Андрей В. Чернов, О дифференциальных играх в банаховом пространстве без дискриминации,
МТИП, 2023, том 15, выпуск 1, 90–127

https://www.mathnet.ru/mgta319

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.15, в.1, с. 90–127

УДК 517.988+517.977.8
ББК 22.18

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕЗ ДИСКРИМИНАЦИИ

Андрей В. Чернов
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Работа является продолжением исследований автора по вопросу существования ε-равновесия в смысле кусочно-программных стратегий в антагонистических играх, связанных с нелинейным неавтономным управляемым дифференциальным уравнением в банаховом пространстве и функционалом выигрыша достаточно общего вида. Так же, как и в ранее опубликованной работе по этой теме, получены достаточные условия существования ε-равновесия. Отличие в том, что на этот раз изучается игра без дискриминации игроков и без фиксирования вольтерровой цепочки. Методика применения полученных результатов иллюстрируется на примере игровой задачи, связанной с нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных псевдопараболического типа, описывающим эволюцию электрического поля в полупроводнике.

Ключевые слова: дифференциальная игра, нелинейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, вольтеррова цепочка, кусочно-программные стратегии, ε-равновесие.

Поступила в редакцию: 03.10.22 *После доработки*: 12.01.23 *Принята к публикации*: 20.03.23

1. Введение

Следуя [38,7], дадим краткую справку по истории развития теории дифференциальных игр, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Их изучение было инициировано Айзексом в [34,35], где он, хотя и не строго, вывел ассоциированное уравнение в частных производных (которое сегодня обозначают термином уравнение Гамильтона-Якоби-Айзекса) для функции цены дифференциальной игры. Строгое обоснование методов, использованных Айзексом, а также корректной постановки дифференциальной игры и существования ее значения, проводилось в [17,28,29,30,31,25,40]. Главный результат всех этих исследований состоял в следующем. Если выполняется так называемое условие Айзекса, то дифференциальная игра имеет значение. В Советском Союзе, параллельно этим исследованиям и независимо от них, Н.Н. Красовский и А.И. Субботин вместе со своими сотрудниками развили теорию позиционных дифференциальных игр. Их работа была описана в [6]. Английский перевод, включивший в себя также более поздние достижения и улучшения, см. в [36].

Интерес к теоретическим аспектам дифференциальных игр оживился после введения понятия вязкостного решения в работе [24]. Связь между вязкостным решением и дифференциальными играми впервые была изучена в [26,27]. В начале 80-х Berkovitz развил теорию [18,19], которая включает выбор в дискретные моменты времени и переход к пределу, но более непосредственным образом, чем у других авторов. Его определение стратегии — это комбинация «K стратегий», обсуждавшихся Айзексом [35], и нижних стратегий Friedman. Его определение выигрышей следует из теории Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [36]. В [18] он сконструировал седловую точку для дифференциальной игры фиксированной продолжительности. Характеризация значения игры как единственного вязкостного решения уравнения Айзекса была дана в [20]. Berkovitz также изучал игры обобщенного преследования-убегания [21] и игры на выживание [22] в этой постановке. В рамках, аналогичных теории Berkovitz, также исследовались игры с фазовыми ограничениями [32,33] и запаздыванием [37], а также игры с бесконечным горизонтом, в том числе в гильбертовом пространстве, см., например, [38].

Большинство подходов к изучению дифференциальных игр используют стратегии обратной связи и/или так называемую информационную дискриминацию игрока-противника, когда игрок знает заранее выбор управления противника, мгновенный или на некотором интервале времени. В [36,28,30] используются дискретные аппроксимации, основанные на стратегиях $u(x,t)$, $v(x,t)$ обратной связи, или контрстратегиях вида $u(x,t,v)$, $v(x,t,u)$. В [25,39] стратегия игрока вводится как функция времени, фактически, как оператор над множеством программных управлений противника. Кусочно-программные управления, используемые в [16,23] для исследования дифференциальных игр с неполной информацией, представляют собой промежуточный случай между управлениями обратной связи и программными управлениями.

Остановимся несколько подробнее на подходе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. Дифференциальная игра двух игроков с нулевой суммой (антагонистическая игра) на фиксированном временном промежутке описывается динамическим уравнением

$$\dot{x} = f(x,u,v,t), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in V \subset \mathbb{R}^s, \quad t \in [t_0;T] \qquad (1.1)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x^0 \qquad (1.2)$$

и функцией платы (функционалом)

$$J[x,u,v] = \int\limits_{t_0}^{T} L(x,u,v,t)\,dt + \Phi\big(x(T)\big) \to \min_u \max_v. \qquad (1.3)$$

Здесь x — n-мерный вектор состояния, u — m-мерный вектор управляющих переменных минимизирующего игрока P, v — s-мерный вектор управляющих переменных максимизирующего игрока E; U и V — выпуклые компактные множества ограничений на управления в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^s$.

В соответствии с [36], позиционное (с обратной связью) управление, например, игрока P задается однозначной функцией $u = u(x,t)$, удовлетворяющей ограничению (1.1), вместе с разбиением Δ интервала $[t_0;T]$:

$$\begin{aligned} &u = u(x,t), \quad u(x,t) \in U, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0;T], \\ &\Delta : t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Нет никаких других требований, налагаемых на $u(x,t)$, таких, как гладкость или непрерывность. Пара (1.4) будет обозначаться через u_Δ.

Зафиксируем некоторое программное управление $v(t)$, $t \in [t_0;T]$, игрока E, удовлетворяющее некоторым общим требованиям, например, кусочной непрерывности или интегрируемости по Лебегу.

Введем ломаную Эйлера как абсолютно непрерывную функцию $x_\Delta(t)$, удовлетворяющую на промежутках $[t_i;t_{i+1})$ дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} &\dot{x}_\Delta(t) = f\bigl(x_\Delta(t), u(x^i,t_i), v(t), t\bigr),\ t_i \le t < t_{i+1}, \\ &x_\Delta(t_0) = x^0,\ x^i = x(t_i),\ i = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Таким образом, управление игрока P на полуинтервале $[t_i;t_{i+1})$ постоянно и равно $u(x_i,t_i)$. Используя ломаную Эйлера $x_\Delta(t)$, кусочно постоянное управление u_Δ и программное $v(t)$, можно вычислить значение $J = J[x_\Delta, u_\Delta, v]$ функции платы (1.3).

Подобные построения могут быть выполнены для пары v_Δ, u, включая позиционное управление $v = v(x,t)$ игрока E, разбиение Δ в (1.4) и программное управление $u(t)$ игрока P.

Предположим, что выполнено следующее условие Айзекса минимаксной перестановки для всех рассматриваемых x, t и p (в [36] оно называется условием седловой точки в маленькой игре):

$$\begin{aligned} &H(x,p,t) = H^*(x,p,t) = H_*(x,p,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad p \in \mathbb{R}^n, \\ &H^*(x,p,t) = \min_{u\in U} \max_{v\in V} \Psi(x,u,v,t;p), \\ &H_*(x,p,t) = \max_{v\in V} \min_{u\in U} \Psi(x,u,v,t;p), \\ &\Psi(x,u,v,t;p) = \bigl\langle p, f(x,u,v,t)\bigr\rangle + L(x,u,v,t), \end{aligned} \tag{1.6}$$

$\Omega = \mathbb{R}^n \times [t_*;T)$. Условие (1.6) гарантирует, что значения $S^*(x,t)$ и $S_*(x,t)$ так называемых минимаксных и максиминных игр совпадают, определяя цену игры $S(x,t)$, и этот факт рассматривается как ситуация седловой точки в игре (1.1)–(1.3):

$$\begin{aligned} &S(x^0,t_0)=S^*(x^0,t_0)=S_*(x^0,t_0),\ (x^0,t_0)\in\Omega,\\ &S^*(x^0,t_0)=\inf_{u_\Delta}\sup_{v} J[x_\Delta,u_\Delta,v],\\ &S_*(x^0,t_0)=\sup_{v_\Delta}\inf_{u} J[x_\Delta,u,v_\Delta]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Экстремумы здесь берутся по всем позиционным управлениям $u(x,t)$, $v(x,t)$ и разбиениям (1.4) для всех натуральных чисел N и всех допустимых $u(t)$, $v(t)$. Величина $S^*(x^0,t_0)$ $(S_*(x^0,t_0))$ — минимальное (соотв., максимальное) значение функции платы, которое игрок P (соотв., игрок E) может гарантировать для себя в данном классе стратегий.

Установлено, что функция $S(x,t)$ непрерывна и при $t\to T-0$ удовлетворяет условию $S(x,t)\to\Phi(x)$.

С ценой игры $S(x,t)$ связана краевая задача

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\min_{u\in U}\max_{v\in V}\left(\left\langle\frac{\partial S}{\partial x},f(x,u,v,t)\right\rangle+L(x,u,v,t)\right)=$$

$$=\frac{\partial S}{\partial t}+\max_{v\in V}\min_{u\in U}\left(\left\langle\frac{\partial S}{\partial x},f(x,u,v,t)\right\rangle+L(x,u,v,t)\right)=$$

$$=\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(x,\frac{\partial S}{\partial x},t\right)=0,\quad (x,t)\in\Omega;\quad S(x,T)=\Phi(x). \tag{1.8}$$

где гамильтониан $H(x,p,t)$ определен в (1.6). Уравнение (1.8) называется уравнением Айзекса.

В [38] рассматривается антагонистическая дифференциальная игра с кусочно-программными стратегиями, понимаемыми в стиле Berkovitz, а по сути дела, аналогично [8, глава V]. Динамика описывается полулинейным эволюционным уравнением вида

$$\dot x(t)+Ax(t)=f(x(t),u(t),v(t)),\quad x(0)=x_0,$$

где u,v – управления игроков со значениями в метрических компактах U и V, соответственно; функция состояния $x(t)$ принимает значения в гильбертовом пространстве $\mathbb{E}$, A – генератор эволюционной полугруппы – максимальный монотонный линейный неограниченный оператор, функция f и позиционная функция выигрыша c предполагаются липшицевыми по фазовой переменной на всем пространстве

$\mathbb{E}$; $f : \mathbb{E} \times U \times V \to \mathbb{E}$; $c : \mathbb{E} \times U \times V \to \mathbb{R}$. При использовании аппроксимаций типа Иосиды (Yosida) для инфинитезимального генератора A линейными ограниченными операторами, доказываются теоремы о сходимости для функции значения аппроксимирующей игры к функции значения исходной игры. За счет этого конструируются приближенные равновесные стратегии в форме обратной связи для исходной игры. Здесь также используется минимаксное условие Айзекса следующего вида:

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U}\Psi(x,u,v;p) = \min_{u\in U}\max_{v\in V}\Psi(x,u,v;p) \quad \forall\, p\in\mathbb{E}, \quad \forall\, x\in\mathbb{E},$$

$$\Psi(x,u,v;p) = \big\langle -p, f(x,u,v) - c(x,u,v)\big\rangle.$$

Таким образом, гильбертово пространство здесь участвует неслучайно, поскольку в банаховом пространстве скалярное произведение не определено, а кроме того, используются аппроксимации Иосиды для инфинитезимального генератора A.

