



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. Yu. Kolotilina, On the normalizer of the diagonal subgroup in the general linear group over a ring,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1983, Volume 132, 114–118

<https://www.mathnet.ru/eng/zns14399>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

April 30, 2025, 16:34:26



О НОРМАЛИЗАТОРЕ ПОДГРУППЫ ДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ В
ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ НАД КОЛЬЦОМ

Известно, что над телом, отличным от поля \mathbb{F}_2 из двух элементов, нормализатор подгруппы диагональных матриц в полной линейной группе совпадает с группой мономиальных матриц. В этой заметке мы показываем, что при некоторых ограничениях на кольцо нормализатор подгруппы диагональных матриц $D(n, \Lambda)$ в полной линейной группе $GL(n, \Lambda)$ совпадает с группой обобщенно-мономиальных матриц, и приводим некоторые условия, достаточные для его мономиальности.

Пусть Λ - ассоциативное кольцо с единицей, Λ^* - группа обратимых элементов в Λ , $G = GL(n, \Lambda)$ - полная линейная группа степени $n \geq 2$ над Λ , $D = D(n, \Lambda)$ - подгруппа диагональных матриц в G и $N(n, \Lambda)$ - нормализатор подгруппы D в G . Матрицу $a = (a_{ij})$ из G мы называем обобщенно-мономиальной, если она представима в виде произведения $a = db$, где $d \in D$ и $b = (b_{ij})$ - ортогональная матрица, составленная из идемпотентов кольца Λ , такая, что $b_{ir} \Lambda b_{is} = b_{rj} \Lambda b_{sj} = 0$ при $r \neq s$, $1 \leq i, j, r, s \leq n$ т.е. различные элементы каждой строки и каждого столбца матрицы b попарно "сильно" ортогональны.

ТЕОРЕМА I. Нормализатор подгруппы диагональных матриц $D(n, \Lambda)$ в полной линейной группе $GL(n, \Lambda)$ степени $n \geq 2$ над кольцом Λ совпадает с группой обобщенно-мономиальных матриц, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\Lambda = R$ - коммутативное кольцо, в котором идеал, порожденный всеми элементами вида $\varepsilon - 1$, где $\varepsilon \in R^*$, совпадает с R ;
- 2) в кольце Λ существует такой элемент ε , что $\varepsilon(\varepsilon + 1) \in \Lambda^*$ и Λ аддитивно порождается своими обратимыми элементами;
- 3) Λ - полное кольцо матриц над ассоциативным кольцом с единицей степени ≥ 2 или D -сетевое кольцо $M(\mathcal{G})$ при $h(\mathcal{G}) \geq 2$ (относительно определений сети \mathcal{G} и связанных с ней объектов см., например, [1], [2]);
- 4) Λ - прямая сумма колец, удовлетворяющих одному из условий 1)-3).

Доказательству теоремы предположим следующие леммы.

ЛЕММА I. Пусть $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_{ij})$ - D -сеть идеалов порядка $n \geq 2$ над ассоциативным кольцом с единицей Λ , такая что $h(\mathcal{G}) \geq 2$. Тогда если матрица $a = (a_{ij})$ нормализует сетевую подгруппу $G(\mathcal{G})$, то

она нормализует и сетевое подкольцо $M(\mathcal{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = (g_{ij}) \in M(\mathcal{G})$; покажем, что $aga^{-1} \in M(\mathcal{G})$. Представим матрицу g в виде суммы

$$g = \sum_{r \neq s} (e + g_{rs} e_{rs}) - \sum_{r \neq s} e + \sum_r g_{rr} e_{rr}$$

