С. А. Айсагалиев, К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем, *Дифференц. уравнения*, 1994, том 30, номер 5, 748–757

МАЙ 1994 г., ТОМ 30, № 5

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

С. А. АЙСАГАЛИЕВ

К ТЕОРИИ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Уравнение движения регулируемой системы имеет вид

$$\dot{x}=A_1x+B_1\bar{\varphi}(\sigma, t),\ \sigma=Sx,\ x(0)=x_0,\ t\geqslant 0, \tag{1}$$

$$0\leqslant\bar{\varphi}_i(\sigma_i, t)\sigma_i\leqslant\bar{\mu}_{0i}\sigma_i^2,\ \bar{\mu}_{0i}=\mathrm{const}>0,\ i=\overline{1, m}, \tag{2}$$

$$\bar{\varphi}(\sigma, t)=(\bar{\varphi}_1(\sigma_1, t), \ldots, \bar{\varphi}_m(\sigma_m, t)),\ \bar{\varphi}(0, t)\equiv 0,\ t\geqslant 0, \tag{3}$$

где A_1, B_1, S — постоянные матрицы порядков $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$ соответственно, $\bar{\varphi}_i(\sigma_i, t)$, $i=\overline{1, m}$, — непрерывные функции по σ_i и t. Тривиальное решение системы (1)—(3) называется абсолютно устойчивым, если: 1) для малых начальных отклонений решения системы (1)—(3) асимптотически устойчивы при всех $0\leqslant\mu_{0i}\leqslant\bar{\mu}_{0i}$, $\bar{\varphi}_i(\sigma_i, t)=\mu_{0i}\sigma_i$, $i=\overline{1, m}$; 2) все решения системы (1) обладают свойством $\lim x(t;0, x_0)=0$, $t\to\infty$, $\forall x_0$, $x_0\in E^n$, $|x_0|<\infty$ при всех $\bar{\varphi}(\sigma, t)$, удовлетворяющих условиям (2), (3).

В теории абсолютной устойчивости регулируемых систем известны два критерия: «разрешающие уравнения Лурье» [1], частотный критерий [2], при выполнении которых тривиальное решение системы (1)—(3) абсолютно устойчиво. Связь между ними установлена в [3], где показано, что выполнение частотного критерия является гарантией разрешимости уравнения Лурье и данный критерий можно получить с помощью функции Ляпунова вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей». Таким образом, известные критерии абсолютной устойчивости вытекают из конкретного вида функции Ляпунова и отличаются только формулировкой критерия, записываемого либо в виде систем алгебраических уравнений, либо с использованием частотной характеристики линейной части системы соответственно. Заметим, что проверка указанных критериев для случаев $m>1$ практически возможна с помощью алгебраических критериев [4], которые громоздки и сложны для решения прикладных задач. Поэтому разработка нового эффективного критерия абсолютной устойчивости регулируемых систем является актуальной проблемой. Управляемость и абсолютная устойчивость регулируемых систем изучены в [5—7].

В статье предлагается совершенно иной подход к решению проблемы абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценок несобственных интегралов вдоль решения системы без привлечения каких-либо функций Ляпунова и частотной характеристики линейной части системы. При таком подходе к получению критерия устойчивости условия $V>0$, $dV/dt<0$ заменяются положительностью подынтегральной функции и ограниченностью значения несобственного интеграла. По-видимому, требование ограниченности несобственного интеграла является менее «жестким» условием, нежели неравенство $dV/dt<0$, так как могут существовать траектории, изображающие точки которых отдаляются от положения равновесия системы на некотором конечном отрезке времени, и для таких траекторий может нарушаться условие $dV/dt<0$, однако несобственный интеграл вдоль таких траекторий может сходиться.

1. Пусть матрица A_1 гурвицева. Тогда существует диагональная матрица $\varepsilon_0=\operatorname{diag}(\varepsilon_{01}, \dots, \varepsilon_{0m})>0$ такая, что матрица $A_2=A_1-B_1\varepsilon_0 S$ гурвицева, и система (1)—(3) может быть записана в виде

$$\dot{x}=A_2x+B_1\varphi(\sigma, t),\ \sigma=Sx,\ x(0)=x_0,\ t\geqslant 0, \tag{4}$$

$$\varphi(\sigma, t)\in\Phi_{[\varepsilon_0,\mu_0]}=\{\varphi(\sigma, t)\in C[E^m\times\{t\geqslant 0\}]\mid \varepsilon_{0i}\sigma_i^2\leqslant\varphi_i(\sigma_i, t)\sigma_i\leqslant\mu_{0i}\sigma_i^2,$$
$$i=\overline{1, m};\ \varphi(0, t)\equiv 0,\ \forall t,\ t\geqslant 0;\ \varphi(\sigma, t)=\bar{\varphi}(\sigma, t)+\varepsilon_0\sigma\}. \tag{5}$$

Заметим, что если матрицы A_1, A_2 гурвицевы и норма $|\bar{\varphi}(\sigma, t)|\leqslant m_0$ $\forall\sigma$, $\sigma\in E^m$, $t\geqslant 0$, то решение системы (4), (5) ограничено.

Пусть $x(t)=x(t; 0, x_0)$, $t\geqslant 0$ — решение системы (4), (5), соответствующее любой выбранной функции $\varphi(\sigma, t)\in\Phi_{[\varepsilon_0,\mu_0]}$, а $\sigma(t)$, $\xi(t)=$ $=\varphi(\sigma(t), t)$, $t\geqslant 0$ — значения σ, $\varphi(\sigma, t)$ вдоль решения системы (4), (5). Легко убедиться в том, что если функция $\varphi(\sigma, t)$ обращается в нуль только при $\sigma=0$, матрица A_2 гурвицева, то система (4), (5) имеет единственное положение равновесия $x=0$.

