требований к гладкости форм разрывов (не участвующих непосредственно в расчетных соотношениях) и здесь не возникает вопросов о неустойчивости ударных волн.

Величина v или непрерывна (в скачках уплотнения), или в контактном разрыве должна вычисляться односторонними операциями (как и энтропия). Для иллюстрации на фиг. 5, *б* дано положение ударной волны и поперечное распределение давления по времени при расчете методом установления обтекания клина с $\theta=15°$ и $M=2$ (квадратики – один шаг, треугольники – три шага, точки – пятнадцать шагов по времени, сплошная линия – точное стационарное решение в этом сечении).

Литература

1. *Чушкин П. И.* Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений // Тр. ВЦ АН СССР. М., 1968.
2. *Магомедов К. М., Холодов А. С.* О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 2. С. 373–386.
3. *Лунев В. В., Капитанец П. И.* Расчет течений с газодинамическими разрывами // Гагаринские чтения по космонавтике и авиации 1983 г. М.: Наука, 1985. С. 166–167.
4. *Крайко А. Н., Макаров В. Е., Тилляева Н. И.* К численному построению фронтов ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 3. С. 716–723.
5. *Сейлас Н. Д.* Применение метода подгонки скачка для расчета двумерных сверхзвуковых течений // Ракетная техн. и космонавтика. 1976. № 5. С. 49–55.

Поступила в редакцию 24.VII.1986

Переработанный вариант 23.VI.1987

УДК 519.85

ОБОБЩЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ [1)]

СТЕРЛИН А. М.

(Горький)

В работах [1], [2] для решения задач математического программирования с ограниченными неравенствами были предложены модифицированные функции Лагранжа на основе барьерных функций. В данной статье штрафные функции расширены для учета ограничений равенства.

Рассматривается задача математического программирования

$$f(\mathbf{x})\to\min,\qquad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{1а}$$

$$\Omega=\{\mathbf{x}\in R_n\,|\,h_i(\mathbf{x})\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,m,\ h_i(\mathbf{x})=0,\ i=m+1,\ldots,l\}. \tag{1б}$$

Пусть $\mathbf{x}^*$ – решение задачи (1), I – множество номеров активных в точке $\mathbf{x}^*$ ограничений и

$$L(\mathbf{x},\lambda)=f(\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i h_i(\mathbf{x}) \tag{2}$$

является функцией Лагранжа задачи (1). В предположениях гладкости f, h и линейной независимости векторов $\{\partial h_i(\mathbf{x}^*)/\partial x,\ i\in I\}$ в $\mathbf{x}^*$ однозначно определен вектор множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}^*$.

---

1) Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ, 1987, № 7402-87, 8с.

Предположим дополнительно, что $\lambda_i^* \neq 0$, $i \in I$, и выполнены достаточные условия оптимальности второго порядка: существует $a>0$ такое, что

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*, \lambda^*)\, S, S\right) \geqslant (S, S) \tag{3}$$

для любого $S \in M$, где

$$M = \left\{S \in R_n \,\middle|\, \left(S, \frac{\partial h_i}{\partial x}(x^*)\right) = 0,\ i \in I\right\}. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $F(x, \lambda, \delta)$ вида

$$F(x, \lambda, \delta) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\ln[1 + \delta h_i(x)]}{\delta} - \sum_{i=m+1}^{l} |\lambda_i| \frac{\ln[1 + \delta \operatorname{sign}(\lambda_i) h_i(x)]}{\delta}, \tag{5}$$

которую назовем внутренней модифицированной функцией Лагранжа (в.м.ф.Л.) [1], [2].

Теорема 1. *При выполнении предположений, перечисленных выше, существует $\hat{\delta}>0$ такое, что для любого $\delta>\hat{\delta}$ в точке x^* достигается локальный минимум функции $F(x, \lambda^*, \delta)$.*

Сформулированная теорема не дает способа вычисления x^*, так как вектор λ^* неизвестен. Следует ожидать, что при λ, близких к λ^*, функция $F(x, \lambda, \delta)$ имеет локальный минимум в окрестности x^*.

Теорема 2. *Для любого $\delta>\hat{\delta}$ существуют окрестности U_{x^*}, U_{λ^*} точек x^*, λ^* такие, что для любого $\lambda \in U_{\lambda^*}$ существует единственное решение $x_\lambda \in U_{x^*}$ системы $dF(x, \lambda, \delta)/dx = 0$. Вектор-функция x_λ является непрерывно дифференцируемой по λ. При любом $\lambda \in U_{\lambda^*}$ вектор x_λ – локальный минимум $F(x, \lambda, \delta)$.*

Рассмотрим задачу математического программирования

$$\Phi(\lambda, \delta) \to \max, \quad \lambda \in U, \quad U = \{\lambda \in R_l \mid \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, m\}, \tag{6}$$

где $\Phi(\lambda, \delta) = F(x_\lambda, \lambda, \delta)$.