(e - единичная матрица, e_{rs} - матричная единица, т.е. матрица, у которой на позиции (r, s) стоит единица, а на прочих позициях - нули). Поскольку единичная матрица и матрицы $e + g_{rs} e_{rs}$ при $r \neq s$ содержатся в $\mathcal{G}(\mathcal{G})$, а $a \in N(\mathcal{G})$, то

$$(aga^{-1})_{ij} \equiv \sum_r a_{ir} g_{rr} a'_{rj} \pmod{\mathcal{G}_{ij}}$$

(штрихами отмечены элементы обратной матрицы a^{-1}), так что нам достаточно показать, что $a_{ir} \Lambda a'_{rj} \subseteq \mathcal{G}_{ij}$ при $i \neq j$. Зафиксируем индекс r . Так как $h(\mathcal{G}) \geq 2$, найдется отличный от r индекс s , такой, что $\mathcal{G}_{rs} = \mathcal{G}_{sr} = \Lambda$. Воспользовавшись леммой 3 из [2] при $t=r$, получим, что $a_{ir} \Lambda a'_{rj} \subseteq \mathcal{G}_{ij}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы 1 для элементов матриц $a = (a_{ij})$ и $a^{-1} = (a'_{ij})$, нормализующих подгруппу диагональных матриц $D(n, \Lambda)$, имеют место соотношения

$$a_{ir} \Lambda a'_{rj} = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диагональную матрицу $d_r(\varepsilon) = -\varepsilon + (\varepsilon - 1)e_{rr}$, $\varepsilon \in \Lambda^*$. Тогда поскольку $a \in N(n, \Lambda)$, матрица $b = -\varepsilon a d_r(\varepsilon) a^{-1} = \varepsilon + \sum_{i \neq j} a_{ir} (\varepsilon - 1) a'_{rj} e_{ij}$ диагональна, а значит, при $i \neq j$ $a_{ir} (\varepsilon - 1) a'_{rj} = 0$. Если $\Lambda = \mathcal{R}$ - коммутативное кольцо и идеал, порожденный элементами вида $\varepsilon - 1$, где $\varepsilon \in \mathcal{R}^*$, совпадает с \mathcal{R} , то равенства (I) очевидны. Если в кольце Λ существует элемент ε , такой, что $\varepsilon(\varepsilon + 1) \in \Lambda^*$, то, рассмотрев наряду с матрицей b матрицу $c = \varepsilon a d_r(\varepsilon + 1) a^{-1}$, получим, что при $i \neq j$ $a_{ir} a'_{rj} = 0$, а поскольку для любого обратимого элемента $h \in \Lambda^*$ $a_{ir} (h - 1) a'_{rj} = 0$, то и $a_{ir} h a'_{rj} = 0$ при $i \neq j$. Так как по условию любой элемент кольца Λ представим в виде суммы обратимых, то равенства (I) справедливы и в этом случае.

Пусть теперь $\Lambda = M(\mathcal{G})$ - \mathcal{D} -сетевое подкольцо полного кольца матриц $M(m, \tilde{\Lambda})$ степени $m \geq 2$ над некоторым ассоциативным кольцом с единицей $\tilde{\Lambda}$, причем $h(\mathcal{G}) \geq 2$. Обозначим через $\Delta = \Delta(n, \Lambda)$ подкольцо диагональных матриц кольца $M(n, \Lambda)$, тогда $\Delta^* = \mathcal{D}$. Элемент α кольца $M(n, \Lambda)$, рассматриваемый как матрица

порядка $m \times n$ над кольцом $\tilde{\Lambda}$, будем обозначать через $\tilde{\alpha}$. Ясно, что множество $\tilde{\Delta} = \{\tilde{\alpha} : \alpha \in \Delta\}$ является сетевым подкольцом $M(\tilde{\tau})$ кольца $M(m \times n, \tilde{\Lambda})$, где $\tilde{\tau}$ - D-сеть идеалов порядка $m \times n$ над $\tilde{\Lambda}$ вида...