Лемма 1. *Пусть для системы (4), (5) выполнены следующие условия: 1) пара (A_2, B_1) управляема; 2) существуют матрица Θ и неособая матрица τ соответственно порядков $m\times n$, $m\times m$ такие, что $\Theta B=-\tau\mu_0^{-1}$, где $\mu_0=\operatorname{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m})>0$.*

Тогда вдоль решения системы (4), (5) функция

$$\xi(t)=\mu_0\tau^{-1}\Theta[Ax(t)-\dot{x}(t)],\ t\geqslant 0. \tag{6}$$

Доказательство. Из условия управляемости пары (A_2, B_1) следует, что каждая компонента вектор-функции $x(t)$, $t\geqslant 0$, зависит от функции $\xi(t)=\varphi(\sigma(t), t)$, $t\geqslant 0$, и поэтому данное условие является необходимым условием существования непрерывной функции $\xi(t)$, $t\geqslant 0$, для которой траектория системы (4), (5), исходящая из точки $x(0)=x_0$, проходит через точку $x_1=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$. Поскольку функция $x(t)$, $t\geqslant 0$,— решение системы (4), (5), а функции $\xi(t)=\varphi(Sx(t), t)$, $\sigma(t)=Sx(t)$, $t\geqslant 0$, то имеет место тождество $\dot{x}(t)-A_2x(t)-B_1\xi(t)\equiv 0$, $t\geqslant 0$. Умножая данное тождество слева на матрицу Θ и учитывая условие 2) леммы 1, получим тождество (6). Лемма доказана.

Определим следующие разности:

$$\sigma(t)-\mu_0^{-1}\xi(t)=\tau^{-1}\Theta\dot{x}(t)-\tau^{-1}(\Theta A_2-\tau S)x(t),\ t\geqslant 0, \tag{7}$$

$$\varepsilon_0^{-1}\xi(t)-\sigma(t)=-\alpha^{-1}\Theta\dot{x}(t)+\alpha^{-1}(\Theta A_2-\alpha S)x(t),\ t\geqslant 0 \tag{8}$$

вдоль решения системы (4), (5), где матрица $\alpha=\tau\mu_0^{-1}\varepsilon_0$.

Функции $\varphi(\sigma, t)\in\Phi_{[\varepsilon_0,\mu_0]}$ обладают рядом свойств, которые могут быть использованы для получения критерия абсолютной устойчивости регулируемых систем. Вдоль решения системы (4), (5) рассмотрим следующие функции:

$$\pi_1(t)=[\varepsilon_0^{-1}\xi(t)-\sigma(t)]^*\tau_1[\sigma(t)-\mu_0^{-1}\xi(t)],\ \pi_2(t)=\xi^*(t)\tau_2\dot{\sigma}(t),$$
$$\pi_3(t)=\xi^*(t)\tau_3[\sigma(t)-\mu_0^{-1}\xi(t)],\ \pi_4(t)=[\varepsilon_0^{-1}\xi(t)-\sigma(t)]^*\tau_4\dot{\sigma}(t),$$
$$\pi_5(t)=[\sigma(t)-\mu_0^{-1}\xi(t)]^*\tau_5\dot{\sigma}(t),\ \pi_6(t)=[\varepsilon_0^{-1}\xi(t)-\sigma(t)]^*\tau_6\sigma(t),$$
$$\pi_7(t)=[\varepsilon_0^{-1}\xi(t)-\sigma(t)]^*\tau_7\xi(t),\ t\geqslant 0,$$

где $\tau_i\geqslant 0$, $i=\overline{1, 7}$, — диагональные матрицы порядков $m\times m$ (не обращающиеся одновременно в нуль), причем если функция $\xi_i(t)=\varphi_i(\sigma_i(t), t)$, $t\geqslant 0$, то элементы матриц τ_2, τ_4, τ_5 величины $\tau_{2i}=0$, $\tau_{4i}=0$, $\tau_{5i}=0$, а в случаях $\xi_i(t)=\varphi_i(\sigma_i(t))$ величины $\tau_{2i}\geqslant 0$, $\tau_{4i}\geqslant 0$, $\tau_{5i}\geqslant 0$, $*$ — знак транспонирования.

Лемма 2. *Вдоль решения системы (4), (5) несобственный интеграл*

$$I_1=-\int_0^\infty \sum_{i=1}^7 \pi_i(t)\,dt\leqslant c_1=\int_0^{\sigma(0)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma+\int_0^{\sigma(0)} [\varepsilon_0^{-1}\varphi(\sigma)-\sigma]^*\tau_4 d\sigma+$$

$$+\int_0^{\sigma(0)} [\sigma-\mu_0^{-1}\varphi(\sigma)]^*\tau_5 d\sigma. \qquad (9)$$

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma,t)\in\Phi_{[\varepsilon_0,\mu_0]}$ следует, что $\varepsilon_{0i}\sigma_i^2\leqslant\varphi_i(\sigma_i,t)\sigma_i\leqslant\mu_{0i}\sigma_i^2$, $i=\overline{1,m}$. Отсюда, в частности, имеем $\varphi^*(\sigma,t)\tau_2\sigma=\sum_{i=1}^m \tau_{2i}\varphi_i(\sigma_i,t)\sigma_i\geqslant 0$, $t\geqslant 0$. Тогда интеграл

$$\int_0^t \xi^*(\tau)\tau_2\dot\sigma(\tau)\,d\tau=\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma=\int_{\sigma(0)}^{0} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma+\int_0^{\sigma(t)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^t \xi^*(\tau)\tau_2\dot\sigma(\tau)\,d\tau+\int_0^{\sigma(0)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma=\int_0^{\sigma(t)} \varphi^*(\sigma)\tau_2 d\sigma\geqslant 0. \qquad (10)$$

Аналогично можно показать, что

$$\int_0^t [\sigma(t)-\mu_0^{-1}\xi(\tau)]^*\tau_5\dot\sigma(\tau)\,d\tau+\int_0^{\sigma(0)} [\sigma-\mu_0^{-1}\varphi(\sigma)]^*\tau_5 d\sigma=$$

$$=\int_0^{\sigma(t)} [\sigma-\mu_0^{-1}\varphi(\sigma)]^*\tau_5 d\sigma\geqslant 0, \qquad (11)$$

$$\int_0^t [\varepsilon_0^{-1}\xi(\tau)-\sigma(\tau)]^*\tau_4\dot\sigma(\tau)\,d\tau+\int_0^{\sigma(0)} [\varepsilon_0^{-1}\varphi(\sigma)-\sigma]^*\tau_4 d\sigma=$$

$$=\int_0^{\sigma(t)} [\varepsilon_0^{-1}\varphi(\sigma)-\sigma]^*\tau_4 d\sigma\geqslant 0. \qquad (12)$$