В [8, глава V] описывается иной подход, при использовании кусочно программных стратегий как пары (разбиение отрезка, оператор предыстории). За счет автономности уравнений динамики игра сводится к позиционной, в которой игроки выбирают точки в соответствующих множествах достижимости на каждом шаге по времени. Основная идея этого подхода, в общих чертах, состоит в следующем. Прежде всего, рассматриваются вспомогательные игры, которые отличаются от исходной игры фиксированием разбиения промежутка времени и введением дискриминации одного из игроков. В таких играх, за счет фиксированной очередности ходов, а также компактности множеств достижимости, удается применить аналог известного алгоритма Куна (для конечных многошаговых игр с полной информацией — существование положения равновесия и равновесных стратегий в таких играх, включая способ их построения, хорошо известный классический факт). После этого доказывается, что при стремлении мелкости разбиения к нулю различие значений вспомогательных игр стремится к нулю. Собственно говоря, за счет этого и доказывается существование ε-равновесия и значения игры. Отметим, во-первых, что в [8, глава V] условие Айзекса как таковое не используется, хотя и выполнено, поскольку динамика разделена по игрокам. Во-вторых, доказывается существование не «чистого» равновесия, а только лишь ε-равновесия. В связи с этими двумя обстоятельствами возникает вопрос, будет ли необходимо условие Айзекса в аналогичной ситуации, когда динамика не разделена по игрокам? Из анализа рассуждений [8, глава V] можно заметить следующее. Если рассматривать вспомогательные игры (с дискриминацией), то в них существование ε-равновесия удается доказывать за счет фиксированной очередности ходов при ограниченности множеств альтернатив или хотя бы функционалов выигрышей на этих множествах, см., например, [9, лемма 1], [10, теорема 2.3.1, с.163]. Если при этом удается доказать, что различие значений вспомогательных игр стремится к нулю при стремлении к нулю мелкости разбиения промежутка времени, то дальше остается лишь воспроизвести последующие рассуждения из [8, глава V], и тем самым, установить существование ε-равновесия в исходной игре. На этих соображениях и основаны построения данной статьи.

При обобщении подхода [8, глава V] на дифференциальные игры в банаховом пространстве у нас естественным образом возникают некоторые технические сложности, связанные с оценкой приращения выигрышей при сдвиге управления на малый шаг во вспомогательной игре, поскольку речь идет об оценке приращений решений уравнения динамики и функционалов выигрышей. Преодолению именно этих трудностей, по сути дела, и посвящена данная статья. Что касается предположения о компактности множеств достижимости, эта проблема снимается у нас за счет того, что игроки выбирают не точки в множествах достижимости, а непосредственно шаговые управления. Собственно говоря, компактность использовалась, чтобы доказать существование чистого равновесия в позиционной игре с очередностью. Если доказывать существование ε-равновесия, то достаточно ограниченности; алгоритм построения стратегий подобен алгоритму Куна. Вообще, стоит отметить, что для позиционных игр с фиксированной очередностью алгоритм Куна для построения ε-оптимальных стратегий удается обобщать и в том случае, когда имеется лишь ограниченность функционалов выигрышей сверху [9, лемма 1], либо их полунепрерывность сверху [10, теорема 2.3.1, с.163].

Данная работа продолжает начатое в [14] исследование по вопросу существования ε-равновесия в антагонистических играх, связанных с нелинейным неавтономным управляемым дифференциальным уравнением в банаховом пространстве и функционалом выигрыша достаточно общего вида. Там же см. соответствующую библиографию. Как указано в [14], речь идет об удобной форме описания игр, связанных с управляемыми распределенными системами достаточно широкого класса. Так же, как и в [14], в данной статье развивается известный для сосредоточенных систем подход, основанный на понятии кусочно-программных стратегий [8, глава V]. Отметим, что в [14] дифференциальное уравнение в банаховом пространстве понимается как соответствующее интегральное уравнение. Для последнего на основе вольтерровости оператора вводится понятие кусочно-программных стратегий в исследуемой игре для случая дискриминации второго игрока и фиксированной вольтерровой цепочки, то есть фиксированного разбиения промежутка времени. После этого в [14] доказывается теорема о существовании ситуации ε-равновесия в игре с фиксированной вольтерровой цепочкой и дискриминацией второго игрока. Здесь этот результат обобщается на игру без дискриминации игроков и нефиксированную вольтеррову цепочку. Основной план доказательства существования ε-равновесия имеет много схожего с [8, глава V], где исследуется антагонистическая дифференциальная игра, связанная с двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями, управляемыми противниками. Но имеются и существенные отличия. Чтобы пояснить их, прежде всего, опишем кратко общую идеологию классического подхода [8, глава V] к доказательству существования ε-равновесия. Исходной предпосылкой указанного подхода является аксиоматизация некоторых свойств множеств достижимости (управляемых уравнений), рассматриваемых как многозначные функции начального состояния и продолжительности. А именно, предполагается их компактность, а также непрерывность по совокупности аргументов в метрике Хаусдорфа. Кроме того, предполагается, что управляемые уравнения являются стационарными. Для удобства восприятия материала статьи опишем кратко основные этапы доказательства [8, глава V].

I. Промежуток изменения времени $[0;T]$ разбивается на отрезки равной длины $\delta = T/2^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Это разбиение фиксируется и рассматриваются вспомогательные 2^ν-шаговые игры (подыгры) трех типов. В игре первого типа на очередном шаге оба игрока, находясь в своих текущих позициях выбирают поочередно (сначала второй, потом – первый) элемент из своего множества достижимости, отвечающего этой позиции и шагу δ по времени; оба игрока знают свой выбор и выбор противника на всех предыдущих шагах, а первый игрок еще и выбор противника на текущем шаге. Иными словами, игра первого типа – это игра с дискриминацией второго игрока. Игра второго типа отличается от нее тем, что игроки меняются ролями. Игра третьего типа (она используется лишь для исследования связи между играми первых двух типов на этапе III) отличается от игры второго типа тем, что на последнем шаге делает ход лишь дискриминируемый (первый) игрок. После того, как указанные игры определены, доказывается, что каждая из них имеет решение, причем значение одной не превосходит значения другой.

II. Доказывается, что при измельчении разбиения получаемые последовательности значений игр являются монотонными и ограниченными, и следовательно, сходятся.

III. Доказывается равенство предельных (при $\nu \to \infty$) значений игр первого и второго типов.

IV. Полученные результаты обобщаются на случай измельчающихся разбиений промежутка $[0;T]$ произвольного вида.

V. Исходя из полученного равенства предельных значений, доказывается существование ε-равновесия.

Наиболее важным является этап III. Именно здесь возникают основные технические трудности при обобщении подхода [8, глава V] на антагонистические игры, связанные с нелинейным неавтономным управляемым дифференциальным уравнением в банаховом пространстве. В [8, глава V] основная идея рассуждений на этом этапе заключается в том, что игру второго типа можно аппроксимировать игрой первого типа за счет малого изменения начального состояния и продолжительности. Здесь существенным образом используется указанное ранее предположение о непрерывности (многозначных функций) множеств достижимости в метрике Хаусдорфа, а также стационарность управляемых систем.

Для нелинейных уравнений с частными производными подход, опирающийся на свойства множеств достижимости, проблематичен, поскольку: для распределенных систем и для представляющих их дифференциальных уравнений в банаховом пространстве оперировать множествами достижимости было бы затруднительно; указанные свойства плохо изучены; элементом множества достижимости здесь уже является элемент, вообще говоря, бесконечномерного банахова пространства, значит, компактность множества достижимости — это компактность множества в бесконечномерном пространстве; и т.д. и т.п. Поэтому в данной статье мы используем вместо варьирования входных параметров управляемой системы (для сосредоточенных систем — это начальное состояние и продолжительность по времени; для распределенных — это начально-краевые условия и многомерное множество независимых переменных) *сдвиг управления* вдоль оси времени, с обнулением управления там, где оно оказывается не определено после сдвига. При этом исследование на этапе III зависимости значений игр указанных выше трех типов от входных параметров заменяется исследованием зависимости функционалов от сдвига управления. С другой стороны, доказательство равномерно непрерывной зависимости решения управляемого уравнения и соответствующего значения функционала (выигрыша) от сдвига управления вдоль цепочки (на которой основывается доказательство равенства предельных значений игр с дискриминацией по отдельности разных игроков), в изучаемой ситуации выливается в отдельную самостоятельную проблему.

Отметим, что материал данной статьи по основной своей идеологии перекликается с материалом [11], где аналогичная схема применялась к исследованию вольтерровых функционально-операторных игр. Однако как раз при решении технических проблем[1], связанных с этапом III, прежняя методика оказывается по ряду причин неприменимой. Так, например, если раньше правую часть $f(t,x,u)$ можно было понимать как функцию, измеримую по $t \in \Pi \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывную по $(x,u) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$, что давало возможность использовать теорему Скорца Драгони, на этот раз функция $f(t,x,u)$ понимается

[1]Собственно в [11] дается лишь некоторый набросок рассуждений по этой теме; подробные доказательства см. в [13].

как функция времени $t \in [0;T]$ и переменных $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{V}$, где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{V}$ — произвольные банаховы пространства, то есть представляет собой оператор, и указанной теоремой уже нельзя воспользоваться. В [11] можно было делать предположения о некоторых свойствах компактности операторной составляющей правой части; здесь это уже проблематично. И т.д. Поэтому в данной статье пришлось разработать новую технику рассуждений — именно в указанном месте. Естественно, что на этом и будет сделан основной акцент. В остальной части техника доказательства существования ε-равновесия почти дословно может быть перенесена из [11]. Вообще, в работе [14] автор высказался в том смысле, что переход к рассмотрению ситуации без дискриминации и без фиксации цепочки может быть произведен по схеме [11]. Но, как уже было сказано выше, при детальном ознакомлении с предметом выяснилось, что ситуация не так безоблачна, как казалось. Поэтому автор ощутил некоторый моральный долг внести необходимую ясность в этот вопрос, результатом чего и явилось написание данной статьи.

Методика применения полученных результатов иллюстрируется на примере игровой задачи, связанной с нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных псевдопараболического типа, описывающим эволюцию электрического поля в полупроводнике. Этот пример уже был ранее рассмотрен в [14]. Однако, в виду того, что здесь нам приходится предъявлять дополнительные требования к изучаемому абстрактному уравнению, для того, чтобы упомянутый пример оставался актуальным, необходимо показать, что этим новым требованиям тоже удается удовлетворить. Именно на этом при описании примера мы и сосредоточимся.

2. Управляемое уравнение и некоторые его свойства

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ — банаховы пространства, $U_i \subset \mathcal{V}_i$ — ограниченное множество, $i = 1,2$, $a \in \mathcal{X}$ — заданный элемент, $\mathcal{D}_i$ — множество функций $[0;T] \to \mathcal{V}_i$, принимающих значения в множестве U_i, $i = 1,2$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$; $w \in \mathcal{D}$ — управление; $f : [0;T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{X}$.

По аналогии с [3,глава V, §1] рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве:

$$\frac{d\varphi}{dt} = f\big(t, \varphi(t), w(t)\big),\ t \in (0;T],\ \varphi(0) = a, \quad \varphi \in \mathbb{C}^1\big([0;T]; \mathcal{X}\big). \quad (2.1)$$

Примем $E = \mathbb{C}\big([0;T];\mathcal{X}\big)$. В случае, когда правая часть принадлежит классу E для всех $\varphi \in E$, $w \in \mathcal{D}$, задача (2.1) равносильна интегральному уравнению (с интегралом Бохнера):

$$\varphi(t) = a + \int_0^t f\big(s, \varphi(s), w(s)\big)\, ds, \quad t \in [0;T]; \quad \varphi \in E. \tag{2.2}$$

Для уравнения (2.2), будем рассматривать правые части, удовлетворяющие более слабому требованию, и введем понятие п.в.-решения исходной задачи. Назовем функцию $\varphi(t)$ со значениями в $\mathcal{X}$ абсолютно непрерывной, если для нее существуют $b \in \mathcal{X}$ и $z \in L_1\big([0;T];\mathcal{X}\big)$ такие, что

$$\varphi(t) = b + \int_0^t z(s)\, ds, \quad \forall\, t \in [0;T]. \tag{2.3}$$

Соответствующий класс функций обозначим $\mathbb{AC}\big([0;T];\mathcal{X}\big)$. Если $\varphi \in \mathbb{AC}\big([0;T];\mathcal{X}\big)$ и выполнено (2.3), то для п.в. $t \in [0;T]$ существует производная $\varphi'(t) = z(t)$, см. [3, глава IV, § 1, теорема 1.7].

