



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. G. Nikonorov, On a class of homogeneous compact Einstein manifolds,
Sibirsk. Mat. Zh., 2000, Volume 41, Number 1, 200–205

<https://www.mathnet.ru/eng/smj1510>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.87

May 16, 2025, 23:43:45



ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОРОДНЫХ КОМПАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Ю. Г. Никоноров

Аннотация: Доказано существование однородных метрик Эйнштейна на некоторых компактных однородных пространствах. Библиогр. 1.

Рассмотрим однородное компактное пространство G/H с полупростой группой движений G . Пусть $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли, а $B(\cdot, \cdot)$ — форма Киллинга алгебры Ли g , и пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle = -B(\cdot, \cdot)$ — бинвариантная метрика.

Рассмотрим p — ортогональное дополнение к h в g относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Известно, что любая G -однородная метрика на G/H порождает некоторое ad_h -инвариантное скалярное произведение на p и наоборот [1, формула 7.24]. В силу этого замечания мы будем отождествлять однородные метрики на G/H с ad_h -инвариантными скалярными произведениями на p . Метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ограниченная на p , называется *стандартной*.

Допустим, что пространство G/H таково, что модуль p представим в виде прямой суммы трех попарно ортогональных относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ad_h -инвариантных и неприводимых модулей, т. е.

$$p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3,$$

удовлетворяющих соотношениям $[p_i, p_i] \subset h$ для $i \in \{1, 2, 3\}$. Сформулируем основной результат.

Теорема. Все пространства G/H , удовлетворяющие вышеприведенному условию, допускают однородную метрику Эйнштейна.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится ряд вспомогательных утверждений и конструкций.

Пусть $\{e_i^j\}$ — ортонормированный базис в p_i относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $1 \leq j \leq d_i = \dim p_i$. Определим выражения $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ для $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ следующим образом:

$$\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \rangle)^2,$$

где α, β, γ изменяются в пределах от 1 до d_i, d_j, d_k соответственно. Отметим, что символы $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ симметричны по всем трем индексам в силу бинвариантности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00436) и гранта С.-Петербургского ун-та.

метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Очевидно, что для пространств рассматриваемого нами типа $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = 0$ при двух совпадающих индексах. Важную роль в наших дальнейших рассуждениях играет величина $\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$, для нее мы используем обозначение A . Очевидно,

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 32 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Лемма 1. Для всех $i \in \{1, 2, 3\}$ выполняется неравенство

$$d_i \geq 2A,$$

причем равенство равносильно выполнению соотношения $[h, p_i] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{e_0^j\}$ — ортонормированный относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ базис в h , $1 \leq j \leq \dim h$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} &= \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ 1 \leq j,k \leq 3}} (\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \rangle)^2 \leq \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ 0 \leq j,k \leq 3}} (\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \rangle)^2 \\ &= \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ 0 \leq j \leq 3}} \langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], [e_i^\alpha, e_j^\beta] \rangle = - \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ 0 \leq j \leq 3}} \langle e_j^\beta, [e_i^\alpha, [e_i^\alpha, e_j^\beta]] \rangle = - \sum_{\alpha} B(e_i^\alpha, e_i^\alpha) = d_i. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались бинвариантностью метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и определением формы Киллинга. Отметим, что неравенство в вышеприведенной цепочке обращается в равенство тогда и только тогда, когда $[h, p_i] = 0$.

Подсчитаем теперь $\sum_{j,k} \begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ другим способом. Легко понять, что $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} \neq 0$ только в том случае, когда все i, j, k различны, в этом случае $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = A$, но таких вариантов всего два. Поэтому

$$\sum_{j,k} \begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = 2A \leq d_i$$

и выполнение равенства равносильно тому, что $[h, p_i] = 0$.

Рассмотрим семейство ad_h -инвариантных метрик на p вида

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = x_1 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_1} + x_2 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_2} + x_3 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_3}$$

при положительных x_i . Отметим, что векторы $\frac{1}{\sqrt{x_i}} e_i^j$ образуют ортобазис в p относительно такой метрики. Пусть $\text{Ric}(\cdot, \cdot)$ — форма кривизны Риччи метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$, которая также ad_h -инвариантна, поэтому

$$\text{Ric}(\cdot, \cdot)|_{p_i} = r_i \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_i}$$

для некоторых вещественных r_i . Покажем, что для метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ модули p_i попарно ортогональны относительно $\text{Ric}(\cdot, \cdot)$, и выведем формулу для вычисления величин r_i .