Поскольку $\varepsilon_{0i}\leqslant\varphi_i(\sigma_i,t)/\sigma_i\leqslant\mu_{0i}$, $i=\overline{1,m}$, то справедливы неравенства $\sigma_i/\varphi_i(\sigma_i,t)\geqslant\mu_{0i}^{-1}$, $\sigma_i/\varphi_i(\sigma_i,t)\leqslant\varepsilon_{0i}^{-1}$, $i=\overline{1,m}$. Умножая на $\varphi_i^2(\sigma_i,t)$, получим $\varphi_i(\sigma_i,t)\sigma_i\geqslant\mu_{0i}^{-1}\varphi_i^2(\sigma_i,t)$, $\varphi_i(\sigma_i,t)\sigma_i\leqslant\varepsilon_{0i}^{-1}\varphi_i^2(\sigma_i,t)$, $t\geqslant 0$, $i=\overline{1,m}$. Следовательно, верны неравенства $\varphi_i(\sigma_i,t)[\sigma_i-\mu_{0i}^{-1}\varphi_i(\sigma_i,t)]\geqslant 0$, $[\varepsilon_{0i}^{-1}\varphi_i(\sigma_i,t)-\sigma_i]\varphi_i(\sigma_i,t)\geqslant 0$, $i=\overline{1,m}$, т. е. знаки $\varphi_i(\sigma_i,t)$ и выражений $[\sigma_i-\mu_{0i}^{-1}\varphi_i(\sigma_i,t)]$, $[\varepsilon_{0i}^{-1}\varphi_i(\sigma_i,t)-\sigma_i]$ совпадают. Так как знаки $\varphi_i(\sigma_i,t)$ и σ_i совпадают (поскольку $\varphi_i\sigma_i\geqslant 0$), то совпадают знаки σ_i и выражений $[\sigma_i-\mu_{0i}^{-1}\varphi_i(\sigma_i,t)]$, $[\varepsilon_{0i}^{-1}\varphi_i(\sigma_i,t)-\sigma_i]$. Отсюда следует справедливость неравенств $\pi_1(t)\geqslant 0$, $\pi_3(t)\geqslant 0$, $\pi_6(t)\geqslant 0$, $\pi_7(t)\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, в силу того, что $\xi(t)=\varphi(\sigma(t),t)$, $t\geqslant 0$, вдоль решения системы (4), (5), и неравенств (10)—(12). Следовательно, интеграл

$$\int_0^t [\pi_1(\tau)+\pi_3(\tau)+\pi_6(\tau)+\pi_7(\tau)]\,d\tau\geqslant 0,\ t\geqslant 0. \qquad (13)$$

Суммируя интегралы (10)—(13), получим неравенство (9). Лемма доказана.

Сумма

$$-\sum_{i=1}^7 \pi_i(t)=\sigma^*(t)(\tau_1+\tau_6)\sigma(t)+\xi^*(t)\nu_1\sigma(t)+\xi^*(t)\nu_3\xi(t)+$$

$$+\sigma^*(t)(\tau_4-\tau_5)\dot\sigma(t)+\xi^*(t)\nu_2\dot\sigma(t),\ t\geqslant 0, \tag{14}$$

где $\nu_1=-\varepsilon_0^{-1}\tau_1-\mu_0^{-1}\tau_1-\tau_3-\varepsilon_0^{-1}\tau_6+\tau_7$, $\nu_2=-\varepsilon_0^{-1}\tau_4+\mu_0^{-1}\tau_5-\tau_2$, $\nu_3=$ $=\varepsilon_0^{-1}\tau_1\mu_0^{-1}+\tau_3\mu_0^{-1}-\varepsilon_0^{-1}\tau_7$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда вдоль решения системы (4), (5) несобственный интеграл*

$$I_1=-\int_0^\infty\sum_{i=1}^7\pi_i(t)\,dt=\int_0^\infty[x^*(t)\bar L_1x(t)+\bar x^*(t)\bar L_2x(t)+\bar x^*(t)L_3\bar x(t)]\,dt\leqslant c_1, \tag{15}$$

где матрицы

$$\bar L_1=A_2^*\Theta^*\bar\gamma_1\Theta A_2+A_2^*\Theta^*\bar\gamma_2+S^*\bar\tau S+S^*\bar{\bar\tau}SA_2,\ \bar\tau=\tau_1=\tau_8,\ \bar{\bar\tau}=\tau_4-\tau_5, \tag{16}$$

$$\bar L_2=-(\bar\gamma_1+\bar\gamma_1^*)\Theta A_2-\bar\gamma_2,\ \bar\gamma_2=\tau^{*-1}\mu_0\gamma_2,\ \gamma_2=\bar\nu_1S+\nu_2SA_2, \tag{17}$$

$$L_3=\bar\gamma_1=\tau^{*-1}\mu_0\gamma_1\mu_0\tau^{-1},\ \gamma_1=\nu_3+\nu_2SB_1,\ \bar\nu_1=\nu_1+B_1^*S^*\bar{\bar\tau}, \tag{18}$$

а функция $\bar x(t)=\Theta\dot x(t)$, $t\geqslant 0$.

Доказательство. Поскольку выполнены условия леммы 1, то функция $\xi(t)$, $t\geqslant 0$, определяется формулой (6), а разности $\sigma(t)-$ $-\mu_0^{-1}\xi(t)$, $\varepsilon_0^{-1}\xi(t)-\sigma(t)$, $t\geqslant 0$,— соответственно формулами (7), (8). Производная $\dot\sigma(t)=S\dot x(t)=S[A_2x(t)+B_1\xi(t)]=SA_2x(t)+SB_1\xi(t)$, $t\geqslant 0$. С другой стороны, согласно лемме 3, вдоль решения системы (4), (5) верна оценка (9), где сумма $-\sum_{i=1}^7\pi_i(t)$, $t\geqslant 0$, определяется формулой (14). Подставляя значения функций $\xi(t)$, $\sigma(t)$, $\dot\sigma(t)$, $t\geqslant 0$, из оценки (9) получим неравенство (15), где матрицы $\bar L_1$, $\bar L_2$, L_3 соответственно порядков $n\times n$, $m\times n$, $m\times m$ определяются формулами (16)—(18). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть $H=H^*$ — некоторая симметричная матрица порядка $n\times n$. Тогда вдоль решения системы (4), (5) несобственный интеграл*

$$I_2=-\int_0^\infty\left[2\dot x^*(t)Hx(t)+\sum_{i=1}^7\pi_i(t)\right]dt=\int_0^\infty[x^*(t)L_1x(t)+$$
$$+\bar x^*(t)L_2x(t)+\bar x^*(t)L_3\bar x(t)]\,dt\leqslant c_1-\lim_{t\to\infty}x^*(t)Hx(t)+x_0^*Hx_0, \tag{19}$$