Лемма 2.1. $\mathbb{AC}\big([0;T];\mathcal{X}\big) \subset \mathbb{C}\big([0;T];\mathcal{X}\big)$. *Более того, пространство* $\mathbb{AC}\big([0;T];\mathcal{X}\big)$ *является банаховым относительно нормы:*

$$\|\varphi\|_{\mathbb{AC}\left([0;T];\mathcal{X}\right)} = \|\varphi\|_{\mathbb{C}\left([0;T];\mathcal{X}\right)} + \|\varphi'\|_{L_1\left([0;T];\mathcal{X}\right)}.$$

Доказательство леммы 2.1 см. в [14].

Далее будем предполагать, что правая часть f удовлетворяет следующим условиям.

- $\mathbf{F}_1$) Для всех $w \in \mathcal{D}$, $\varphi \in E$ отображение $[0;T] \ni t \to f\big(t, \varphi(t), w(t)\big)$ принадлежит классу $L_1\big([0;T];\mathcal{X}\big)$.

- $\mathbf{F}_2$) Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t, M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $w \in U_1 \times U_2$, $\varphi, \psi \in \mathcal{X}$, $\|\varphi\|_{\mathcal{X}}$, $\|\psi\|_{\mathcal{X}} \le M$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем:

$$\big\|f(t,\varphi,w) - f(t,\psi,w)\big\|_{\mathcal{X}} \le \mathcal{N}(t,M)\, \big\|\varphi - \psi\big\|_{\mathcal{X}}.$$

F$_3$) Существует функция $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(t, M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $w \in \mathcal{D}$, $\varphi \in E$, $\|\varphi\|_E \le M$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем:

$$\big\| f\big(t, \varphi(t), w(t)\big) \big\|_{\mathcal{X}} \le \mathcal{N}_1(t, M)\,.$$

Более того, предполагаем, что задача Коши

$$\frac{d}{dt}\,\beta(t) = \mathcal{N}_1\big(t, \|a\|_{\mathcal{X}} + \beta(t)\big), \quad t \in (0;T]; \quad \beta(0) = 0,$$

имеет решение – неотрицательную абсолютно непрерывную функцию $\beta(t)$, $t \in [0;T]$.

Следуя [14], решение уравнения (2.2) будем искать в классе E. В силу сделанных предположений и леммы 2.1, всякое решение класса E на самом деле будет принадлежать классу $\mathbb{AC}\big([0;T];\mathcal{X}\big)$. Это и есть п.в.-решение исходной задачи (2.1). Положим

$$B(w)[\varphi](t) = a + \int\limits_0^t f\big(s, \varphi(s), w(s)\big)\, ds, \quad t \in [0;T]; \quad \varphi \in E.$$

Теперь уравнение (2.2) можно переписать в виде:

$$\varphi = B(w)[\varphi], \quad \varphi \in E; \quad w \in \mathcal{D}.$$

Лемма 2.2. *Пусть элемент $a \in \mathcal{X}$ произвольно фиксирован, а правая часть f удовлетворяет условиям* **F**$_1$) – **F**$_3$). *Тогда для любого управления $w \in \mathcal{D}$ уравнение (2.2) имеет решение $\varphi \in \mathbb{AC}\big([0;T],\mathcal{X}\big)$, удовлетворяющее оценке $\big\|\varphi(t)\big\|_{\mathcal{X}} \le \|a\|_{\mathcal{X}} + \beta(t) \equiv \beta_*(t)$, $t \in [0;T]$. Более того, это единственное решение в пространстве E, причем уравнение (2.2) не может иметь и более одного локального решения.*

Доказательство леммы 2.2 см. в [14].

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия* **F**$_1$), **F**$_2$). *Предположим, что для управления $w = \overline{w} \in \mathcal{D}$ уравнение (2.2) имеет решение $\varphi = \overline{\varphi} \in E$. Тогда найдутся числа $\varepsilon > 0$, $C > 0$ такие, что для всякого $w \in \mathcal{D}$, удовлетворяющего неравенству*

$$\gamma(w, \overline{w}) = \big\| B(w)\overline{\varphi} - B(\overline{w})\overline{\varphi} \big\|_E \le \varepsilon,$$

уравнение (2.2) *имеет, и притом единственное, решение* $\varphi = \varphi_u \in E$. *Более того,*

$$\|\varphi - \overline{\varphi}\|_E \le C\,\gamma(w, \overline{w}).$$

Доказательство леммы 2.3 см. в [15, теорема 6]. Из анализа этого доказательства видно, что константа C на самом деле не зависит и от выбора $\overline{w} \in \mathcal{D}$ (за счет равномерности по $w \in \mathcal{D}$ оценки из условия $\mathbf{F}_2$)). В лемме 2.3 нас интересует не существование решения, поскольку оно следует из леммы 2.2, а именно оценка приращения решения.

Как видно из лемм 2.2, 2.3, условия $\mathbf{F}_1$)–$\mathbf{F}_3$) требуются для корректного определения дифференциальной игры. Следующий далее комплекс условий нам понадобится при доказательстве равномерной непрерывной зависимости решения уравнения (2.2) от сдвига управлений игроков вдоль оси времени, что, в свою очередь, необходимо при реализации этапа III, см. введение.

$\mathbf{F}_4$)
$$\sup_{\substack{t \in [|\tau|; T-|\tau|] \\ x \in E(\beta_*) \\ w \in \mathcal{D}}} \left\| \int_{|\tau|}^{t} \Big(f\big(s+\tau, x(s), w(s)\big) - f\big(s, x(s), w(s)\big) \Big) ds \right\|_{\mathcal{X}} \to 0$$

при $\tau \to 0$, где $E(\beta_*) = \Big\{ x \in E:\ \big\|x(t)\big\|_{\mathcal{X}} \le \beta_*(t) \Big\}$.

$\mathbf{F}_5$) При некотором $p \in [1; +\infty)$ множество $\mathcal{D}_2$ предкомпактно в пространстве $L_p\big([0;T]; \mathcal{V}_2\big)$, и соответственно, при сопряженном p' существует функция $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(t, M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\mathcal{N}_2(., M) \in L_{p'}[0;T]$, неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $u \in U_1$, $v_1, v_2 \in U_2$, $x \in \mathcal{X}$, $\|x\|_{\mathcal{X}} \le M$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем:

$$\big\|f(t, x, u, v_1) - f(t, x, u, v_2)\big\|_{\mathcal{X}} \le \mathcal{N}_2(t, M)\,\|v_1 - v_2\|_{\mathcal{V}_2}.$$

Замечание 2.1. Для выполнения условия $\mathbf{F}_4$) достаточно (но не необходимо) непрерывности функции $f(t, x, w)$ по переменной t, равномерно по $t \in [0;T]$, $x \in E(\beta_*)$, $w \in \mathcal{D}$. С учетом объявленной выше цели, это довольно естественное требование. Либо достаточно, чтобы нашлась функция $\mathcal{N}_3 = \mathcal{N}_3(t, M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $w \in U_1 \times U_2$, $x \in E$, $\|x\|_{\mathcal{X}} \le M$, п.в. $s_1, s_2 \in [0;T]$, имеем:

$$\big\|f(s_1, x, w) - f(s_2, x, w)\big\|_{\mathcal{X}} \le \mathcal{N}_3(s_1, M)\,\sigma\big(|s_1 - s_2|\big),$$

где $\sigma(\tau) \to 0$ при $\tau \to +0$.

Замечание 2.2. В условии $\mathbf{F}_5$) управления первого и второго игрока можно поменять ролями.

Замечание 2.3. Условие $\mathbf{F}_5$) можно заменить следующим.

$\mathbf{F}'_5$) Управления u и v первого и второго игроков аддитивно разделены в функции f, то есть

$$f(t,x,u,v) = f_1(t,x,u) + f_2(t,x,v),$$

$t \in [0;T]$, $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{V}_1$, $v \in \mathcal{V}_2$.

3. Определение дифференциальной игры и стратегий игроков

Далее будем считать, что уравнение (2.2) управляется игроками 1 и 2 с помощью соответствующих управлений $u \in \mathcal{D}_1$, $v \in \mathcal{D}_2$.

Для заданного разбиения отрезка $[0;T]$ вида

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = T$$

и соответственно, множеств $H_0 = \emptyset$, $H_1 = [0;\tau_1]$, $H_i = [0;\tau_i]$, $i = \overline{2,k}$, кортеж $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\}$ будем называть *вольтерровой цепочкой* оператора правой части уравнения (2.2), а также вольтерровой цепочкой в нашей игре. Будем рассматривать также разности множеств $h_i = (\tau_{i-1};\tau_i] = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$. Число $\delta = \max\limits_{i=\overline{1,k}}(\tau_i - \tau_{i-1})$ естественно назвать *мелкостью вольтерровой цепочки.* По вольтерровой цепочке однозначно определяется *вольтеррово разбиение* $\mathcal{T}^{(-)} = \{H_i \setminus H_{i-1},\ i = \overline{1,k}\}$, и наоборот.

Пусть $\mathcal{Z}$ — некоторое банахово пространство.

Целью игры является: для первого игрока – максимизация, а для второго – минимизация выигрыша, заданного в виде функционала:

$$J[u,v] = \mathcal{F}\left[\int_0^T F\big(t, \varphi[u,v](t), u(t), v(t)\big)\,dt\right],$$

где $\mathcal{F}$ — линейный непрерывный функционал, определенный на $\mathcal{Z}$, то есть $\mathcal{F} \in \mathcal{Z}^*$; $\varphi[u,v] \in E$ — решение уравнения (2.2), отвечающее выбору управлений $u \in \mathcal{D}_1$, $v \in \mathcal{D}_2$.

Относительно функции F мы предполагаем, что она удовлетворяет условиям, аналогичным предположениям $\mathbf{F}_1) - \mathbf{F}_4)$, (однако разрешимости задачи Коши в условии $\mathbf{F}_3)$ не требуется, требуется только оценка), а также одному из предположений $\mathbf{F}_5)$ или $\mathbf{F}'_5)$, относительно функции f, с тем отличием, что она действует в пространство $L_1\big([0;T];\mathcal{Z}\big)$, а не в $L_1\big([0;T];\mathcal{X}\big)$.

Уравнение (2.2) предполагается известным обоим противникам (игра с полной информацией). Из леммы 2.2 вытекает, что игра сформулирована корректно.

Заметим, что для всякого вольтеррова разбиения

$$\mathcal{T}^{(-)} = \big\{h_i = H_i \setminus H_{i-1} :\ i = \overline{1,k}\big\},$$

состоящего из k элементов, и управления $w = (u, v)$ уравнение (2.2) распадается в систему k уравнений вида:

$$\varphi_i(t) = a_i + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} f\big(s, \varphi_i(s), w_i(s)\big)\, ds, \quad \varphi_i \in E_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{3.1}$$

где приняты обозначения: $E_i = \mathbb{C}\big(h_i;\mathcal{X}\big)$,

$$a_i = a + \sum_{j=1}^{i-1} \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f\big(s, \varphi_j(s), w_j(s)\big)\, ds, \quad w_j \in \mathcal{D}^{(j)},$$

$\mathcal{D}^{(j)}$ — множество сужений функций из $\mathcal{D}$ на промежуток h_j.