Лемма 2. Модули p_i попарно ортогональны относительно формы кривизны Риччи $\text{Ric}(\cdot, \cdot)$ метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Для вычисления чисел r_i справедлива формула

$$r_i = \frac{1}{2x_i} + \frac{A}{2d_i} \left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k} \right),$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j \neq k \neq i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой 7.38 из [1], из которой для компактного пространства G/H легко выводится равенство

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) = -\frac{1}{2} \sum_i ([X, X_i]_p, [Y, X_i]_p) - \frac{1}{2} B(X, Y) \\ + \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_p, X) ([X_i, X_j]_p, Y), \end{aligned}$$

где $\{X_i\}$ — ортонормированный относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ базис в p . Поскольку в нашем случае

$$[p_1, p_2] \subset p_3, \quad [p_1, p_3] \subset p_2, \quad [p_2, p_3] \subset p_1,$$

то $\text{Ric}(p_i, p_j) = 0$, т. е. модули p_1 , p_2 и p_3 попарно ортогональны относительно формы Риччи метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Далее, для выбранного нами базиса получаем

$$\begin{aligned} d_i r_i = -\frac{1}{2x_i} \sum_{\alpha} B(e_i^{\alpha}, e_i^{\alpha}) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ 1 \leq j, k \leq 3}} (\langle [e_i^{\alpha}, e_j^{\beta}], e_k^{\gamma} \rangle)^2 \frac{x_k}{x_i x_j} \\ + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ 1 \leq j, k \leq 3}} (\langle [e_j^{\beta}, e_k^{\gamma}], e_i^{\alpha} \rangle)^2 \frac{x_i}{x_j x_k} \\ = \frac{d_i}{2x_i} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq 3} \begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} \frac{x_k}{x_i x_j} + \frac{1}{4} \sum_{1 \leq j, k \leq 3} \begin{bmatrix} i \\ jk \end{bmatrix} \frac{x_i}{x_j x_k}. \end{aligned}$$

Учитывая симметричность символов $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ и то, что среди $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ лишь два символа отличны от 0 (равны A), получаем второе утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть $A = 0$ и λ_i — произвольные положительные числа, $i \in \{1, 2, 3\}$. Тогда существует метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$, для которой $(r_1, r_2, r_3) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях леммы $r_i = \frac{1}{2x_i}$, и достаточно положить $x_i = \frac{1}{2\lambda_i}$. В частности, стандартная метрика будет эйнштейновой.

Далее, будем считать, что $A > 0$. Без ограничения общности можно считать также, что $d_1 \leq d_2 \leq d_3$. Пусть $\alpha_i = d_i/A$. Тогда $2 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ согласно лемме 1.

Лемма 4. Пусть $\alpha_1 = 2$. Тогда необходимо $\alpha_2 = \alpha_3$, и G/H допускает однородную метрику Эйнштейна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\alpha_1 = 2$, по лемме 1 $[h, p_1] = 0$ и $d_1 = \dim p_1 = 1$ в силу неприводимости модуля p_1 . Допустим, что $\alpha_2 < \alpha_3$, т. е. $d_2 < d_3$. Пусть $q = e_1^1$. Образ оператора $\text{ad}_q : p_2 \mapsto p_3$ не покрывает всего p_3 . Пусть s — ортонормированное дополнение в p_3 к $\text{Im}(\text{ad}_q)$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ввиду бинвариантности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ имеем $[s, p_2] = 0$. Пусть теперь модуль $\tilde{p} \subset p_3$ таков, что

для каждого $x \in \tilde{p}$ выполняется равенство $[x, p_2] = 0$. Так как $s \subset \tilde{p}$, то $\tilde{p} \neq 0$. Покажем, что модуль \tilde{p} ad_h -инвариантен. Пусть $t \in h$, $x \in \tilde{p}$, $y \in p_2$. Согласно тождеству Якоби

$$[t, [y, x]] + [y, [x, t]] + [x, [t, y]] = 0.$$

Поскольку $[y, x] \in p_1$, а $[t, y] \in p_2$, то $[y, [x, t]] = 0$ для любых t, x, y . Значит, $[p_2, [h, \tilde{p}]] = 0$, т. е. $[h, \tilde{p}] \subset \tilde{p}$. Так как p_3 — неприводимый модуль, а $\tilde{p} \neq 0$, то $\tilde{p} = p_3$ и $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = 0$, что мы исключили. Таким образом, $\alpha_2 = \alpha_3$. Пусть $\alpha = \alpha_2 = \alpha_3$. В силу леммы 2