где матрицы

$$L_1=-2HA-2HB\mu_0\tau^{-1}\Theta A_2+\bar L_1,\ L_2=2\tau^{*-1}\mu_0B^*H+\bar L_2. \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку матрица $H=H^*$, то верны следующие соотношения:

$$\begin{gathered}-2\dot x^*(t)Hx(t)=-2x^*(t)H[A_2x(t)+B_1\xi(t)],\ t\geqslant 0,\\ -2\int_0^\infty\dot x^*(t)Hx(t)\,dt=-\lim_{t\to\infty}x^*(t)Hx(t)+x_0^*Hx_0.\end{gathered} \tag{21}$$

Так как выполнены условия леммы 1, то функция $\xi(t)$, $t\geqslant 0$, определяется формулой (6). Следовательно, вдоль решения системы (4), (5) выражение

$$-2x^*(t)H[A_2x(t)+B_1\xi(t)]=x^*(t)[-2HA_2-2HB_1\mu_0\tau^{-1}\Theta A_2]x(t)+$$
$$+\bar x^*(t)(2\tau^{*-1}\mu_0B_1^*H)x(t),\ t\geqslant 0. \tag{22}$$

Тогда из соотношений (16)—(18) и (22) следует выражение (20). Суммируя выражения (15), (21), получим оценку (19). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия лемм 1, 4 и пусть, кроме того, существует симметричная матрица* $\Lambda=\Lambda^*$ *порядка* $m\times m$ *такая, что матрица* $L_2=2\Lambda\Theta$. *Тогда вдоль решения системы (4), (5) несобственный интеграл*

$$I_3=\int_0^\infty [x^*(t)L_1x(t)+\bar{x}^*(t)L_3\bar{x}(t)]\,dt\leqslant c_1-\lim_{t\to\infty} x^*(t)[H+\Theta^*\Lambda\Theta]x(t)+$$
$$+x_0^*(H+\Theta^*\Lambda\Theta)x_0. \qquad (23)$$

Доказательство. Так как матрица $L_2=2\Lambda\Theta$, то несобственный интеграл

$$-\int_0^\infty \bar{x}^*(t)L_2x(t)\,dt=-\int_0^\infty \dot{x}^*(t)\Theta^*L_2x(t)\,dt=-2\int_0^\infty \dot{x}^*(t)\Theta^*\Lambda\Theta x(t)\,dt=$$
$$=-\lim_{t\to\infty} x^*(t)\Theta^*\Lambda\Theta x(t)+x_0^*\Theta^*\Lambda\Theta x_0. \qquad (24)$$

Суммируя несобственные интегралы (19) и (24), получим оценку (23). Лемма доказана.

Как следует из формулы (20), соотношение $L_2=2\Lambda\Theta$ может быть записано в виде

$$2HB_1\mu_0\tau^{-1}=2\Theta^*\Lambda+A_2^*\Theta^*(\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_1^*)+\bar{\gamma}_2^*. \qquad (25)$$

Заметим, что поскольку $x^*A_2^*\Theta^*\bar{\gamma}_2x=x^*\bar{\gamma}_2^*\Theta A_2x$, то матрица L_1 может быть записана в виде

$$L_1=-2HA_2-2HB_1\mu_0\tau^{-1}\Theta A_2+A_2^*\Theta^*\bar{\gamma}_1\Theta A_2+\bar{\gamma}_2^*\Theta A_2+S^*\bar{\tau}S+S^*\bar{\bar{\tau}}SA_2.$$

Отсюда с учетом того, что матрица $\bar{\gamma}_2^*=2HB_1\mu_0\tau^{-1}-2\Theta^*\Lambda-A_2^*\Theta^*(\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_1^*)$, получим

$$L_1=-2(H+\Theta^*\Lambda\Theta)A_2-A_2^*\Theta^*\bar{\gamma}_1^*\Theta A_2+S^*\bar{\tau}S+S^*\bar{\bar{\tau}}SA_2. \qquad (26)$$

Формулы (25), (26) применяются для проверки предлагаемых критериев абсолютной устойчивости регулируемых систем.

2. На основе лемм 1—5 могут быть сформулированы критерии абсолютной устойчивости регулируемых систем. Целесообразно рассмотреть в отдельности два случая: первый случай, когда функция $\bar{\varphi}(\sigma,t)$, $\sigma\in E^m$, $t\geqslant 0$, ограничена, т. е. норма $|\bar{\varphi}(\sigma,t)|\leqslant m_0$ $\forall\sigma$, $\sigma\in E^m$, $t\geqslant 0$, где $\varphi(\sigma,t)=\bar{\varphi}(\sigma,t)+\varepsilon_0\sigma$, матрицы A_1, $A_2+B_1\varepsilon_0S$ гурвицевы; второй случай, когда $\varphi(\sigma,t)\in\Phi_{[\varepsilon_0,\mu_0]}$ — произвольная функция.

Теорема 1. *Пусть для системы (4), (5) выполнены следующие условия:*

1) функция $\varphi(\sigma,t)=\bar{\varphi}(\sigma,t)+\varepsilon_0\sigma$, *норма* $|\bar{\varphi}(\sigma,t)|\leqslant m_0$, $\forall\sigma$, $\sigma\in E^m$, $t\geqslant 0$;

2) матрицы A_2, $A_2+B_1\mu S$, $\varepsilon_0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$, *гурвицевы, пара* (A_2,B_1) *управляема;*

3) существуют матрица Θ *и неособая матрица* τ *соответственно порядков* $m\times n$, $m\times m$ *такие, что* $\Theta B=-\tau\mu_0^{-1}$;

