d\tau}$$

(см. [2]), откуда следует предложение.

Теорема 3. *Если* $\int_{t_0}^{t} M(\tau)\,d\tau$ *ограничен при* $t \to +\infty$, *то уравнение* (5) *равномерно устойчиво в среднем.*

Следствие 1. *Если* $M(t) < -\delta$, $\delta > 0$, *то уравнение* (5) *асимптотически устойчиво в среднем.*

Следствие 2. *Если* $\int_{t_0}^{t} |B_s(\tau)|\,d\tau$ *ограничен при* $t \to +\infty$, *то уравнение* (5) *равномерно устойчиво в среднем.*

В самом деле,

$$M(t) = \max \frac{B_s(t)(x, x)}{|x|^2},$$

где $B_s(t)(x, x)$ — квадратичная форма с матрицей $B_s(t)$ (см. например, [3]). Но

$$|B_s(t)(x, x)| \leqslant |B_s(t)|\,|x|^2.$$

Поэтому

$$M(t) \leqslant |B_s(t)|,$$

$$\int_{t_0}^{t} M(\tau)\,d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} |B_s(\tau)|\,d\tau.$$

Следствие 3. *Если все* $\int_{t_0}^{t} |b_{ij}(\tau)|\, d\tau$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ *ограничены при* $t \to +\infty$, *то уравнение* (5) *равномерно устойчиво в среднем.*

Мы видели, что поведение решения задачи Коши при $t \to +\infty$ для систем рассматриваемого вида в основном зависит от свойств матрицы B.

Докажем теперь следующее предложение.

Теорема 4. *Любую гиперболическую систему вида* (5) *с епрерывными ограниченными при* $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ *коэффициентами можно сделать асимптотически устойчивой в среднем изменением лишь (если необходимо) диагональных элементов матрицы* $B(t)$.

В самом деле, обозначим $\sup\limits_{i,\, t \geqslant t_0} \lambda_i(t) = b$, где $\lambda_i(t)$ собственные значения симметрической матрицы $B_S(t)$ ($b < +\infty$, так как по условию теоремы матрица $B(t)$ непрерывна и ограничена при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$).

Собственные значения симметрической части матрицы

$$B_1(t) = B - (b + \delta) E, \quad \delta > 0,$$

E — единичная матрица, равны $\lambda_i(t) - b - \delta$, а потому меньше или равны $-\delta$. Тогда, по следствию 1 из теоремы 3, асимптотически устойчиво в среднем уравнение $\frac{\partial U}{\partial t} = A(t) \frac{\partial U}{\partial x} + B_1(t) U$, которое получается из уравнения (5) изменением лишь диагональных элементов матрицы $B(t)$.

§ 5

Исследуем теперь с помощью теоремы I устойчивость в среднем некоторых параболических систем уравнений с частными производными. По определению И. Г. Петровского, система (1) называется параболической при всех значениях $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, если при всех α_k, у которых $\alpha^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$, действительные части собственных значений матрицы

$$\sum_{(k_s)\, M} A^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}(t)\, (i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} - \lambda E$$

(где $\sum\limits_{(k_s)\, M}$ означает суммирование по всем целым k_s, сумма которых в точности равна M *) остаются меньше некоторой отрицательной постоянной $-\delta$ при всех значениях $t \geqslant t_0$.

Сначала рассмотрим параболическую систему без членов младших порядков. Такая система в матричной записи имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{(k_s)\, 2m} A^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \frac{\partial^{2m} U}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}. \tag{6}$$

Пусть $A^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}$ — постоянные матрицы. Обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующее матричному уравнению (6), для $\alpha \neq 0$ может быть записано в виде:

$$\frac{dV}{dt} = \left[\alpha^{2m} \sum_{(k_s)\, 2m} A^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \left(i \frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^{k_1} \left(i \frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^{k_2} \ldots \left(i \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)^{k_n} \right] V \tag{6'}$$

---

* Для параболических систем M четно (см. [1]).

или

$$\frac{dV}{dt}=\alpha^{2m}C\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\frac{\alpha_2}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)V.$$

По условию параболичности уравнения (6) действительные части собственных значений матрицы $C\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\frac{\alpha_2}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)$ при всех действительных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ меньше $-\delta$.

Правая часть уравнения (6) не зависит явно от t. Поэтому условие теоремы I будет выполнено, если норма $V^*(t, 0, \alpha)$ равномерно по α ограничена при $t \geqslant 0$. Матрица $V^*\left(\frac{\tau}{\alpha^{2m}}, 0, \alpha\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dV}{d\tau}=C\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\frac{\alpha_2}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right),\ \text{где}\ t=\frac{\tau}{\alpha^{2m}} \tag{7}$$

с ограниченной по норме матрицей $C\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\frac{\alpha_2}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)$. Известно [1], что существует линейное преобразование $W=T(\alpha)V$, приводящее уравнение (7) к виду

$$\frac{dW}{d\tau}=T^{-1}(\alpha)CT(\alpha)W=\widetilde{C}W, \tag{7'}$$

где $\widetilde{C}=\{\widetilde{c}_{ij}\}$ — треугольная матрица, по диагонали которой стоят собственные значения $\lambda_i(\alpha)$ матрицы $C\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\frac{\alpha_2}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)$, $\operatorname{Reel}\lambda_i(\alpha)\leqslant-\delta$, $|\widetilde{c}_{ij}|\leqslant\frac{\delta}{2N}$ при $i\neq j$; модуль детерминанта $T(\alpha)$ заключен между двумя положительными постоянными m_0 и M_0, а модули элементов $T(\alpha)$ не больше M_0.