В свою очередь, систему (3.1) можно решать последовательно от 1-го уравнения к k-му: зная решение 1-го уравнения φ_1, находим решение 2-го уравнения φ_2; зная решения φ_1, φ_2 первых двух уравнений, находим решение 3-го уравнения φ_3 и т.д. Соответственно этому, i-м шагом в игре на заданной цепочке $\mathcal{T}$ для первого игрока называем задачу выбора управления $u_i \in \mathcal{D}_1^{(i)}$, для второго игрока — задачу выбора управления $v_i \in \mathcal{D}_2^{(i)}$. По выбранным шаговым управлениям $w_i = (u_i, v_i)$ определяется решение $\varphi_i[w_i]$ i-го уравнения системы (3.1). Как показано в [14], решение $\varphi_i[w_i]$ на i-м шаге существует и единственно как решение i-го уравнения системы (3.1).

Определение *кусочно-программных стратегий* $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}''$ первого и второго игроков, соответственно, в случае фиксированной цепочки $\mathcal{T}$ аналогично [14]; однако на этот раз производится очевидная модификация, связанная с отсутствием дискриминации второго игрока. А именно, *кусочно-программной стратегией* первого игрока в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ (то есть в игре Γ при фиксированной цепочке $\mathcal{T}$) называем отображение $\mathcal{P}'$, ставящее в соответствие каждому $h_i \in \mathcal{T}^{(-)}$ и наборам[2] $\{u_j \in \mathcal{D}_1^{(j)} : j = \overline{1, i-1}\}$, $\{v_j \in \mathcal{D}_2^{(j)} : j = \overline{1, i-1}\}$, управление $u_i \in \mathcal{D}_1^{(i)}$. Кусочно-программной стратегией второго игрока в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ будем называть отображение $\mathcal{P}''$, ставящее в соответствие каждому $h_i \in \mathcal{T}^{(-)}$ и наборам $\{u_j \in \mathcal{D}_1^{(j)} : j = \overline{1, i-1}\}$, $\{v_j \in \mathcal{D}_2^{(j)} : j = \overline{1, i-1}\}$ управление $v_i \in \mathcal{D}_2^{(i)}$.

Соответственно, всевозможные пары вида $\{\mathcal{T}', \mathcal{P}'\}$ $\{\mathcal{T}'', \mathcal{P}''\}$ называем кусочно-программными стратегиями первого и второго игроков в исследуемой игре Γ без дискриминации и без фиксирования вольтерровой цепочки. При различающихся $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ «наложением» их друг на друга получаем (более мелкую) общую вольтеррову цепочку $\mathcal{T}$, после чего пары $\{\mathcal{T}', \mathcal{P}'\}$ $\{\mathcal{T}'', \mathcal{P}''\}$ заменяются на естественным образом получаемые их аналоги при замене $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ на $\mathcal{T}$.

Следует отметить, что определяемое понятие вводится по сути дела аналогично понятию кусочно-программной стратегии в дифференциальной игре, связанной с обыкновенными дифференциальными уравнениями, из [8, глава V].

Множество всех кусочно-программных стратегий первого игрока обозначим $\Sigma^{(1)}$, второго – $\Sigma^{(2)}$. Управления

$$u(t) = \bigl\{u_i(t),\ t \in h_i;\ i = \overline{1, k}\bigr\}, \quad t \in [0; T],$$
$$v(t) = \bigl\{v_i(t),\ t \in h_i;\ i = \overline{1, k}\bigr\}, \quad t \in [0; T],$$

реализовавшиеся в результате выбора пары стратегий

$$\sigma = \bigl\{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}\bigr\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)},$$

будем обозначать u_σ, v_σ, а соответствующее им решение уравнения (2.2), построенное описанным выше движением по цепочке, – φ_σ. Тогда выигрыш первого игрока в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ будет определяться как

$$K[\sigma] = J[u_\sigma, v_\sigma] = \mathcal{F}\left[\int_0^T F\bigl(t, \varphi_\sigma(t), u_\sigma(t), v_\sigma(t)\bigr)\, dt\right].$$

[2]При наличии информационной дискриминации второго игрока, в дополнение к этим наборам, еще и элементу $v_i \in \mathcal{D}_2^{(i)}$.

Напомним (см., например, [8]), что для любого $\varepsilon > 0$ пара (чистых) стратегий $\sigma_\varepsilon = \{\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)}$ называется *ε-оптимальной* в игре Γ, если для всех $\sigma = \{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)}$ выполняется неравенство

$$K\Big[\sigma^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}\Big] - \varepsilon \le K\Big[\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}\Big] \le K\Big[\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma^{(2)}\Big] + \varepsilon.$$

Если такая пара σ_ε существует, то говорят, что игра имеет ситуацию ε-равновесия.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3.1. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ игра Γ имеет ситуацию ε-равновесия (стратегии игроков и значение игры).*

В §5 доказано более сильное утверждение – теорема 5.3.

4. О некоторых свойствах уравнения (2.2)

При исследовании игры Γ мы существенным образом будем опираться на свойства уравнения (2.2), которые формулируются в данном разделе.

Теорема 4.1. *При сделанных выше предположениях имеем:*

$$\sup_{w=(u,v)\in\mathcal{D}} \Big\| \varphi_{(S_\tau u, v)} - \varphi_{(u,v)} \Big\|_E \to 0, \quad \sup_{w=(u,v)\in\mathcal{D}} \Big\| \varphi_{(u, S_\tau v)} - \varphi_{(u,v)} \Big\|_E \to 0 \tag{4.1}$$

при всех $|\tau| \to +0$;

$$\sup_{w=(u,v)\in\mathcal{D}} \Big| J\big[S_\tau u, S_\lambda v\big] - J\big[u, v\big]\Big| \to 0 \quad \text{при всех} \quad |\tau| \to +0,\ |\lambda| \to +0\,. \tag{4.2}$$

Доказательство. 1. Докажем первое из соотношений (4.1). Без ограничения общности, будем считать, что $\tau > 0$. Положим $w = (u, v)$, $\widetilde{w} = (S_\tau u, v)$, $\varphi = \varphi_w$, $M = \|\beta_*\|_{\mathbb{C}[0;T]}$. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В соответствии с леммой 2.3 нам достаточно оценить величину $\big\| d(\widetilde{w}, w) \big\|_E$, где

$$d(\widetilde{w}, w)(t) = \big\{ B(\widetilde{w})\varphi - B(w)\varphi \big\}(t) =$$

$$= \int\limits_0^t \Big\{ f\big(s, \varphi_w(s), S_\tau u(s), v(s)\big) - f\big(s, \varphi_w(s), u(s), v(s)\big) \Big\}\, ds.$$

Далее будем проводить доказательство в предположении, что выполнено условие $\mathbf{F}_5$). Если вместо него выполнено условие $\mathbf{F}'_5$), доказательство очевидным образом упрощается, поскольку в этом случае разность

$$f\big(s,\varphi_w(s),S_\tau u(s),v(s)\big)-f\big(s,\varphi_w(s),u(s),v(s)\big)=$$

$$=f_1\big(s,\varphi_w(s),S_\tau u(s)\big)-f_1\big(s,\varphi_w(s),u(s)\big),$$

и тем самым, зависимость от v просто уходит — вместо функции f выступает f_1.

В соответствии с леммой 2.2 и условием $\mathbf{F}_3$) при $t\leq\tau$ можем считать, что $\big\|d(\widetilde{w},w)(t)\big\|_{\mathcal{X}}\leq\varepsilon$ при $|\tau|\leq\delta_0(\varepsilon)$ (подробнее см. дальше для аналогичной ситуации при оценке r_1). Поэтому далее будем считать, что $t>\tau$.

Согласно первой части условия $\mathbf{F}_5$), множество $\mathcal{D}_2$ предкомпактно в пространстве $L_p\big([0;T];\mathcal{V}_2\big)$. Поэтому в нем существует конечная ε-сеть $S_\varepsilon=\big\{v_j,\ j=\overline{1,\nu}\big\}$. Тем самым, найдется номер $i\in\overline{1,\nu}$ такой, что

$$\|v-v_i\|_{L_p\left([0;T];\mathcal{V}_2\right)}<\varepsilon.$$

Пользуясь второй частью условия $\mathbf{F}_5$), оценкой нормы интеграла Бохнера, а также неравенством Гельдера, получаем:

$$\big\|d(\widetilde{w},w)\big\|_E\leq\big\|d_i(S_\tau u,u)\big\|_E+2\int\limits_0^T\mathcal{N}_2(t,M)\,\big\|v(t)-v_i(t)\big\|_{\mathcal{V}_2}\,dt\leq$$

$$\leq\big\|d_i(S_\tau u,u)\big\|_E+2\varepsilon\big\|\mathcal{N}_2(.,M)\big\|_{L_{p'}\left([0;T];\mathcal{V}_2\right)}\leq$$

$$\leq\max_{j=\overline{1,\nu}}\big\|d_j(S_\tau u,u)\big\|_E+2\varepsilon\big\|\mathcal{N}_2(.,M)\big\|_{L_{p'}\left([0;T];\mathcal{V}_2\right)}$$

где

$$d_j(S_\tau u,u)(t)=\int\limits_0^t\Big[f_j\big(s,\varphi_w(s),S_\tau u(s)\big)-f_j\big(s,\varphi_w(s),u(s)\big)\Big]\,ds,$$

$$f_j(s,x,u)=f\big(s,x,u,v_j(s)\big).$$

Делая замену $s+\tau=\xi$, перепишем

$$\int\limits_0^t f_j\big(s,\varphi_w(s),S_\tau u(s)\big)\,ds=\int\limits_\tau^{t+\tau} f\big(\xi-\tau,\varphi_w(\xi-\tau),u(\xi),v_j(\xi-\tau)\big)\,d\xi=$$

$$=\int\limits_\tau^{t} f\big(\xi-\tau,\varphi_w(\xi-\tau),u(\xi),v_j(\xi-\tau)\big)\,d\xi+r_1=$$

$$=\int\limits_\tau^{t} f\big(\xi-\tau,\varphi_w(\xi-\tau),u(\xi),v_j(\xi)\big)\,d\xi+r_1+r_2,$$

где

$$r_1=\int\limits_{t-\tau}^{t} f_j\big(s,\varphi_w(s),S_\tau u(s)\big)\,ds,\quad r_2=\int\limits_\tau^{t}\Delta_j(\xi)\,d\xi,$$

$$\Delta_j(\xi)=f\big(\xi-\tau,\varphi_w(\xi-\tau),u(\xi),v_j(\xi)\big)-f\big(\xi-\tau,\varphi_w(\xi-\tau),u(\xi),v_j(\xi-\tau)\big).$$

Пользуясь леммой 2.2 и условием $\mathbf{F}_3$), получаем:

$$\|r_1\|_{\mathcal{X}}\le\int\limits_{t-\tau}^{t}\mathcal{N}_1(s,M)\,ds.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, найдется число $\delta_1(\varepsilon)>0$ такое, что $\|r_1\|_{\mathcal{X}}\le\varepsilon$ для всех $|\tau|<\delta_1$, равномерно по $t\in[\tau;T]$

Согласно второй части условия $\mathbf{F}_5$) можем оценить:

$$\|r_2\|_{\mathcal{X}}\le\int\limits_\tau^{t}\mathcal{N}_2(s,M)\,\big\|v_j(s-\tau)-v_j(s)\big\|_{\mathcal{V}_2}\,ds\le$$

$$\le\big\|\mathcal{N}_2(.,M)\big\|_{L_{p'}\left([0;T];\mathcal{V}_2\right)}\big\|S_{-\tau}v_j-v_j\big\|_{L_p\left([0;T];\mathcal{V}_2\right)}\equiv\gamma_j(\tau).$$