4) существуют симметричные матрицы $H=H^*$, $\Lambda=\Lambda^*$ *соответственно порядков* $n\times n$, $m\times m$ *такие, что матрицы* $L_2=2\Lambda\Theta$ *и выполнено одно из следующих условий: а) либо матрицы* $(L_1+L_1^*)>0$, $(L_3+L_3^*)\geqslant 0$; *б) либо матрицы* $(L_1+L_1^*)=S^*\Gamma^*\Gamma S$, Γ *— неособая матрица порядка* $m\times m$, $(L_3+L_3^*)\geqslant 0$; *в) либо матрицы* $(L_1+L_1^*)=Q^*Q$, $(L_3+L_3^*)\geqslant 0$, *где* Q *— матрица порядка* $s\times n$ $(s<n)$, *причем тривиальное решение системы (4), (5) абсолютно устойчиво на линейном многообразии* $Qx=0$. *Тогда тривиальное решение системы (4), (5) абсолютно устойчиво.*

Доказательство. Пусть выполнены условия 1)—4) теоремы. Покажем, что тривиальное решение системы (4), (5) абсолютно устойчиво. В самом деле, из условий 1), 2) теоремы следует, что решение системы (4), (5) ограничено, т. е. норма $|x(t)|\leqslant m_1$, $m_1=\text{const}>0$, $t\geqslant 0$, для любого $x_0\in E^n$, $|x_0|<\infty$, и положение равновесия системы асимптотически устойчиво в малом.

Из управляемости пары (A_2, B_1) и условия 3) теоремы следует, что выполнены все предпосылки леммы 1. Более того, поскольку матрица $L_2=2\Lambda\Theta$, согласно условию 4) теоремы, то выполнены условия леммы 5. Тогда из лемм 1—5 следует справедливость оценки (23). Из оценки (23) с учетом того, что норма $|x(t)|\leqslant m_1$, $t\geqslant 0$, имеем

$$I_3=\int_0^\infty [x^*(t)L_1x(t)+\dot{x}^*(t)L_3\dot{x}(t)]\,dt\leqslant c_2, \tag{27}$$

где величина $c_2=c_1+(\|H\|+\|\Theta^*\Lambda\Theta\|)m_1^2+|x_0^*Hx_0+x_0^*\Theta^*\Lambda\Theta x_0|<\infty$. Таким образом, вдоль решения системы (4), (5) несобственный интеграл I_3 ограничен.

Пусть выполнено условие 4а). Так как матрица $L_3+L_3^*\geqslant 0$, то из оценки (27) имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x^*(t)(L_1+L_1^*)x(t)\,dt\leqslant I_3\leqslant c_2<\infty. \tag{28}$$

Поскольку норма $|\dot{x}(t)|\leqslant\|A_2\|\,|x(t)|+\|B_1\|\,|\xi(t)|$, $|x(t)|\leqslant m_1$, $|\xi(t)|\leqslant$ $\leqslant m_0+\|\varepsilon_0\|\,\|S\|\,|x(t)|$, $t\geqslant 0$, то функция $\dot{x}(t)$, $t\geqslant 0$, ограничена. Следовательно, функция $x(t)$, $t\geqslant 0$, равномерно непрерывна. Из равномерной непрерывности функции $x(t)$, $t\geqslant 0$, и неравенства (28), где матрица $L_1+L_1^*>0$, в силу леммы Барбалата [2] следует, что предел $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$ $\forall x_0$, $x_0\in E^n$, $|x_0|<\infty$. Для случая 1—4а) теорема доказана.

Пусть выполнено условие 4б). Для данного случая неравенство (28) запишется так:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x^*(t)S^*\Gamma^*\Gamma Sx(t)\,dt\leqslant c_2<\infty. \tag{29}$$

Здесь возможны три случая. Первый случай, когда траектория системы (4), (5) все время находится вне линейного многообразия $\Gamma Sx=0$. Тогда значение $x^*(t)S^*\Gamma^*\Gamma Sx(t)>0$ для любого $t\geqslant 0$ и в силу только что доказанного предел $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Второй случай, когда траектория системы (4), (5) все время находится на линейном многообразии $\Gamma Sx=0$. Тогда значение $Sx(t)\equiv 0$ $\forall t$, $t\geqslant 0$, в силу того, что матрица Γ неособая. Следовательно, функция $\sigma(t)=Sx(t)\equiv 0$, $t\geqslant 0$. Поскольку функция $\varphi(\sigma(t),t)=\varphi(0,t)\equiv 0$, $t\geqslant 0$, то система (4), (5) вырождается в линейную систему $\dot{x}(t)=A_2x(t)$, $x(0)=x_0$, $t\geqslant 0$. Так как матрица A_2 гурвицева, то $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Таким образом, на линейном многообразии $Sx=0$ система (4), (5) не имеет предельного цикла, кроме $x(t)\equiv 0$, $t\geqslant 0$. Наконец, третий случай, когда множество $[0,\infty)=\tau_1\cup\tau_2$, причем при $t\in\tau_1$ траектория системы (4), (5) находится на линейном многообразии $Sx=0$, а при $t\in\tau_2$ — вне ее. В этом случае оценка (29) запишется в виде

$$\frac{1}{2}\int_{\tau_2} x^*(t)S^*\Gamma^*\Gamma Sx(t)\,dt\leqslant c_2<\infty.$$

Пусть меры множеств τ_1, τ_2 соответственно равны $\mu\tau_1$, $\mu\tau_2$. Заметим, что $\mu(\tau_1+\tau_2)=\mu\tau_1+\mu\tau_2=\infty$. Если мера $\mu\tau_2<\infty$, то $\mu\tau_1=\infty$, следовательно, траектория системы, двигаясь по линейному многообразию $Sx=0$, стремится к началу координат. Если меры $\mu\tau_2=\infty$, $\mu\tau_1<\infty$ (либо $\mu\tau_1=\infty$), то как и в первом случае, $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Для случая 1—4б) теорема доказана.

Пусть выполнено условие 4в). В данном случае из неравенства (28) имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x^*(t)\,Q^*Qx(t)\,dt \leqslant c_2 < \infty,$$

где Q — постоянная матрица порядка $s\times n$, причем $s<n$. Здесь имеют место аналогичные случаи, как и в условии 4б). Вне линейного многообразия $Qx=0$ при всех $t\geqslant 0$, как в случае 4а), имеем $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Если значение $Qx(t)\equiv 0$, $t\geqslant 0$, то в силу того, что система (4), (5) абсолютно устойчива в $Qx=0$, имеем $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Так же, как и выше, можно показать, что в случае $[0,\infty)=\tau_1\cup\tau_2$ предел $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. Система (4), (5) на линейном многообразии $Qx=0$ имеет порядок $n-s$, если $\operatorname{rank} Q=s$. В самом деле, не умаляя общности, матрицу Q можно представить в виде $Q=(Q_1, Q_2)$, где матрица Q_1 имеет порядок $s\times s$, причем Q_1 — неособая матрица, матрица Q_2 порядка $s\times(n-s)$. Тогда $Qx=Q_1x_1+Q_2x_2=0$, где вектор $x=(x_1, x_2)$. Отсюда имеем $x_1=-Q_1^{-1}Q_2x_2$. Исключая вектор x_1 из системы (4), (5), получим дифференциальные уравнения относительно x_2 порядка $n-s$.