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{\sigma} \end{pmatrix}, \dots$$

причем $h(\tilde{\tau}) = h(\tilde{\sigma}) \geq 2$. Тогда $\tilde{D} = G(\tilde{\tau}) = [M(\tilde{\tau})]^*$. Так как $a D a^{-1} \subseteq D$, то и $\tilde{a} \tilde{D} \tilde{a}^{-1} \subseteq \tilde{D}$, т.е. $\tilde{a} \in N(\tilde{\tau})$. По лемме I имеем тогда, что $\tilde{a} M(\tilde{\tau}) \tilde{a}^{-1} = \tilde{a} \tilde{\Delta} \tilde{a}^{-1} \subseteq M(\tilde{\tau}) = \tilde{D}$, так что $a \Delta a^{-1} \subseteq \Delta$, откуда следует, что $a_{i_r} \Lambda a'_{r_j} = 0$ при $i \neq j$, т.е. равенства (I).

Нетрудно убедиться также, что если Λ - прямая сумма колец, над которыми матрицы, нормализующие соответствующие диагональные подгруппы, описываются условиями (I), то эти условия справедливы и для кольца Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Поскольку в силу леммы 2 для элементов матрицы $a = (a_{ij}) \in GL(n, \Lambda)$, нормализующей подгруппу $D(n, \Lambda)$, выполнены равенства (I), нам достаточно показать, что матрица, удовлетворяющая этим равенствам, обобщенно-мономиальна. Умножим очевидное равенство $1 = \sum_k a'_{rk} a_{kr}$ слева на a_{sr} , тогда в силу (I) получим, что $a_{sr} = a_{sr} a'_{rs} a_{sr}$. Умножив это последнее равенство слева на $a_{pr} \Lambda$ и справа на Λa_{sp} , $\lambda \in \Lambda$, и снова воспользовавшись (I), получим, что

$$\begin{aligned} a_{pr} \Lambda a_{sr} &= 0 \text{ при } p \neq s, \\ a_{sr} \Lambda a_{sp} &= 0 \text{ при } p \neq r. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим теперь матрицу $c = a a^t$ (a^t - транспонированная матрица a). В силу соотношений (2) матрица c диагональна и $c_{ii} = \sum_k a_{ik}^2 = \left(\sum_k a_{ik}\right)^2 \in \Lambda^*$, так что $d_i = \sum_k a_{ik} \in \Lambda^*$. Составим диагональную матрицу $d = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ и положим $b = d^{-1} a$, тогда ввиду (2)

$$b_{i_r} \Lambda b_{i_s} = b_{r_j} \Lambda b_{s_j} = 0 \text{ при } r \neq s, \quad (3)$$

так что различные элементы каждой строки и каждого столбца матрицы b попарно "сильно" ортогональны. Все элементы матрицы b являются идемпотентами, действительно, $\sum_k b_{ik} = \sum_k d_i^{-1} a_{ik} = d_i^{-1} \sum_k a_{ik} =$

$= a_i^{-1} d_i = 1$, а тогда в силу (3) $b_{ij} = b_{ij} \sum_k b_{ik} = b_{ij}^2$. Ортогональность матрицы b уже очевидна.

Для завершения доказательства остается заметить, что над любым кольцом обобщенно-мономиальные матрицы содержатся в нормализаторе диагональной подгруппы.

Обратимся теперь к рассмотрению условий, при которых нормализатор подгруппы диагональных матриц совпадает с группой собственно мономиальных матриц. Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если кольцо Λ удовлетворяет одному из условий 1)-3) теоремы I и не содержит ненулевых идемпотентов e и f таких, что $e \Lambda f = f \Lambda e = 0$, то нормализатор подгруппы диагональных матриц $D(n, \Lambda)$ в $GL(n, \Lambda)$ при $n \geq 2$ совпадает с группой мономиальных матриц.

ТЕОРЕМА 2. Если в кольце Λ существует такой элемент ε , что $\varepsilon(\varepsilon+1) \in \Lambda^*$ и Λ не содержит отличных от нуля идемпотентов e и f , таких, что $e \Lambda^* f = f \Lambda^* e = 0$, то нормализатор подгруппы диагональных матриц $D(n, \Lambda)$ в $GL(n, \Lambda)$ при $n \geq 2$ совпадает с группой мономиальных матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in N(n, \Lambda)$, повторяя рассуждение, использованное в доказательстве теоремы I, получим, что

$$a_{ir} \Lambda^* a'_{rj} = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (4)$$