Согласно [3, глава IV, лемма 1.5, с.164],

$$\big\|S_{-\tau}v_j-v_j\big\|_{L_p\left([0;T];\mathcal{V}_2\right)}\to 0\quad\text{при}\quad\tau\to 0.$$

Поэтому можем считать, что

$$\gamma(\tau)=\max_{j=\overline{1,\nu}}\gamma_j(\tau)<\varepsilon\quad\text{для всех}\quad|\tau|<\delta_2(\varepsilon).$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{\tau}^{t} f\big(\xi-\tau,\varphi_w(\xi-\tau),u(\xi),v_j(\xi)\big)\,d\xi = \int\limits_{\tau}^{t} f\big(\xi-\tau,\varphi_w(\xi),u(\xi),v_j(\xi)\big)d\xi+r_3,$$

где

$$r_3 = \int\limits_{\tau}^{t} \widetilde{\Delta}_j(\xi)\,d\xi,$$

$$\widetilde{\Delta}_j(\xi) = f\big(\xi-\tau,\varphi_w(\xi-\tau),u(\xi),v_j(\xi)\big) - f\big(\xi-\tau,\varphi_w(\xi),u(\xi),v_j(\xi)\big).$$

Пользуясь условием $\mathbf{F}_2$), получаем:

$$\|r_3\|_{\mathcal{X}} \le \int\limits_{\tau}^{t} \mathcal{N}(s-\tau,M)\,\big\|\varphi_w(s-\tau)-\varphi_w(s)\big\|_{\mathcal{X}}\,ds.$$

Заметим, что согласно условию $\mathbf{F}_3$),

$$\big\|\varphi_w(s)-\varphi_w(s-\tau)\big\|_{\mathcal{X}} = \left\|\int\limits_{s-\tau}^{s} f\big(t,\varphi_w(t),w(t)\big)\,dt\right\|_{\mathcal{X}} \le$$

$$\le \int\limits_{s-\tau}^{s} \Big\|f\big(t,\varphi_w(t),w(t)\big)\Big\|_{\mathcal{X}}\,dt \le \int\limits_{s-\tau}^{s} \mathcal{N}_1(t,M)\,dt.$$

Таким образом, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, заключаем, что $\|r_3\|_{\mathcal{X}} \le \varepsilon$ для всех $|\tau| < \delta_3(\varepsilon)$.

Исходя из проведенных выкладок, получаем представление:

$$d_j(S_\tau u,u)(t) = \int\limits_{\tau}^{t} \Big[f_j\big(s-\tau,\varphi_w(s),u(s)\big)-f_j\big(s,\varphi_w(s),u(s)\big)\Big]\,ds+R_j(t,\tau),$$

где

$$\max_{j=\overline{1,\nu}}\big\|R_j(t,\tau)\big\|_{\mathcal{X}} \le 4\varepsilon$$

для всех $|\tau| < \delta_4(\varepsilon) = \min\limits_{k=\overline{1,3}} \delta_k(\varepsilon)$.

Пользуясь наконец условием $\mathbf{F}_4$), заключаем, что найдется число $\delta_5(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $|\tau| < \delta_5(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\big\|d(\widetilde{w},w)\big\|_E \le 5\varepsilon + 2\varepsilon\big\|\mathcal{N}_2(.,M)\big\|_{L_{p'}\left([0;T];\mathcal{V}_2\right)}.$$

Теперь для произвольного $\sigma > 0$ остается лишь подобрать $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$, исходя из условия

$$5\varepsilon + 2\varepsilon \big\| \mathcal{N}_2(.,M) \big\|_{L_{p'}\left([0;T];\mathcal{V}_2\right)} < \sigma.$$

Это и означает, что выполнено первое из соотношений (4.1).

2. Доказательство второго соотношения (4.1) тривиально вычленяется из пункта 1.

3. Докажем соотношение (4.2). Рассмотрим

$$\Big| J\big[S_\tau u, S_\lambda v] - J[u,v]\big] \Big| \le \Big| J\big[S_\tau u, S_\lambda v] - J[u, S_\lambda v]\big] \Big| + \Big| J\big[u, S_\lambda v] - J[u,v]\big] \Big|,$$

где

$$J\big[S_\tau u, S_\lambda v] - J[u, S_\lambda v]\big] = \mathcal{F}\left[\int\limits_0^T \Delta_{\tau,\lambda} F(t)\, dt\right],$$

$$\Delta_{\tau,\lambda} F = F\big(t, \varphi_{(S_\tau u, S_\lambda v)}(t), S_\tau u(t), S_\lambda v(t)\big) - F\big(t, \varphi_{(u, S_\lambda v)}(t), u(t), S_\lambda v(t)\big);$$

$$J\big[u, S_\lambda v] - J[u,v]\big] = \mathcal{F}\left[\int\limits_0^T \Delta_\lambda F(t)\, dt\right],$$

$$\Delta_\lambda F = F\big(t, \varphi_{(u, S_\lambda v)}(t), u(t), S_\lambda v(t)\big) - F\big(t, \varphi_{(u,v)}(t), u(t), v(t)\big).$$

Что касается первого слагаемого, то пользуясь результатами пункта 1, мы можем заменить выражение $\varphi_{(S_\tau u, S_\lambda v)}$ на $\varphi_{(u, S_\lambda v)}$, со сколь угодно малой погрешностью $\varepsilon > 0$ для всех достаточно малых $|\tau|$. Учитывая непрерывность функционала $\mathcal{F}$, дальнейшее построение оценок отличается лишь заменами f на F и v на $S_\lambda v$ от рассуждений пункта 1.

Аналогичным образом, для второго слагаемого, пользуясь результатами пункта 1, мы можем заменить выражение $\varphi_{(u, S_\lambda v)}$ на $\varphi_{(u,v)}$, со сколь угодно малой погрешностью $\varepsilon > 0$ для всех достаточно малых $|\tau|$. Учитывая непрерывность функционала $\mathcal{F}$, дальнейшее построение оценок отличается лишь заменами f на F и τ на λ от ситуации пункта 2. $\square$

Для всех $u, v \in \mathcal{D}_1$ и числа $\delta > 0$ определим множества

$$\Pi_{u,v} = \Big\{ t \in [0;T] : \, u(t) \ne v(t) \Big\},$$

$$\mathcal{D}^2_{1,\delta} \equiv \Big\{(u,v)\in\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_1 :\ \mathrm{mes}\,\Pi_{u,v}<\delta\Big\},$$

и по аналогии, множества $\mathcal{D}^2_{2,\delta}$, $\mathcal{D}^2_{\delta}$.

Теорема 4.2. *При сделанных выше предположениях имеем:*

$$\sup_{(u,\widehat{u})\in\mathcal{D}^2_{1,\delta},(v,\widehat{v})\in\mathcal{D}^2_{2,\delta}} \|\varphi_{(\widehat{u},\widehat{v})}-\varphi_{(u,v)}\|_E \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta\to+0\,, \tag{4.3}$$

$$\sup_{(u,\widehat{u})\in\mathcal{D}^2_{1,\delta},(v,\widehat{v})\in\mathcal{D}^2_{2,\delta}} \Big|J\big[\widehat{u},\widehat{v}\big]-J[u,v]\big]\Big| \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta\to+0\,. \tag{4.4}$$

Доказательство. 1. Докажем соотношение (4.3). Примем $w=(u,v)$, $\widehat{w}=(\widehat{u},\widehat{v})$, $\varphi=\varphi_w$, $M=\|\beta_*\|_{\mathbb{C}[0;T]}$. В соответствии с леммой 2.3 нам достаточно оценить величину $\big\|d(\widehat{w},w)\big\|_E$, где

$$d(\widehat{w},w)(t)=\big\{B(\widehat{w})\varphi-B(w)\varphi\big\}(t)=$$

$$=\int_0^t\Big\{f\big(s,\varphi_w(s),\widehat{w}(s)\big)-f\big(s,\varphi_w(s),w(s)\big)\Big\}\,ds=$$

$$=\int_{\Pi_{\widehat{w},w}}\Big\{f\big(s,\varphi_w(s),\widehat{w}(s)\big)-f\big(s,\varphi_w(s),w(s)\big)\Big\}\,ds.$$

Пользуясь условием $\mathbf{F}_3$), получаем:

$$d(\widehat{w},w)(t)\le 2\int_{\Pi_{\widehat{w},w}}\mathcal{N}_1(s,M)\,ds.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{mes}\,\Pi_{\widehat{w},w}=\mathrm{mes}\,\big(\Pi_{\widehat{u},u}\cup\Pi_{\widehat{v},v}\big)\le 2\delta,$$

остается лишь воспользоваться абсолютной непрерывностью интеграла Лебега.

2. Докажем соотношение (4.4). Рассмотрим

$$\big|J[\widehat{w}]-J[w]\big|=\mathcal{F}\left[\int_0^T\Big\{F\big(t,\varphi_{\widehat{w}}(t),\widehat{w}(t)\big)-F\big(t,\varphi_w(t),w(t)\big)\Big\}\,dt\right]=$$

$$= \mathcal{F}\left[\int\limits_0^T \Big\{F\big(t,\varphi_{\widehat{w}}(t),\widehat{w}(t)\big) - F\big(t,\varphi_w(t),\widehat{w}(t)\big)\Big\}\,dt\right] +$$

$$+\mathcal{F}\left[\int\limits_0^T \Big\{F\big(t,\varphi_w(t),\widehat{w}(t)\big) - F\big(t,\varphi_w(t),w(t)\big)\Big\}\,dt\right].$$

Что касается второго слагаемого, его оценка проводится аналогично пункту 1. Для первого слагаемого, пользуясь условием $\mathbf{F}_2$) в применении к функции F, получаем:

$$\left\|\int\limits_0^T \Big\{F\big(t,\varphi_{\widehat{w}}(t),\widehat{w}(t)\big) - F\big(t,\varphi_w(t),\widehat{w}(t)\big)\Big\}\,dt\right\|_{\mathcal{X}} \le$$

$$\le \int\limits_0^T \Big\|F\big(t,\varphi_{\widehat{w}}(t),\widehat{w}(t)\big) - F\big(t,\varphi_w(t),\widehat{w}(t)\big)\Big\|_{\mathcal{X}}\,dt \le$$

$$\le \int\limits_0^T \mathcal{N}(t,M)\,\big\|\varphi_{\widehat{w}}(t) - \varphi_w(t)\big\|_{\mathcal{X}}\,dt \le \|\varphi_{\widehat{w}} - \varphi_w\|_E \int\limits_0^T \mathcal{N}(t,M)\,dt.$$

После этого остается лишь воспользоваться результатами пункта 1. □

5. Вспомогательные игры

Определим игру Γ_1, отличающуюся от игры Γ дискриминацией второго игрока. А именно, будем считать, что в игре Γ_1 на каждом шаге игроку 1 известен как свой выбор, так и выбор противника на всех предыдущих шагах и на данном шаге, а игроку 2 – свой выбор на данном шаге, а также свой выбор и выбор противника на всех предыдущих шагах. Подыгру игры Γ_1, в которой цепочка $\mathcal{T}$ одинакова для обоих игроков и фиксирована, будем обозначать $\Gamma_1(\mathcal{T})$, а множества стратегий в ней – $\Sigma_1^{(i)}(\mathcal{T})$, $i = 1, 2$. Аналогично определим игру $\Gamma_2(\mathcal{T})$, в которой игроки меняются ролями (в смысле дискриминации). О понятии кусочно-программных стратегий в играх $\Gamma_1(\mathcal{T})$, $\Gamma_2(\mathcal{T})$ см. [14].