Замечание 2. Как следует из доказательства теоремы, в случае, когда норма $|\bar{\varphi}(\sigma,t)|\leqslant m_0$ $\forall\sigma$, $\sigma\in E^m$, $t\geqslant 0$, симметричные матрицы $H=H^*$, $\Lambda=\Lambda^*$ могут быть произвольных знаков.

Теорема 2. *Пусть для системы (4), (5) выполнены следующие условия:*

1) матрицы A_2, $A_2+B_1\mu S$, $\varepsilon_0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$, гурвицевы, пара (A_2, B_1) управляема, функция $\varphi(\sigma,t)\in\Phi_{[\varepsilon_0,\mu_0]}$;

2) существуют матрица Θ и неособая матрица τ соответственно порядков $m\times n$, $m\times m$ такие, что $\Theta B=-\tau\mu_0^{-1}$;

3) существуют симметричные матрицы $H=H^*$, $\Lambda=\Lambda^*$ такие, что матрица $H+\Theta^*\Lambda\Theta\geqslant 0$;

4) матрица $L_2=2\Lambda\Theta$ и выполнено одно из следующих условий: а) либо матрица $(L_1+L_1^*)>0$, $(L_3+L_3^*)\geqslant 0$; б) либо матрицы $L_1+L_1^*=S^*\Gamma^*\Gamma S$, $L_3+L_3^*\geqslant 0$, где Γ — неособая матрица порядка $m\times m$; в) либо матрицы $L_1+L_1^*=Q^*Q$, $L_3+L_3^*\geqslant 0$, где Q — матрица порядка $s\times n$ $(s<n)$, причем тривиальное решение системы (4), (5) абсолютно устойчиво на линейном многообразии $Qx=0$.

Тогда тривиальное решение системы (4), (5) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Из оценки (23) имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x^*(t)\,(L_1+L_1^*)\,x(t)\,dt \leqslant I_3 \leqslant c_3-\lim_{t\to\infty} x^*(t)\,(H+\Theta^*\Lambda\Theta)\,x(t), \quad (30)$$

где величина $c_3=c_1+x_0^*(H+\Theta^*\Lambda\Theta)x_0$, $|x_0|<\infty$, $c_3<\infty$. Как следует из выражения (30), при выполнении условия 1) теоремы решение системы (4), (5) ограничено. В самом деле, матрица $H+\Theta^*\Lambda\Theta\geqslant 0$ может быть представлена в виде $H+\Theta^*\Lambda\Theta=N^*N$, где N — постоянная матрица порядка $l\times n$, $l\leqslant n$.

Пусть значение $x_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$. Поскольку матрица $L_1+L_1^*>0$, то в случае, когда $|x_\infty|\to\infty$, $|Nx_\infty|\to\infty$, из оценки (30) имеем $0\leqslant I_3\leqslant-\infty$, что невозможно. А в тех случаях, когда $Nx_\infty=0$ или $|Nx_\infty|<\infty$, из (30) следует, что $0\leqslant I_3<\infty$, и остается верной оценка (27). Далее, повторяя доказательство теоремы 1, получим все утверждения теоремы. Теорема доказана.

Замечание 1 остается верным и для теоремы 2.

3. Естественно возникает вопрос: как проверить на практике предложенные критерии абсолютной устойчивости регулируемых систем? Рассмотрим в отдельности два случая: 1) $|\bar{\varphi}(\sigma,t)|\leqslant m_0$, $\forall\sigma$, $\sigma\in E^m$, $t\geqslant 0$; 2) $\varphi(\sigma,t)\in\Phi_{[\varepsilon_0,\mu_0]}$.

Лемма 6. *Пусть матрицы $H_i=H_i^*$, $i=1, 2, 3$, порядков $n\times n$ являются решениями матричных уравнений*

$$-H_1A_2-A_2^*H=\pm S^*\Gamma_1^*\Gamma_1 S, \quad -H_2A_2-A_2^*H_2=\frac{1}{2}K^*(\gamma_1+\gamma_1^*)K,$$
$$-H_3A_2-A_2^*H_3=Q^*Q, \tag{31}$$

где матрица $K=\mu_0\tau^{-1}\Theta A_2$, Γ_1 — матрица порядка $m\times m$, Q — матрица порядка $s\times n$ $(s<n)$, причем $KA^{-1}B_1=-I_m$, I_m — единичная матрица порядка $m\times m$.

Тогда матрица

$$P=(1/2)(L_1+L_1^*)=\pm S^*\Gamma_1^*\Gamma_1 S+S^*\bar{\tau}S+Q^*Q, \tag{32}$$

и равенство $L_2=2\Lambda\Theta$ запишется в виде

$$2B_1^*(H_1+H_2+H_3)=(\gamma_1+\gamma_1^*)K+\nu_1 S+\nu_2 SA_2. \tag{33}$$

Доказательство. Как следует из формулы (26), матрица $P=(1/2)(L_1+L_1^*)$ может быть представлена в виде

$$P=-H_4A_2-A_2^*H_4+S^*\bar{\tau}S-K^*(1/2)(\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_1^*)K, \tag{34}$$

где матрицы $H_4=H+\Theta^*\Lambda\Theta-(1/2)S^*\bar{\bar{\tau}}S, K=\mu_0\tau^{-1}\Theta A, \bar{\gamma}_1=\tau^{*-1}\mu_0\gamma_1\mu_0\tau^{-1}$. Пусть матрица $H_4=H_1+H_2+H_3$. Тогда, согласно условию леммы (31), из (34) имеем

$$P=-\sum_{i=1}^{3}(H_iA_2+A_2^*H_i)+S^*\bar{\tau}S-(1/2)K^*(\gamma_1+\gamma_1^*)K=$$
$$=\pm S^*\Gamma_1^*\Gamma_1 S+S^*\bar{\tau}S+Q^*Q.$$

Отсюда следует выражение (32). Заметим, что матрица $(1/2)\times\times(\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_1^*)=\tau^{*-1}\mu_0[(\gamma_1+\gamma_1^*)/2]\mu_0\tau^{-1}$, следовательно, матрица $A_2^*\Theta^*\times\times[(\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_1^*)/2]\Theta A_2=K^*[(\gamma_1+\gamma_1^*)/2]K$. Далее, поскольку матрица $K==\mu_0\tau^{-1}\Theta A_2$, A_2 — гурвицева матрица, то матрица $\Theta=\tau\mu_0^{-1}KA^{-1}$. Тогда условие $\Theta B_1=-\tau\mu_0^{-1}$ запишется в виде $KA^{-1}B=-I_m$.