Обозначим TV^* через W^*. Тогда $W^*(0, 0, \alpha)=T(\alpha)$. Из записи матричного уравнения (7′) в развернутом виде

$$\frac{dw_i}{d\tau}=\lambda_i(\alpha)\,w_i+\sum_{k=1}^{i-1}\widetilde{c}_{ik}(\alpha)\,w_k$$

видно, что

$$\overline{w}_i\,w_i'=\lambda_i(\alpha)\,w_i\overline{w}_i+\sum_{k=1}^{i-1}\widetilde{c}_{ik}(\alpha)\,w_k\overline{w}_i,$$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}|w_i|^2-\operatorname{Reel}\lambda_i(\alpha)\,|w_i|^2\right|\leqslant\sum_{k=1}^{i-1}|\widetilde{c}_{ik}(\alpha)|\,|w_k|\,|w_i|,$$

так как

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}|w_i|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\overline{w}_iw_i)=\frac{\overline{w}_iw_i'+w_i\overline{w}_i'}{2}=\operatorname{Reel}(\overline{w}_iw_i').$$

Поэтому

$$\frac{d}{d\tau}|w_i|^2\leqslant-2\delta|w_i|^2+\frac{\delta}{N}|w_i|\sum_{k=1}^{i-1}|w_k|\leqslant$$

$$\leqslant-2\delta|w_i|^2+\frac{\delta}{N}|w_i|\sum_{k=1}^{N}|w_k|.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{d\tau}\left(\sum_{i=1}^{N}|w_i|^2\right)\leqslant -2\delta\sum_{i=1}^{N}|w_i|^2+\frac{\delta}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|w_k|\right)^2\leqslant -\delta\sum_{i=1}^{N}|w_i|^2$$

(в силу элементарного неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{N}|w_k|\right)^2\leqslant N\cdot\sum_{k=1}^{N}|w_i|^2).$$

Итак, для каждого столбца матрицы W^* справедливо неравенство:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\sum_{i=1}^{N}|w_i|^2\right)\leqslant -\delta\cdot\sum_{i=1}^{N}|w_i|^2.$$

Следовательно, и для нормы W^* справедливо это же неравенство, т. е.

$$\frac{d}{d\tau}|W^*|^2\leqslant -\delta\cdot|W^*|^2.$$

Отсюда

$$\left|W^*\left(\frac{\tau}{\alpha^{2m}},\ 0,\ \alpha\right)\right|\leqslant|T(\alpha)|e^{-\delta\tau}.$$

Тогда неравенство

$$\left|V^*\left(\frac{\tau}{\alpha^{2m}},\ 0,\ \alpha\right)\right|=|T^{-1}(\alpha)\,W^*|\leqslant|T^{-1}|\cdot|T|\,e^{-\delta\tau}$$

доказывает равномерную по α ограниченность нормы $V^*\left(\frac{\tau}{\alpha^{2m}},\ 0,\ \alpha\right)$ при $\alpha\neq 0$. Следовательно, и норма $V^*(t,\ 0,\ \alpha)$ при $\alpha\neq 0$ равномерно по α ограничена при $t\geqslant 0$. При $\alpha=0$ уравнение (6′) переходит в уравнение $\frac{dV}{dt}=0$, нормальным решением которого является $V^*=E$.

Итак, для систем рассматриваемого вида всегда выполнено условие теоремы I, и поэтому имеет место следующее предложение.

Теорема 5. *Параболическая система с постоянными коэффициентами без членов младших порядков равномерно устойчива в среднем.*

Рассмотрим теперь общую параболическую систему с постоянными коэффициентами, которую для дальнейшего удобно записывать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\sum_{(k_s)\,2m}A_0^{(k_1,\,k_2,\ldots,\,k_n)}\frac{\partial^{2m}U}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}+$$

$$+\sum_{(k_s)\,2m-1}A_1^{(k_1,\,k_2,\ldots,\,k_n)}\frac{\partial^{2m-1}U}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}+\ldots+\sum_{(k)}A_{2m-1}^{(k)}\frac{\partial U}{\partial x_k}+BU. \qquad (8)$$

Тогда соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений при $\alpha\neq 0$ в матричной форме примет вид

$$\frac{dV}{dt}=(C_0\alpha^{2m}+C_1\alpha^{2m-1}+\ldots+C_{2m-1}\alpha+B)\,V=C(\alpha)\,V, \qquad (8')$$

где

$$C_0=\sum_{(k_s)\,2m}A_0^{(k_1,\,k_2,\ldots,\,k_n)}\left(i\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^{k_1}\ldots\left(i\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)^{k_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_l = \sum_{(k_s)\,2m-l} A_l^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \left(i\,\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^{k_1} \ldots \left(i\,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)^{k_n}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, 2m-1).$$

Теорема 6. *Произвольная параболическая система с постоянными коэффициентами вида* (8) *может быть сделана асимптотически устойчивой в среднем изменением лишь* (*в случае необходимости*) *диагональных элементов матрицы* B.