Далее мы собираемся оценить разность $\big|\overline{K}_1(\mathcal{T}) - \overline{K}_2(\mathcal{T})\big|$ между значениями игр $\Gamma_1(\mathcal{T})$, $\Gamma_2(\mathcal{T})$ на эквидистантной цепочке $\mathcal{T}$.

Лемма 5.1. *Пусть X, Y – заданные множества произвольной природы, $\Phi(.;.) : X^n \times Y^n \to \mathbb{R}$ – ограниченная функция, причем существует число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\max\Big\{\big|\Phi(\vec{x};\vec{y})-\Phi(\vec{x}_-;\vec{y})\big|, \big|\Phi(\vec{x};\vec{y})-\Phi(\vec{x};\vec{y}_+)\big|, \big|\Phi(\vec{x};\vec{y})-\Phi(\vec{x}_+;\vec{y}_+)\big|\Big\} \le \varepsilon$$

для всех $\vec{x} \equiv \{x_1, \dots, x_n\} \in X^n$, $\vec{y} \equiv \{y_1, \dots, y_n\} \in Y^n$ и соответствующих им

$$\vec{x}_- \equiv \big\{x_2, \dots, x_n, 0\big\},\ \vec{x}_+ \equiv \big\{x_1, \dots, x_{n-1}, 0\big\},\ \vec{y}_+ \equiv \big\{y_1, \dots, y_{n-1}, 0\big\}.$$

Тогда

$$0 \le \inf_{y_1\in Y} \sup_{x_1\in X} \dots \inf_{y_n\in Y} \sup_{x_n\in X} \Phi(\vec{x};\vec{y}) - \sup_{x_1\in X} \inf_{y_1\in Y} \dots \sup_{x_n\in X} \inf_{y_n\in Y} \Phi(\vec{x};\vec{y}) \le 3\,\varepsilon\,.$$

Доказательство леммы 5.1 см. в [12, лемма 6.5]. Отметим, что его нетрудно получить, исходя из известных оценок [1, глава 1, лемма п.3.6], [8, глава I, теорема п.2.2].

Пусть каждому $\delta \in (0;1]$ поставлена в соответствие эквидистантная цепочка $\mathcal{T}_\delta = \big\{H_{\delta,i},\ i = \overline{0,k_\delta}\big\}$ мелкости δ.

Зафиксируем произвольно $\delta = \dfrac{T}{k}$ и примем $k = k_\delta$ и т.д. (то есть для упрощения записи индекс δ будем опускать). Заметим, что каждое из шаговых управлений $u_i \in \mathcal{D}_1^{(i)}$ можно заменить управлением $\widetilde{u}_i \in \mathcal{D}_1^{(1)}$ по правилу $u_i(t) = \widetilde{u}_i\big(t-(i-1)\,\tau\big)$ при $t \in h_i = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$. Положим $\widetilde{u} \equiv \big\{\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_k\big\} \in X^k$, где $X \equiv \mathcal{D}_1^{(1)}$; $\vec{u}$ – управление $u \in \mathcal{D}_1$, реализованное как последовательность шаговых управлений $u_j \in \mathcal{D}_1^{(j)}$, $j = \overline{1,k}$. Аналогичным образом определим $\widetilde{v} \equiv \big\{\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_k\big\} \in Y^k$, где $Y \equiv \mathcal{D}_2^{(1)}$; $\vec{v}$ – управление $v \in \mathcal{D}_2$, реализованное как последовательность шаговых управлений $v_j \in \mathcal{D}_2^{(j)}$, $j = \overline{1,k}$.

В результате исходный функционал можно понимать как функционал, определенный на множестве $X^k \times Y^k$:

$$J[\vec{u},\vec{v}] = \widetilde{J}[\widetilde{u},\widetilde{v}], \quad \widetilde{u} \in X^k, \quad \widetilde{v} \in Y^k\,.$$

Теорема 5.1. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ игры $\Gamma_1(\mathcal{T})$ и $\Gamma_2(\mathcal{T})$ имеют ситуацию ε-равновесия. При этом значения игр определяются формулами*

$$\overline{K}_1(\mathcal{T}) = \inf_{\widetilde{v}_1\in Y} \sup_{\widetilde{u}_1\in X} \dots \inf_{\widetilde{v}_k\in Y} \sup_{\widetilde{u}_k\in X} \widetilde{J}[\widetilde{u},\widetilde{v}]\,, \tag{5.1}$$

$$\overline{K}_2(\mathcal{T}) = \sup_{\widetilde{u}_1 \in X} \inf_{\widetilde{v}_1 \in Y} \ldots \sup_{\widetilde{u}_k \in X} \inf_{\widetilde{v}_k \in Y} \widetilde{J}[\widetilde{u}, \widetilde{v}] \,. \tag{5.2}$$

Доказательство. Игра $\Gamma_1(\mathcal{T})$ изучалась в [14]. Там было доказано [14, теорема 3.1], что $\forall\, \varepsilon > 0$ игра $\Gamma_1(\mathcal{T})$ имеет ситуацию ε-равновесия, причем значение игры определяется формулой:

$$\overline{K}_1(\mathcal{T}) = \inf_{v_1 \in \mathcal{D}_2^{(1)}} \sup_{u_1 \in \mathcal{D}_1^{(1)}} \ldots$$

$$\ldots \inf_{v_k \in \mathcal{D}_2^{(k)}} \sup_{u_k \in \mathcal{D}_1^{(k)}} \mathcal{F}\left[\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} F\big(t, \varphi_j[\vec{u}_j, \vec{v}_j](t), u_j(t), v_j(t)\big)\, dt\right].$$

То же самое можно переписать в виде:

$$\overline{K}_1(\mathcal{T}) = \inf_{v_1 \in \mathcal{D}_2^{(1)}} \sup_{u_1 \in \mathcal{D}_1^{(1)}} \ldots \inf_{v_k \in \mathcal{D}_2^{(k)}} \sup_{u_k \in \mathcal{D}_1^{(k)}} J[\vec{u}, \vec{v}].$$

Поскольку, согласно нашим построениям,

$$J[\vec{u}, \vec{v}] = \widetilde{J}[\widetilde{u}, \widetilde{v}], \quad \widetilde{u} \in X^k, \quad \widetilde{v} \in Y^k,$$

отсюда получаем представление (5.1). Утверждение для игры $\Gamma_2(\mathcal{T})$ и представление (5.2) получаем совершенно аналогично, поскольку игроки просто меняются ролями. □

Теорема 5.2. *Разность* $\overline{K}_1(\mathcal{T}_\delta) - \overline{K}_2(\mathcal{T}_\delta) \to +0$ *при* $\delta \to +0$.

Доказательство. Сравним значения (см. обозначения из формулировки леммы 5.1) $\widetilde{J}[\widetilde{u}, \widetilde{v}]$ и $\widetilde{J}[\widetilde{u}_-, \widetilde{v}]$. Различие этих значений порождается тем, что в исходной задаче к управлению u применяется оператор сдвига S_τ на величину $\tau = \delta$: $(S_\tau u)(t) = [u](t + \tau)$, где $[u]$ — продолжение функции u любым допустимым значением (для простоты считаем — нулем) на всю числовую ось. Мера симметрической разности $[0; T]\Delta[\tau; T + \tau]$ будет сколь угодно мала при всех достаточно малых τ.

Сравним значения $\widetilde{J}[\widetilde{u}, \widetilde{v}]$ и $\widetilde{J}[\widetilde{u}, \widetilde{v}_+]$. Различие этих значений порождается тем, что в исходной задаче управление v зануляется на последнем элементе разбиения h_k, но $\operatorname{mes} h_k$ будет мала при малых τ. То же самое можно заметить и для значений $\widetilde{J}[\widetilde{u}, \widetilde{v}]$ и $\widetilde{J}[\widetilde{u}_+, \widetilde{v}_+]$.

Таким образом, в соответствии с теоремами 4.1, 4.2, справедливы оценки

$$\left|\widetilde{J}[\widetilde{u},\widetilde{v}] - \widetilde{J}[\widetilde{u}_-,\widetilde{v}]\right| \le \psi(\delta),$$

$$\left|\widetilde{J}[\widetilde{u},\widetilde{v}] - \widetilde{J}[\widetilde{u},\widetilde{v}_+]\right| \le \psi(\delta),$$

$$\left|\widetilde{J}[\widetilde{u},\widetilde{v}] - \widetilde{J}[\widetilde{u}_+,\widetilde{v}_+]\right| \le \psi(\delta),$$

равномерные по $\widetilde{u} \in X^k$, $\widetilde{v} \in Y^k$, с некоторой функцией

$$\psi(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Это означает, что для функции $\widetilde{J}[\widetilde{u},\widetilde{v}]$ выполнены условия леммы 5.1. В таком случае, применяя теорему 5.1, и в частности, равенства (5.1), (5.2), получаем оценку:

$$\left|\overline{K}_1(\mathcal{T}_\delta) - \overline{K}_2(\mathcal{T}_\delta)\right| \le 3\psi(\delta).$$

□

Теорема 5.2 реализует аналог этапа III из [8, глава V], указанного во введении. Оценки из леммы 5.1 при этом заменяют исследование соотношений между играми первого, второго и третьего типов, упомянутых во введении.

Теорема 5.3. *В игре* Γ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует ситуация* ε-*равновесия и справедливо равенство* $\operatorname{Val}\Gamma = \lim\limits_{r\to\infty} \overline{K}_1(\mathcal{T}_{\delta_r})$, *где* $\mathcal{T}_{\delta_r}^{(-)}$ *– любая последовательность измельчающихся разбиений отрезка* $[0;T]$.

Доказательство. Здесь нужно лишь провести рассуждения по схеме [8, глава V, п.п.3.4–3.7] (их подробное описание см. в [12]). А именно, теорема 5.2 является прямым аналогом [12, теорема 6.2]. Поэтому остается лишь практически дословно воспроизвести рассуждения [12, лемма 6.7, § 7, теорема 7.1], заменив ссылку на [12, теорема 6.2] ссылкой на теорему 5.2. □

Теорема 3.1 является непосредственным следствием теоремы 5.3.

6. Случай двух независимо управляемых уравнений

Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ — банаховы пространства, $U_i \subset \mathcal{V}_i$ — ограниченное множество, $i = 1, 2$, $a \in \mathcal{X}_1$, $b \in \mathcal{X}_2$ — заданные элементы, $\mathcal{D}_i$ — множество функций $[0;T] \to \mathcal{V}_i$, принимающих значения в множестве U_i, $i = 1, 2$, $u \in \mathcal{D}_1$, $v \in \mathcal{D}_2$ — управления первого и второго игроков; $f : [0;T] \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{V}_1 \to \mathcal{X}_1$, $g : [0;T] \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{X}_2$ — функции, удовлетворяющие условиям вида $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_4$).

По аналогии с [3,глава V, §1] рассмотрим две задачи Коши в банаховом пространстве, управляемые соответственно первым и вторым игроками:

$$\frac{d\varphi}{dt} = f\bigl(t, \varphi(t), u(t)\bigr),\ t \in (0;T],\ \varphi(0) = a, \quad \varphi \in \mathbb{AC}\bigl([0;T];\mathcal{X}_1\bigr); \quad (6.1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = g\bigl(t, \psi(t), v(t)\bigr),\ t \in (0;T],\ \psi(0) = b, \quad \psi \in \mathbb{AC}\bigl([0;T];\mathcal{X}_2\bigr), \quad (6.2)$$

понимая их решения в смысле п.в..