Так как матрица $H=H_1+H_2+H_3-\Theta^*\Lambda\Theta+(1/2)S^*\bar{\bar{\tau}}S$, то соотношение (25), т. е. $L_2=2\Lambda\Theta$, запишется в виде

$$2(H_1+H_2+H_3-\Theta^*\Lambda\Theta+(1/2)S^*\bar{\bar{\tau}}S)B_1\mu_0\tau^{-1}=$$
$$=2\Theta\Lambda+K^*[(\gamma_1+\gamma_1^*)]\mu_0\tau^{-1}+\bar{\gamma}_2^*.$$

Отсюда с учетом того, что $-2\Theta^*\Lambda\Theta B_1\mu_0\tau^{-1}=2\Theta^*\Lambda$, $\bar{\gamma}_2^*=\gamma_2^*\mu_0\tau^{-1}$, $\gamma_2^*==S^*\bar{\nu}_1^*+A_2^*S^*\nu_2^*$, $\bar{\nu}_1^*=\nu_1^*+\bar{\bar{\tau}}SB_1$, получим $2(H_1+H_2+H_3)B_1\mu_0\tau^{-1}==K^*(\gamma_1+\gamma_1^*)\mu_0\tau^{-1}+(S^*\nu_1^*+A_2^*S^*\nu_2^*)\mu_0\tau^{-1}$. Транспонируя данное соотношение, получим формулу (33). Уравнение $-H_1A_2-A_2^*H_1=\pm S^*\Gamma_1^*\Gamma_1 S$ означает, что либо $-H_1A_2-A_2^*H_1=S^*\Gamma_1^*\Gamma_1 S$, либо $-H_1A_2-A_2^*H_1==-S^*\Gamma_1^*\Gamma_1 S$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 1 и пусть, кроме того, произведение $KA_2^{-1}B_1=-I_m$, матрица $\gamma_1+\gamma_1^*\geqslant 0$ и выполнено одно из следующих условий:*

1) либо существуют матрицы $H_i=H_i^*$, $i=1, 2, 3$, которые являются решениями матричных уравнений (31), такие, что выполнено равенство (33), матрица $P>0$ (см. (32)) (либо $P\geqslant 0$, $\pm\Gamma_1^*\Gamma_1+\bar{\tau}>0$);

2) либо существуют матрицы $H_1=H_1^*$, $H_2=H_2^*$, которые являются решениями матричных уравнений

$$-H_1A_2-A_2^*H_1=\pm S^*\Gamma_1^*\Gamma_1 S, \quad -H_2A_2-A_2^*H_2=\frac{1}{2}K^*(\gamma_1+\gamma_1^*)K,$$

такие, что матрица $\pm\Gamma_1^*\Gamma_1+\bar{\tau}>0$ *и выполнено равенство*

$$2B_1^*(H_1+H_2)=(\gamma_1+\gamma_1^*)K+\nu_1 S+\nu_2 SA_2;$$

3) либо существуют матрицы H_1, H_2, H_3, *которые являются решениями матричных уравнений*

$$-H_2A_2-A_2^*H_2=\frac{1}{2}K^*(\gamma_1+\gamma_1^*)K,\quad -H_3A_2-A_2^*H_3=Q^*Q,$$

$$-H_1A_2-A_2^*H_1=-S^*\bar{\tau}S,$$

такие, что выполнено равенство

$$2B_1(H_1+H_2+H_3)=(\gamma_1+\gamma_1^*)K+\nu_1 S+\nu_2 SA_2,$$

система (4), (5) абсолютно устойчива на линейном многообразии $Qx=0$.

Тогда тривиальное решение системы (4), (5) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Поскольку условие $KA_2^{-1}B=-I_m$ равносильно условию $\Theta B_1=-\tau\mu_0^{-1}$, то выполнено условие 3) теоремы 1. Из $\gamma_1+\gamma_1^*\geqslant 0$ следует, что $L_3+L_3^*\geqslant 0$. Тогда условия 1), 2), 3) леммы равносильны условиям 4а), 4б), 4в) теоремы 1 соответственно, причем матрица $L_2=2\Lambda\Theta$. Итак, доказательство леммы непосредственно следует из теоремы 1. Лемма доказана.

Для случая $\varphi(\sigma,t)\in\Phi_{[\varepsilon_0,\mu_0]}$ верна теорема 2. Заметим, что теорема 2 отличается от теоремы 1 только условием $H+\Theta^*\Lambda\Theta\geqslant 0$. Лемма 6 остается верной и в указанном случае. Как следует из доказательства леммы 6, матрица $H+\Theta^*\Lambda\Theta=H_1+H_2+H_3+(1/2)S^*\bar{\bar{\tau}}S\geqslant 0$.

Как показано в приведенном ниже примере, условия леммы 7 легко проверяются.

4. Установим связь между предложенным критерием (случай $\varphi(\sigma,t)\in\in\Phi_{[\varepsilon_0,\mu_0]}$) и известными критериями абсолютной устойчивости. Ограничимся случаем, когда значение $m=1$.