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{4} \left(\frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_2}{x_1x_3} \right), \\ r_2 &= \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_3}{x_2x_1} \right), \\ r_3 &= \frac{1}{2x_3} + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_3x_1} \right). \end{aligned}$$

Найдем решение вышеприведенной системы уравнений при $(r_1, r_2, r_3) = (1, 1, 1)$. Пусть $x_1 = v$, $x_2 = x_3 = w$. Тогда

$$\frac{1}{2v} + \frac{1}{4} \left(\frac{v}{w^2} - \frac{2}{v} \right) = 1, \quad \frac{1}{2w} + \frac{1}{2\alpha} \left(-\frac{v}{w^2} \right) = 1.$$

Значит, достаточно положить $v = 4w^2$ и $\frac{1}{2w} = 1 + \frac{2}{\alpha}$, т. е.

$$w = \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)}, \quad v = \frac{\alpha^2}{(\alpha + 2)^2}.$$

Таким образом, при

$$x_1 = \frac{\alpha^2}{(\alpha + 2)^2}, \quad x_2 = x_3 = \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)}$$

мы получили $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, что и требовалось.

Лемма 5. Пусть $\alpha_i > 2$ для $i \in \{1, 2, 3\}$, тогда система уравнений

$$\begin{aligned} y_1(\alpha_2 y_3 + \alpha_3 y_2 - 2y_1) &= \lambda_1, \\ y_2(\alpha_3 y_1 + \alpha_1 y_3 - 2y_2) &= \lambda_2, \\ y_3(\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_1 - 2y_3) &= \lambda_3 \end{aligned}$$

имеет положительное решение y_i при любых $\lambda_i > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левые части уравнений системы представляют собой однородные многочлены степени 2 относительно y_i . Поэтому достаточно показать разрешимость системы с правой частью $(t\lambda_1, t\lambda_2, t\lambda_3)$ для некоторого t . Можно заведомо быть уверенным в том, что $t > 0$, поскольку

$$\begin{aligned} t \left(\frac{\lambda_1}{y_1} + \frac{\lambda_2}{y_2} + \frac{\lambda_3}{y_3} \right) &= (\alpha_2 y_3 + \alpha_3 y_2 - 2y_1) + (\alpha_3 y_1 + \alpha_1 y_3 - 2y_2) + (\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_1 - 2y_3) \\ &= (\alpha_3 + \alpha_2 - 2)y_1 + (\alpha_1 + \alpha_3 - 2)y_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - 2)y_3 > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 с естественной ориентацией точки $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$, $A_3 = (0, 0, 1)$ и треугольник Δ с вершинами в этих точках. Пусть $F: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ определена следующим образом:

$$F(y_1, y_2, y_3) = (y_1(\alpha_2 y_3 + \alpha_3 y_2 - 2y_1), y_2(\alpha_3 y_1 + \alpha_1 y_3 - 2y_2), y_3(\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_1 - 2y_3)).$$

Рассмотрим ориентированную прямую $L = \{(t\lambda_1, t\lambda_2, t\lambda_3) | t \in \mathbb{R}\}$. Покажем, что $F(\text{int } \Delta) \cap L \neq \emptyset$, откуда будет следовать утверждение леммы. Рассмотрим ориентированные кривые $\gamma_1 = \{(1-t, t, 0)\}$, $\gamma_2 = \{(0, 1-t, t)\}$, $\gamma_3 = \{(t, 0, 1-t)\}$, где $0 \leq t \leq 1$. Тогда кривая $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ является ориентированной границей треугольника Δ . Покажем, что коэффициент зацепления K кривых $F(\gamma)$ и L отличен от 0, $K(F(\gamma), L) \neq 0$. Отсюда в силу односвязности Δ получим, что $F(\text{int } \Delta) \cap L \neq \emptyset$.