Примем $E_1 = \mathbb{C}\bigl([0;T];\mathcal{X}_1\bigr)$, $E_2 = \mathbb{C}\bigl([0;T];\mathcal{X}_2\bigr)$. Так же, как и выше, решения задач (6.1), (6.2) понимаются, фактически, как решения в E_1, E_2 соответствующих интегральных уравнений с интегралом Бохнера.

Пусть $\mathcal{Z}$ — некоторое банахово пространство.

Целью игры является: для первого игрока – максимизация, а для второго – минимизация выигрыша, заданного в виде функционала:

$$J[u,v] = \mathcal{F}\left[\int_0^T F\bigl(t, \varphi[u](t), \psi[v](t), u(t), v(t)\bigr)\,dt\right],$$

где $\mathcal{F}$ — линейный непрерывный функционал, определенный на $\mathcal{Z}$, то есть $\mathcal{F} \in \mathcal{Z}^*$; $\varphi[u] \in E_1$ — решение уравнения (6.1), отвечающее выбору управления $u \in \mathcal{D}_1$, $\psi[v] \in E_2$ — решение уравнения (6.2), отвечающее выбору управления $v \in \mathcal{D}_2$.

Относительно функции F мы предполагаем, что она удовлетворяет условиям, аналогичным предположениям $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_4$), а также одному из предположений $\mathbf{F}_5$) или $\mathbf{F}'_5$), с тем отличием, что она действует в пространство $L_1\bigl([0;T];\mathcal{Z}\bigr)$, а не в $L_1\bigl([0;T];\mathcal{X}\bigr)$; $E = \mathbb{C}\bigl([0;T];\mathcal{X}\bigr)$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.

Уравнения (6.1), (6.2) предполагаются известными обоим противникам (игра с полной информацией).

Очевидно, что систему (6.1), (6.2) можно рассматривать как одно уравнение относительно пары $(\varphi, \psi) \in E$ с правой частью (f, g). Поэтому можно определить игру Γ и кусочно-программные стратегии совершенно аналогично тому, как это было сделано раньше для случая одного уравнения. Вместе с тем, рассматривая уравнения (6.1), (6.2) независимо друг от друга, и учитывая, что условие вида $\mathbf{F}'_5$) для них заведомо выполнено в виду отсутствия управления оппонента, мы получаем соответствующие результаты относительно сдвига управлений совершенно аналогично тому, как это было сделано в разделе 4. Таким образом, результат о существовании положения ε-равновесия, полученный нами для случая одного уравнения, остается справедливым и в случае двух независимо управляемых уравнений.

7. Пример: сильно нелинейное уравнение псевдопараболического типа

К уравнению (2.2) могут быть сведены многие эволюционные системы, связанные с сильно нелинейными дифференциальными уравнениями псевдопараболического типа. Следуя [5,14], рассмотрим, например, начально-краевую задачу, связанную с сильно нелинейным уравнением, описывающим эволюцию электрического поля в проводящих средах без дисперсии (в частности, в полупроводниках), в квазистационарном приближении:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi\big) + \Delta\varphi + |\varphi|^{q_2}\varphi = g(t,\varphi,w),\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi\,\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7.1}$$

Здесь φ — это потенциал электрического поля и предполагается, что $q_i \in \left(0; \dfrac{4}{n-2}\right]$ при $n \geq 3$, $i = 1,2$, $q_1 \geq 1$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0;1]$, $n \geq 1$. Правая часть $g(t,\varphi,w)$ описывает влияние дополнительных управляемых источников тока свободных электронов. Для $\varphi_0 \in \mathcal{X}$ решение задачи (7.1) понимается в сильном обобщенном смысле и ищется в пространстве $\mathbb{AC}\big([0;T];\mathcal{X}\big)$, где $\mathcal{X} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Соответственно, используются обозначения: $\mathcal{X}^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ — сопряженное пространство, $\langle .,. \rangle$ — скобка двойственности между пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$, $E = \mathbb{C}\big([0;T];\mathcal{X}\big)$, $E^* = \mathbb{C}\big([0;T];\mathcal{X}^*\big)$.

Как показано в [14], задача (7.1) может быть переписана в виде уравнения:

$$\varphi = B(w)[\varphi], \quad \varphi \in E, \tag{7.2}$$

где

$$\big(B(w)\varphi\big)(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t f\big(s,\varphi(s),w(s)\big)\,ds, \quad t \in [0;T],$$

$$f\big(s,\varphi(s),w(s)\big) = \Psi\big(\varphi(s)\big)^{-1}\big[-Q\varphi(s) + \Phi[\varphi(s)] - g(s,\varphi(s),w(s))\big],$$

где операторы определяются следующим образом:

$$\Psi(\varphi) = Q + (q_1+1)|\varphi|^{q_1} I : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*, \quad \Phi\varphi = |\varphi|^{q_2}\varphi, \quad \Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*,$$

$Q\varphi = -\Delta\varphi$, $Q : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ — оператор Лапласа (с точностью до знака), понимаемый в сильном обобщенном смысле. Для нас важно, что указанные операторы обладают следующими свойствами, см. [5,14]:

1) $\|Q\varphi_1 - Q\varphi_2\|_{\mathcal{X}^*} = \big\|Q(\varphi_1-\varphi_2)\big\|_{\mathcal{X}^*} \le \|\varphi_1-\varphi_2\|_{\mathcal{X}}$ для всех $\varphi_i \in \mathcal{X}$, $i = 1,2$;

2) $\big\|\Psi(\varphi)^{-1}z_1 - \Psi(\varphi)^{-1}z_2\big\|_{\mathcal{X}} = \big\|\Psi(\varphi)^{-1}(z_1-z_2)\big\|_{\mathcal{X}} \le \|z_1-z_2\|_{\mathcal{X}^*}$ для всех $\varphi \in \mathcal{X}$, $z_1, z_2 \in \mathcal{X}^*$;

3) $\big\|\Psi(\varphi_1)^{-1} - \Psi(\varphi_2)^{-1}\big\| \le \mu_1(M)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{\mathcal{X}}$ для всех $\varphi_i \in \mathcal{X}$, $\|\varphi_i\|_{\mathcal{X}} \le M$, $i = 1,2$;

4) $\|\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2\|_{\mathcal{X}^*} \le \mu_2(M)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{\mathcal{X}}$ для всех $\varphi_i \in \mathcal{X}$, $\|\varphi_i\|_{\mathcal{X}} \le M$, $i = 1,2$;

5) для $z \in L_1\big([0;T];\mathcal{X}^*\big)$, $\varphi \in E$, $\psi(t) = \Psi\big(\varphi(t)\big)^{-1}\big[z(t)\big]$, $t \in [0;T]$, имеем: $\psi \in L_1\big([0;T];\mathcal{X}\big)$.

Относительно функции g мы предполагаем следующее.

G$_1$) Для всех $w \in U = U_1 \times U_2$

$$g[w](t,x) = g(t,x,w) : [0;T]\times\mathcal{X} \to \mathcal{X}^*,$$

$$g\big(.,\varphi(.),w(.)\big) \in L_1\big([0;T];\mathcal{X}^*\big) \quad \forall\,\varphi \in E.$$

G$_2$) Существует неубывающая функция $\widehat{\mathcal{N}}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такая, что

$$\big\|g(t,\varphi_1,w)-g(t,\varphi_2,w)\big\|_{\mathcal{X}^*}\le\widehat{\mathcal{N}}(M)\,\|\varphi-\psi\|_{\mathcal{X}}$$

для всех $\varphi_i\in\mathcal{X}$, $\|\varphi_i\|_{\mathcal{X}}\le M$, $i=1,2$, $w\in U$, п.в. $t\in[0;T]$.

G$_3$) Существует функция $\widehat{\mathcal{N}}_1=\widehat{\mathcal{N}}_1(t,M):[0;T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0;T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$ такая, что для всех $w\in\mathcal{D}$, $\varphi\in E$, $\|\varphi\|_E\le M$, п.в. $t\in[0;T]$ имеем:

$$\big\|g\big(t,\varphi(t),w(t)\big)\big\|_{\mathcal{X}^*}\le\widehat{\mathcal{N}}_1(t,M)\,.$$

G$_4$) $$\sup_{\substack{t\in[|\tau|;T-|\tau|]\\ \varphi\in E(\beta_*)\\ w\in\mathcal{D}}}\int\limits_{|\tau|}^{t}\Big\|g\big(s+\tau,x(s),w(s)\big)-g\big(s,x(s),w(s)\big)\Big\|_{\mathcal{X}^*}ds\to 0$$
при $\tau\to 0$,

G$'_5$) Управления u и v первого и второго игроков аддитивно разделены в функции g, то есть

$$g(t,\varphi,u,v)=g_1(t,\varphi,u)+g_2(t,\varphi,v),$$

$t\in[0;T]$, $\varphi\in\mathcal{X}$, $u\in\mathcal{V}_1$, $v\in\mathcal{V}_2$.

В [14] уже было показано, что условия **F**$_1$), **F**$_2$) выполнены. Убедимся, что выполнено условие **F**$_3$). Из линейности оператора $\Psi(\varphi)[.]$, а стало быть, и оператора $\Psi(\varphi)^{-1}[.]$, свойства 2), а также из свойств 1), 4), **G**$_3$) получаем:

$$\big\|f\big(t,\varphi(t),w(t)\big)\big\|_{\mathcal{X}}\le\big\|-Q\varphi(t)+\Phi[\varphi(t)]-g(t,\varphi(t),w(t))\big\|_{\mathcal{X}^*}\le$$

$$\le\big(1+\mu_2(M)\big)\,M+\big\|g\big(t,\varphi(t),w(t)\big)\big\|_{\mathcal{X}^*}\le\mathcal{N}_1(t,M),$$

при $\mathcal{N}_1(t,M)\equiv\big(1+\mu_2(M)\big)\,M+\widehat{\mathcal{N}}_1(t,M)$, $\|\varphi\|_E\le M$. Очевидно, что задача Коши

$$\frac{d}{dt}\,\beta(t)=\mathcal{N}_1\big(t,\|\varphi_0\|_{\mathcal{X}}+\beta(t)\big),\quad t\in(0;T];\quad\beta(0)=0,$$

равносильна интегральному уравнению

$$\beta(t) = \int\limits_0^t \mathcal{N}_1\big(s, \|\varphi_0\|_{\mathcal{X}} + \beta(s)\big)\, ds,$$

которое заведомо имеет решение при достаточно малом $T > 0$, см., например, [15, теорема 5]. Поэтому, предполагая, что число $T > 0$ достаточно мало, получаем, что выполнено условие $\mathbf{F}_3$).

Убедимся, что выполнено условие $\mathbf{F}_4$). Пользуясь свойствами 2), $\mathbf{G}_4$), для $t \in [|\tau|; T - |\tau|]$, $\varphi \in E(\beta_*)$, $w \in \mathcal{D}$ оценим

$$\left\| \int\limits_{|\tau|}^t \Big(f\big(s{+}\tau, x(s), w(s)\big) - f\big(s, x(s), w(s)\big)\Big) ds \right\|_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \int\limits_{|\tau|}^t \Big\| f\big(s + \tau, x(s), w(s)\big) - f\big(s, x(s), w(s)\big)\Big\|_{\mathcal{X}}\, ds \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{t \in [|\tau|; T - |\tau|] \\ \varphi \in E(\beta_*) \\ w \in \mathcal{D}}} \int\limits_{|\tau|}^t \Big\| g\big(s + \tau, x(s), w(s)\big) - g\big(s, x(s), w(s)\big)\Big\|_{\mathcal{X}^*}\, ds \to 0$$

при $\tau \to 0$. Это означает, что выполнено условие $\mathbf{F}_4$).