Покажем, что разрешающие уравнения Лурье являются частным случаем и их можно получить из лемм 6, 7 и условия $H+\Theta^*\Lambda\Theta\geqslant 0$. В самом деле, из условия $\gamma_1=\nu_3+\nu_2 SB_1>0$, полагая $\gamma_1=\varkappa^2$, получим $\gamma_1-\varkappa^2=\nu_3-\nu_2 SB_1-\varkappa^2=0$ (первое уравнение Лурье). Пусть матрицы $\Gamma_1=0$, $Q=0$, следовательно, матрицы $H_1=0$, $H_3=0$, а матрица $H_4=H_2$, причем $-H_2A_2-A_2^*H_2=(1/2)K^*(\gamma_1+\gamma_1^*)K$. Пусть вектор $h=\sqrt{\gamma_1}K$. Тогда данное уравнение запишется в виде $H_2A_2+A_2^*H_2+h^*h=0$ (третье уравнение Лурье). Наконец, из соотношения (33) получим $2B_1^*H_2+$ $+2\varkappa h-\nu_1 S-\nu_2 SA_2=0$ (второе уравнение Лурье). Заметим, что если $\tau_4=\tau_5$, $\Lambda=0$, то матрицы $P=S^*\bar{\tau}S\geqslant 0$, $H=H_2$. Таким образом, разрешающие уравнения Лурье являются частным случаем, когда $\gamma_1>0$, $\tau_4=\tau_5$, $\Lambda=0$, $\Gamma_1=0$, $Q=0$, $H=H_2\geqslant 0$.

Частотный критерий абсолютной устойчивости легко получить из соотношений (14), (15). В самом деле, как следует из формул (14), (15), несобственный интеграл

$$I_1=-\int_0^\infty\sum_{i=1}^7\pi_i(t)\,dt=\int_0^\infty[x^*(t)S^*\bar{\tau}Sx(t)]\,dt+\int_0^\infty[\xi^*(t)\nu_1\sigma(t)+$$

$$+\xi^*(t)\nu_3\xi(t)+\sigma^*(t)\bar{\bar{\tau}}\dot{\sigma}(t)+\xi^*(t)\nu_2\dot{\sigma}(t)]\,dt\leqslant c_1<\infty. \tag{35}$$

Распространяя квадратичную форму $\xi^*(t)\nu_1\sigma(t)+\xi^*(t)\nu_3\xi(t)+\sigma^*(t)\times$ $\times\bar{\bar{\tau}}\dot{\sigma}(t)+\xi^*(t)\nu_2\dot{\sigma}(t)$, $t\geqslant 0$, до эрмитовой, с учетом того, что $\sigma=$ $=-W(i\omega)\xi$, где $W(i\omega)=S(A_2-i\omega I_n)^{-1}B_1$, причем изображение $\dot{\sigma}(t)$ равно $i\omega\sigma=-i\omega W(i\omega)\xi$, получим необходимое и достаточное условие неотрицательности подынтегрального выражения во втором несобственном интеграле в виде

$$\nu_3+\mathrm{Re}(-\nu_1-i\omega\nu_2)W(i\omega)\geqslant 0,\quad -\infty\leqslant\omega\leqslant+\infty. \tag{36}$$

Тогда из выражения (35) имеем

$$\int_0^\infty x^*(t)\,S^*\bar{\tau}Sx(t)\,dt<\infty.$$

Следовательно, $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$ $\forall x_0$, $x_0\in E^n$, $|x_0|<\infty$ (см. доказательство теорем 1, 2).

Следует отметить, что полученные выше разрешающие уравнения Лурье и частотный критерий как частные случаи являются более общими, нежели соответствующие критерии в работах [1, 8]. В самом деле, не требуется положительная определенность матрицы H и строгая положительность неравенства (36).

Пример. Покажем эффективность предложенного критерия по сравнению с известными на примере В. А. Плисса [9]. В. А. Плисс показал несостоятельность гипотезы М. А. Айзермана на следующем примере. Уравнение движения системы в векторной форме имеет вид

$$\dot{x}=A_1x+B_1\varphi(\sigma),\ \sigma=Sx,\ 0\leqslant\varphi(\sigma)\sigma\leqslant\mu_0\sigma^2, \tag{37}$$

где матрица A_1 и векторы B_1, S равны соответственно

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0\\-0{,}75\\-0{,}25\end{pmatrix},\ S=(1,1,1).$$

В. А. Плиссом показано, что линейная система, получаемая при $\varphi(\sigma)=\mu\sigma$, $0<\mu\leqslant\mu_0$, асимптотически устойчива для значений $0<\mu_0\leqslant 2-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ — достаточно малое число, а значение μ_0, определяемое в силу разрешающих уравнений Лурье и частотного критерия, удовлетворяет неравенствам $0<\mu_0\leqslant 1$. Система (37) может быть записана в виде

$$\dot{x}=A_2x+B_1\varphi(\sigma),\ \sigma=Sx,\ \varepsilon_0\sigma^2\leqslant\varphi(\sigma)\sigma\leqslant\mu_0\sigma^2, \tag{38}$$

где матрица $A_2=A_1+B\varepsilon_0S$, $\varepsilon_0>0$. Заметим, что если $\varepsilon_0\to+0$, то из (38) следует система (37). Результаты расчетов для значения $\varepsilon_0=0{,}04$ по лемме 7 при $\gamma_1=0$ следующие: $\Gamma_1^*\Gamma_1=-\alpha$, $\nu_1=-77{,}94\alpha$, $\nu_2=-25{,}302\alpha$, $\tau_1+\tau_6=3{,}158\alpha$, $\alpha>0$, $\tau_3=0$, $\tau_5=0$, $\tau_4=1{,}012\alpha$, $\tau_2=0$, $\tau_7=1{,}012\alpha+0{,}51\tau_1$. Сумма $\Gamma^*\Gamma+\bar{\tau}=2{,}158\alpha>0$. Матрица $(1/2)S^*\tau_4S+H_1$ не является неотрицательной, так как матрица $H_1<0$. Таким образом, если $\varphi(\sigma)=\varepsilon_0\sigma+\bar{\varphi}(\sigma)$, $|\bar{\varphi}(\sigma)|\leqslant m_0$, то для системы (37) верна гипотеза М. А. Айзермана. Поскольку данный результат невозможно получить известными методами теории регулируемых систем, то можно утверждать, что предлагаемые критерии дают лучшие результаты, чем известные критерии.

Литература

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М; Л., 1951.
2. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
3. Якубович В. А. // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1304—1307.
4. Айсагалиев С. А. Анализ и синтез автономных нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата, 1980.
5. Айсагалиев С. А. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. 1988. № 5. С. 60—64.
6. Айсагалиев С. А. // Автоматика и телемеханика. 1987. № 5. С. 29—39.
7. Айсагалиев С. А. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 3. С. 7—10.
8. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1978.
9. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., 1963.

Казахский государственный университет им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию 27 июня 1990 г.