Определим точки B_i следующим образом: $B_1 = F(A_1) = (-2, 0, 0)$, $B_2 = F(A_2) = (0, -2, 0)$, $B_3 = F(A_3) = (0, 0, -2)$. Пусть T — треугольник $B_1 B_2 B_3$. Положим $\phi_1 = \{-2(1-t, t, 0)\}$, $\phi_2 = \{-2(0, 1-t, t)\}$, $\phi_3 = \{-2(t, 0, 1-t)\}$, где $0 \leq t \leq 1$, $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ — ориентированная граница треугольника T . Очевидно, что $K(\phi, L) = 1$. Подсчитаем коэффициенты зацепления кривых $F(\gamma_i) - \phi_i$ и L :

$$\begin{aligned} F(\gamma_1) &= \{(1-t)(\alpha_3 t - 2(1-t)), t(\alpha_3(1-t) - 2t), 0\}, \\ F(\gamma_2) &= \{(0, (1-t)(\alpha_1 t - 2(1-t)), t(\alpha_1(1-t) - 2t)\}, \\ F(\gamma_3) &= \{(t(\alpha_2(1-t) - 2t), 0, (1-t)(\alpha_2 t - 2(1-t))\}. \end{aligned}$$

Поскольку кривая $F(\gamma_i) - \phi_i$ лежит в плоскости $x_j = 0$, где $i + 2 \equiv j \pmod{3}$, то $K(F(\gamma_i) - \phi_i, L)$ — коэффициент зацепления кривой $F(\gamma_i) - \phi_i$ относительно начала координат в плоскости $x_j = 0$. Кривая $F(\gamma_i)$ пересекает ось x_i в точке C_i при значении параметра $t = \frac{2}{2+\alpha_j}$. Легко убедиться в том, что ненулевая координата точки C_i равна

$$\frac{2}{2+\alpha_j} \left(\frac{\alpha_j^2 - 4}{2+\alpha_j} \right),$$

причем $\alpha_j^2 - 4 > 0$ в силу условия леммы. Поэтому $K(F(\gamma_i) - \phi_i, L) = -1$ для всех i . Таким образом,

$$K(F(\gamma), L) = K(F(\gamma) - \phi, L) + K(\phi, L) = -3 + 1 = -2 \neq 0,$$

что и доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Согласно леммам 3, 4 теорема верна при $A = 0$ и при $\alpha_1 = 2$. Пусть $\alpha_i > 2$ при всех i . По лемме 2

$$2\alpha_i r_i = \frac{\alpha_i}{x_i} + \left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k} \right)$$

для $i \neq j \neq k \neq i$. Сделаем замену переменных $\sqrt{x_i x_j^{-1} x_k^{-1}} = y_i$. Тогда вышеприведенные уравнения перепишутся в виде

$$2\alpha_i r_i = \alpha_i y_j y_k + y_i^2 - y_j^2 - y_k^2,$$

$i \neq j \neq k \neq i$. Найдем решение системы этих уравнений в положительных числах y_i для $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Складывая попарно уравнения при различных i , получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned} y_1(\alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_2 - 2y_1) &= 2(\alpha_2 + \alpha_3), \\ y_2(\alpha_3 y_1 + \alpha_1 y_3 - 2y_2) &= 2(\alpha_1 + \alpha_3), \\ y_3(\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_1 - 2y_3) &= 2(\alpha_1 + \alpha_2), \end{aligned}$$

которая имеет нужное нам решение с учетом леммы 5. Таким образом, найдется метрика (\cdot, \cdot) , для которой $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Теорема доказана.

В качестве примеров однородных пространств, которые согласно доказанной теореме допускают однородную метрику Эйнштейна, можно рассмотреть прямое произведение трех изотропно неприводимых пространств (лемма 3) или группу $SU(2)$ (лемма 4). Более интересными примерами являются пространства, сконструированные с помощью ортогональных и симплектических групп.

ПРИМЕР 1. Пусть $H = SO(a) \times SO(b) \times SO(c)$ с естественным вложением в $G = SO(a + b + c)$. Пространство G/H удовлетворяет условиям теоремы, следовательно, допускает однородную эйнштейнову метрику.

ПРИМЕР 2. Аналогично предыдущему можно рассмотреть $H = Sp(a) \times Sp(b) \times Sp(c)$ с естественным вложением в $G = Sp(a + b + c)$. Пространство G/H допускает однородную метрику Эйнштейна по доказанной теореме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессе А. Л. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

Статья поступила 6 июня 1998 г.

г. Рубцовск Алтайского края