Убедимся, что выполнено условие $\mathbf{F}_5'$). Очевидно, что при каждом фиксированном $\varphi \in \mathcal{X}$ оператор $\Psi(\varphi)[.]$ линейный. Поэтому и обратный оператор $\Psi(\varphi)^{-1}[.]$ тоже линейный. Следовательно, в силу условия $\mathbf{G}_5'$),

$$f(t, \varphi, u, v) = \Psi(\varphi)^{-1}\big[g_0(\varphi)\big] - \Psi(\varphi)^{-1}\big[g_1(t, \varphi, u)\big] - \Psi(\varphi)^{-1}\big[g_2(t, \varphi, v)\big],$$

$t \in [0; T]$, $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{V}_1$, $v \in \mathcal{V}_2$, где

$$g_0(\varphi) = -Q\varphi + \Phi[\varphi].$$

Отсюда ясно, что условие $\mathbf{F}_5'$) выполнено.

Отметим, что условие $\mathbf{G}_5'$), обеспечивающее выполнение предположения $\mathbf{F}_5'$), мы выбрали потому, что оно совершенно естественно с точки зрения физического смысла задачи. Альтернативно, можно обеспечить выполнение предположения $\mathbf{F}_5$), если на функцию g наложить следующее условие.

$\mathbf{G}_5$) При некотором $p \in [1;+\infty)$ множество $\mathcal{D}_2$ предкомпактно в пространстве $L_p\big([0;T];\mathcal{V}_2\big)$, и соответственно, при сопряженном p' существует функция $\widehat{\mathcal{N}}_2 = \widehat{\mathcal{N}}_2(t,M) : [0;T]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\widehat{\mathcal{N}}_2(.,M) \in L_{p'}[0;T]$, неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $u \in U_1$, $v_1, v_2 \in U_2$, $\varphi \in \mathcal{X}$, $\|\varphi\|_{\mathcal{X}} \le M$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем:

$$\big\|g(t,\varphi,u,v_1) - g(t,\varphi,u,v_2)\big\|_{\mathcal{X}^*} \le \widehat{\mathcal{N}}_2(t,M)\,\|v_1 - v_2\|_{\mathcal{V}_2}.$$

При этом выполнение предположения $\mathbf{F}_5$) будет следовать непосредственно из свойства 2).

Игровую задачу можно поставить так же, как в [14]. А именно, предполагаем, что в полупроводнике имеются управляемые игроками 1 (разработчик устройства) и 2 (природа: различные нежелательные примеси, вносящие помехи в работу устройства) примесные центры. Тогда $w = (u,v)$, где u — управление игрока 1, v — управление игрока 2. Разработчику требуется так организовать управление электрическим полем в полупроводнике, чтобы эволюция электрического потенциала $\varphi(t) = \varphi(t,.)$ как можно меньше отличалась от заданной программы $\overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi}(t,.)$, $\overline{\varphi} \in E$. Выигрыш игрока 1 — это функционал вида:

$$J[u,v] = -\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_0^T \big|\varphi[u,v](t,x) - \overline{\varphi}(t,x)\big|\,dt = \mathcal{F}\left[\int\limits_0^T F(t,\varphi[u,v])\,dt\right],$$

где

$$F(t,\varphi)(.) = \big|\varphi(.) - \overline{\varphi}(t,.)\big| : [0;T]\times\mathcal{X} \to \mathcal{Z} \equiv L_1(\Omega),$$

$\mathcal{F} \in \mathcal{Z}^*$ — функционал, определяемый формулой:

$$\mathcal{F}[z] = -\int\limits_{\Omega} z(x)\,dx, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Поскольку F не зависит явно от управления, выполнение для нее условия $\mathbf{F}'_5$) очевидно. Выполнение условий $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), а также оценки из условия $\mathbf{F}_3$) для функции F тоже достаточно очевидно. Выполнение условия $\mathbf{F}_4$) обеспечивается непрерывностью функции $\overline{\varphi}(t)$:

$$\left\| \int\limits_{|\tau|}^{T-|\tau|} \Big\{ F\big(t+\tau, \varphi(t)\big) - F\big(t, \varphi(t)\big) \Big\}\, dt \right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le \int\limits_{|\tau|}^{T-|\tau|} \Big\| F\big(t+\tau, \varphi(t)\big) - F\big(t, \varphi(t)\big) \Big\|_{\mathcal{Z}}\, dt \le$$

$$\le \int\limits_{0}^{T} \chi_\tau(t) \Big\| \overline{\varphi}(t+\tau, .) - \overline{\varphi}(t, .) \Big\|_{\mathcal{Z}}\, dt \to 0 \quad \text{при } \tau \to 0;$$

$\chi_\tau = \chi_{\big[|\tau|; T-|\tau|\big]}$. Здесь мы использовали очевидное неравенство

$$|a| - |b| \le |a - b|,$$

а также теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [2, теорема VIII.4.1, с.200]:

$$\chi_\tau(t) \Big\| \overline{\varphi}(t+\tau, .) - \overline{\varphi}(t, .) \Big\|_{\mathcal{Z}} \to 0 \text{ при } \tau \to 0 \quad \text{для всех } t \in [0; T],$$

$$\chi_\tau(t) \Big\| \overline{\varphi}(t+\tau, .) - \overline{\varphi}(t, .) \Big\|_{\mathcal{Z}} \le 2\|\overline{\varphi}\|_E \quad \text{для всех } t \in [0; T].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985. 271 с.

2. Вулих Б.З. *Краткий курс теории функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1973. 352 с.

3. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978. 336 с.

4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984. 752 с.

5. Корпусов М.О. *Условия глобальной разрешимости начально--краевой задачи для нелинейного уравнения псевдопараболического типа* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 678–685.

6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974. 456 с.

7. Меликян А.А. *Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка. Приложения к задачам теории управления и дифференциальным играм.* М., Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2014. 450 с.

8. Петросян Л.А, Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высшая школа, 1998. 304 с.

9. Слобожанин Н.М. *Теорема существования для бесконечных позиционных игр* // Сб. «Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики». Якутск: ЯГУ, 1977. Вып.1. С. 37–42.

10. Слобожанин Н.М. *Информация и управление в динамических играх.* С.-Пб.: Изд-во С.-Пб. гос. ун-та, 2002.

11. Чернов А.В. *О существовании ε-равновесия в вольтерровых функционально-операторных играх без дискриминации*//МТИиП. 2012. Т. 4. Вып.1. С. 74–92.

12. Чернов А.В. *О вольтерровых функционально-операторных играх с нефиксированной цепочкой* // Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского. 2012. № 2(1). С. 142–148.

13. Чернов А.В. *О равномерно непрерывной зависимости решения управляемого функционально-операторного уравнения от сдвига управления* // Изв. вузов. Математика. 2013. № 5. С. 36–50.

14. Чернов А.В. *О дифференциальных играх в банаховом пространстве на фиксированной цепочке* // МТИиП. 2020. Т. 12. Вып.3. С. 89–118.

15. Чернов А.В. Операторные уравнения II рода: теоремы о существовании и единственности решения и о сохранении разрешимости // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. №5. С. 656–668.

16. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. *Игровые задачи управления и поиска.* М.: Наука, 1978. 270 с.

17. Berkovitz L.D., Fleming W.H. *On differential games with integral payoff.* In: Contributions to the Theory of Games, III. Annals of Math Study. 1957. V. 39. P. 413–435. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957.

18. Berkovitz L.D. *The existence of value and saddle point in games of fixed duration* // SIAM J. Control Optim. 1985. V. 23. P. 173–196. Errata and addendum, ibid. 1988. V. 26. P. 740–742.

19. Berkovitz L.D. *A theory of differential games* // Adv. Dyn. Games Appl. 1992. P. 3–22.

20. Berkovitz L.D. *Characterizations of the values of differential games* // Appl. Math. Optim. 1988. V. 17. P. 177–183.

21. Berkovitz L.D. *Differential games of generalized pursuit and evasion* // SIAM J. Control Optim. 1986. V. 24. P. 361–373.

22. Berkovitz L.D. *Differential games of survival* // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 129. P. 493–504.

23. Chernousko F.L., Melikyan A.A. *Some differential games with incomplete information.* Lecture Notes in Computer Science. V. 27. Berlin: Springer-Verlag, 1974. P. 445–450.

24. Crandall M.G., Lions P.L. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations* // Trans. AMS. 1983. V. 277. P. 1–42.

25. Elliott R.J., Kalton N.J. *The existence of value in differential games.* Mem. AMS. 1972. V. 126. 67 p.

26. Elliott R.J. *Viscosity Solutions and Optimal Control.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, 165. Harlow: Longman Scientific & Technical; New York: John Wiley & Sons, Inc. 1987. 95 p.

27. Evans L.C., Souganidis P.E. *Differential games and representation formulas for Hamilton-Jacobi equations* // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33. P. 773–797.

28. Fleming W.H. *The convergence problem for differential games* // J. Math. Anal. Appl. 1961. No. 3. P. 102–116.

29. Fleming W.H. *The Convergence Problem For Differential Games*, II // Ann. Math. Study. 1964. V. 52. P. 195–210. Princeton: Princeton Univ. Press, 1964.

30. Friedman A. *Differential Games.* Pure and Applied Mathematics. V. XXV. New York, etc.: Wiley Interscience a Division of John Wiley & Sons, Inc. XI, 1971. 350 p.

31. Friedman A. *Differential Games.* Conference Board of the Mathematical Sciences / Regional Conference Series in Mathematics. No. 18. Providence, R.I.: American Mathematical Society (AMS), 1974. 66 p.

32. Ghassemi K.H. *On differential games of fixed duration with phase coordinate restrictions on one player* // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28. P. 624–652.

33. Ghassemi K.H. *Differential games of fixed duration with state constraints* // J. Optim. Theory Appl. 1991. V. 68. P. 513–537.

34. Isaacs R. *Differential games I-IV.* The RAND Corporation Research Memoranda: RM-1391, RM-1399, RM-1411, RM-1486, 1954–1955.

35. Isaacs R. *Differential games. A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization.* (The SIAM Series in Applied Mathematics) New York, London, Sydney: John Wiley and Sons, Inc. XXII, 1965. 384 p.

36. Krasovskij N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* Springer Series in Soviet Mathematics. New York, etc.: Springer-Verlag. XI, 1988. 517 p.

37. Qian X. *Differential games with information lags* // SIAM J. Control Optim. 1994. V. 32. P. 808–830.

38. Ramaswamy M., Shaiju A.J.. *Construction of approximate saddle-point strategies for differential games in a Hilbert space* // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 141. P. 349–370.

39. Roxin E. *Axiomatic approach in differential games* // J. Optim. Theory Appl. 1969. V. 3. P. 153–163.

40. Varaiya P., Lin J. *Existence of saddle points in differential games* // SIAM J. Control. 1969. V. 7. P. 141–157.

DIFFERENTIAL GAMES IN A BANACH SPACE WITHOUT DISCRIMINATION

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State University; Nizhnii Novgorod State Technical University, Cand.Sc., associate professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: The paper is a continuation of author's research on the question of ε-equilibrium existence in the sense of piecewise program strategies in antagonistic games associated with nonlinear non-autonomous controlled differential equation in the Banach space and cost functional of a general form. Just as in the paper published earlier on this subject, the main result consists in sufficient conditions of ε-equilibrium. The difference is that we investigate the game without discrimination of players and without fixing Volterra chain. Application of results obtained in the paper is illustrated by example of the game associated with a nonlinear pseudoparabolic partial differential equation governing the evolution of electric field in a semiconductor.

Keywords: differential game, nonlinear differential equation in the Banach space, Volterra set chain, piecewise program strategies, ε-equilibrium.