Доказательство. Напишем характеристическое уравнение для уравнения (8′)

$$\det\left\{\alpha^{2m}\left(C_0 + \frac{C_1}{\alpha} + \ldots + \frac{C_{2m-1}}{\alpha^{2m-1}} + \frac{B}{\alpha^{2m}}\right) - \lambda E\right\} = 0$$

или

$$\det\left\{C_0 + \frac{C_1}{\alpha} + \ldots + \frac{C_{2m-1}}{\alpha^{2m-1}} + \frac{B}{\alpha^{2m}} - \frac{\lambda}{\alpha^{2m}} E\right\} = 0.$$

Обозначим $\frac{\lambda_i}{\alpha^{2m}} = \lambda_i'$, где λ_i — корни характеристического уравнения. При больших значениях α λ_i' близки к собственным значениям матрицы C_0, ибо матрицы

$$\frac{C_1}{\alpha}, \frac{C_2}{\alpha}, \ldots, \frac{C_{2m-1}}{\alpha^{2m-1}}, \frac{B}{\alpha^{2m}}$$

малы.

В силу параболичности уравнения (8) действительные части собственных значений матрицы C_0 не превосходят $-\delta$, $\delta > 0$, при всех значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Поэтому существует такая постоянная $R > 0$, что при $\alpha > R$ $\operatorname{Re}\operatorname{el}\lambda_i' < -\delta_1$, $\delta_1 > 0$.

Покажем, что при $\alpha > R$ нормальное решение $V^*(t, 0, \alpha)$ уравнения (8′) равномерно по α ограничено по норме при $t \geqslant 0$. Матрица $V^*\left(\frac{\tau}{\alpha^{2m}}, 0, \alpha\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dV}{d\tau} = \left(C_0 + \frac{C_1}{\alpha}, + \ldots + \frac{C_{2m-1}}{\alpha^{2m-1}} + \frac{B}{\alpha^{2m}}\right) V, \tag{9}$$

в правой части которого стоит ограниченная по норме матрица, ибо при $\alpha > R$

$$\left|C_0 + \frac{C_1}{\alpha} + \ldots + \frac{B}{\alpha^{2m}}\right| \leqslant |C_0| + \frac{1}{R}|C_1| + \ldots + \frac{1}{R^{2m}}|B|.$$

Кроме того, действительные части собственных значений этой матрицы не превосходят $-\delta_1$, $\delta_1 > 0$. Поэтому к уравнению (9) применимы все те рассуждения, которыми мы пользовались при доказательстве теоремы 5 относительно уравнения (7), что и доказывает справедливость нашего утверждения.

Обозначим $\sup\limits_{i=1,2,\ldots,N} \{\sup\limits_{\alpha \leqslant R} \widetilde{\lambda}_i(\alpha)\}$ через b, где $\widetilde{\lambda}_i(\alpha)$ — собственные значения эрмитовой матрицы.

$$C_s(\alpha) = \frac{c(\alpha) + c^*(\alpha)}{2}.$$

Тогда матрица $C_s(\alpha) - (b + \delta_2)E$, $\delta_2 > 0$, имеет собственные значения $\widetilde{\lambda}_i(\alpha) - b - \delta_2$, не превосходящие $-\delta_2$ при всех значениях α_1,

$\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, у которых $\alpha^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leqslant R^2$. Поэтому нормальное решение $\overline{V}^*(t, 0, \alpha)$ уравнения

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = [c(\alpha) - (b + \delta_2) E] \overline{V} \tag{10}$$

при $\alpha \leqslant R$ по норме стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Но $|\overline{V}^*(t, 0, \alpha)|$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и при $\alpha > R$, ибо при $\alpha > R$ нормальное решение $V^*(t, 0, \alpha)$ уравнения (8′) по норме равномерно по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ограничено, а уравнение (10) получается из уравнения (8′) заменой

$$\overline{V} = Ve^{-(b+\delta_2)t}.$$

Таким образом, для уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{(k_s)\, 2m} A_0^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \frac{\partial^{2m} U}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \ldots + \sum_{(k)} A_{2m-1}^{(k)} \frac{\partial U}{\partial x_k} + \\ + (B - (b + \delta_2) E) U,$$

получающегося из уравнения (8) изменением лишь диагональных элементов матрицы B, выполнено условие второй части теоремы I, а потому это уравнение асимптотически устойчиво в среднем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровский И. Г. О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюллетень МГУ, **1**, вып. 7, 1938.

[2] Ważewski T. Sur la limitation des intégrales des systèmes d'équations differentielles linéaires ordinaires. Studia Math., X, 48—59, 1948.

[3] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М, 1953 г.

Статья поступила в редакцию 4. XI 1954 г.