Умножив равенство $1 = \sum_k a'_{rk} a_{kr}$ слева на a_{sr} , получим в силу (4) для всех r и s

$$a_{sr} = a_{sr} a'_{rs} a_{sr}, \quad (5)$$

откуда следует, что $f_{sr} = a_{sr} a'_{rs}$ - идемпотент, $1 \leq s, r \leq n$, и

$$f_{sr} \Lambda^* f_{sq} = 0 \quad \text{при } q \neq r. \quad (6)$$

Зафиксируем индекс s . Поскольку $\sum_q f_{sq} = \sum_q a_{sq} a'_{qs} = 1$, то найдется индекс r , такой, что $f_{sr} \neq 0$, а тогда в силу (6) в условиях теоремы получим, что $f_{sq} = 0$ при $q \neq r$, а, значит, $f_{sr} = a_{sr} a'_{rs} = 1$, так что элементы a_{sr} и a'_{rs} обратимы, но тогда ввиду (4) $a_{pr} = 0$ при $p \neq s$, а так как $f_{sq} = 0$, то из (5) следует, что и $a_{sq} = 0$ при $q \neq r$. Полученные равенства показывают, что матрица a мономиальна.

ЛЕММА 3. Пусть в кольце Λ правый идеал, порожденный всеми элементами вида $\xi - 1$, где $\xi \in \Lambda^*$, совпадает с Λ и пусть нормализатор $N(n, \Lambda/J)$ подгруппы диагональных матриц над фактор-кольцом кольца Λ по его радикалу Джекобсона J совпадает с группой мономиальных матриц. Тогда нормализатор $N(n, \Lambda)$ подгруппы диагональных матриц $D(n, \Lambda)$ в $GL(n, \Lambda)$ совпадает с группой мономиальных матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in N(n, \Lambda)$, тогда над Λ/J имеем $\bar{a} = \bar{d}(\bar{\pi})$, где черта означает образ при естественном эпиморфизме $GL(n, \Lambda) \rightarrow GL(n, \Lambda/J)$, $(\bar{\pi}) = \sum_i e_{ii} \pi(i)$, $\bar{\pi}$ - элемент симметрической группы S_n . Положим $a = \delta(\pi)$, тогда $\delta \equiv d \pmod{J}$ и $\bar{\delta} \in N(n, \Lambda)$; по лемме 8 из [1] имеем тогда, что $\bar{\delta} \in D$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в кольце Λ правый идеал, порожденный всеми элементами вида $\xi - 1$, где $\xi \in \Lambda^*$, совпадает с Λ и пусть фактор-кольцо $\bar{\Lambda} = \Lambda/J$ кольца Λ по его радикалу Джекобсона J не содержит отличных от нуля идемпотентов \bar{e} и \bar{f} , таких, что $\bar{e}\bar{\Lambda}^*\bar{f} = \bar{f}\bar{\Lambda}^*\bar{e} = 0$ и удовлетворяет одному из условий теоремы 1 или условию теоремы 2. Тогда нормализатор $N(n, \Lambda)$ подгруппы диагональных матриц $D(n, \Lambda)$ в $GL(n, \Lambda)$ при $n \geq 2$ совпадает с группой мономиальных матриц.

Теорема 3 следует непосредственно из теорем 1 и 2 и леммы 3.

Из описания нормализатора диагонали легко вытекает ее слабая нормальность в смысле Мюллера (см. [2]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть кольцо Λ не содержит поле F_3 в качестве прямого слагаемого и удовлетворяет одному из условий теоремы 1 или условию теоремы 2. Тогда при $n \geq 2$ подгруппа $D(n, \Lambda)$ слабо нормальна в $GL(n, \Lambda)$.

Литература

1. Б о р е в и ч З.И., В а в и л о в Н.А. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц. - Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1978, т. 148, с. 43-57.
2. Б о р е в и ч З.И., К о л о т и л и н а Л.Ю. О субнормализаторе сетевых подгрупп в полной линейной группе над кольцом. - Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, т. 116, с. 14-19.