Теорема 3. *При $\delta>\hat{\delta}$ решение задачи* (6) *достигается в точке λ^*.*

Полученные в теоремах 1–3 результаты дают основу для создания вычислительных алгоритмов, основанных на в.м.ф.Л. Общая схема алгоритмов может быть описана следующим образом: выбираются начальные векторы x^0, λ^0, подбирается значение δ такое, чтобы начальная точка x_0 была допустимой. Далее полагается

$$x^{k+1} = \arg\min_{x \in D_\delta} F(x, \lambda^k, \delta), \qquad \lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda^k. \tag{7}$$

Поправки $\Delta\lambda^k$ можно определять различными способами, например

$$\Delta\lambda_i^{(k)} = -\alpha |\lambda_i^k| \log\{1 + \delta \operatorname{sign}[\lambda_i^k h_i(x^{k+1})]\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{8}$$

Для проверки принципиальной возможности решения задач с ограничениями типа равенства реализован алгоритм (7), (8) с использованием для безусловной оптимизации метода прямого поиска Хука – Дживса [3]. Решен ряд тестовых примеров из [3] различной размерности. Самой сложной была задача № 20 с числом переменных 24, содержавшая 14 ограничений в виде равенств, 6 ограничений в виде неравенств и 24 ограничения, задающих верхние границы изменения переменных. Получено решение на уровне результатов, приведенных в [4].

В заключение отметим, что предлагаемый в данной статье метод устраняет характерную для алгоритмов, основанных на барьерных функциях, проблему выбора допустимой начальной точки.

Литература

1. *Калинин И. Н., Стерлин А. М.* Об одном варианте модифицированной функции Лагранжа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 4. С. 787–789.

2. *Калинин И. Н., Стерлин А. М.* Внутренняя модифицированная функция Лагранжа в нелинейном программировании // Комбинаторно-алгебраич. методы в прикл. матем. Горький, 1983. С. 123–133.
3. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.
4. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 7.VII.1986
Переработанный вариант 6.II.1987

УДК 519.6:533.7

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОДОБИЯ МАТРИЦ В СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ [1)]

ПОГОРЕЛОВ Н. В.

(Москва)

Вопросы точности, устойчивости и экономичности получения решений задач газовой динамики существенно связаны с учетом характеристических свойств пространственных уравнений при разработке соответствующих алгоритмов. Исследование спектральных свойств и задача симметризации матриц коэффициентов для нестационарных уравнений газовой динамики и их обобщений представлены в [1], [2]. Специфика характеристических свойств стационарной системы уравнений не дает возможности переносить на них результаты упомянутых работ. В особенности это касается проблемы одновременной симметризации матриц коэффициентов, так как регулярного алгоритма для ее решения не существует.

Рассмотрим систему уравнений Эйлера в квазилинейном виде в декартовых координатах $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$: $A_i\partial\mathrm{U}/\partial x_i=0$. Здесь $\mathrm{U}=\|\rho,\ u,\ v,\ w,\ p\|^{\mathrm{T}}$. Матрицы A_i зависят от плотности ρ, компонент скорости $u_1=u$, $u_2=v$, $u_3=w$, давления p и скорости звука $c=c(p,\ \rho)$. При выполнении дифференцируемого взаимно однозначного преобразования независимых переменных $\xi=\xi(x,\ y,\ z)$, $\eta=\eta(x,\ y,\ z)$, $\zeta=\zeta(x,\ y,\ z)$ система примет вид

$$\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\xi}+B\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\eta}+C\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\zeta}=0, \tag{1}$$

где $A=\xi_{x_i}A_i$, $B=A^{-1}(\eta_{x_i}A_i)$, $C=A^{-1}(\zeta_{x_i}A_i)$.

Система (1) является ξ-гиперболической в точке (x, U), если существуют неособенные матрицы $S_B(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$, $S_C(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\gamma})$ такие, что

$$S_B^{-1}BS_B=\mathrm{diag}\{\lambda_j^B\},\qquad S_C^{-1}CS_C=\mathrm{diag}\{\lambda_j^C\},\qquad j=1,\dots,5.$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}=(\xi_x,\ \xi_y,\ \xi_z)$, $\boldsymbol{\beta}=(\eta_x,\ \eta_y,\ \eta_z)$, $\boldsymbol{\gamma}=(\zeta_x,\ \zeta_y,\ \zeta_z)$. При этом нормы матриц S_B и S_C должны быть равномерно ограничены по $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$.

Без ограничения общности можно рассмотреть только диагонализацию матрицы B:

$$B=\begin{Vmatrix} VQ^2 & -\rho d_1U & -\rho d_2U & -\rho d_3U & \alpha_1d_1+\alpha_2d_2+\alpha_3d_3\\ 0 & Q^2V+\alpha_1c^2d_1 & \alpha_1c^2d_2 & \alpha_1c^2d_3 & -Ud_1+r_1c^2\\ 0 & \alpha_2c^2d_1 & Q^2V+\alpha_2c^2d_2 & \alpha_2c^2d_3 & -Ud_2+r_2c^2\\ 0 & \alpha_3c^2d_1 & \alpha_3c^2d_2 & Q^2V+\alpha_3c^2d_3 & -Ud_3+r_3c^2\\ 0 & -\rho c^2d_1U & -\rho c^2d_2U & -\rho c^2d_3U & (UV-qc^2)\,U \end{Vmatrix}.$$

Здесь $U=\alpha_1u+\alpha_2v+\alpha_3w$, $V=\beta_1u+\beta_2v+\beta_3w$ – контравариантные компоненты вектора скорости по координатам ξ, η, $Q^2=U^2-(sc)^2$, $s^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$, $q=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+$ $+\alpha_3\beta_3$, $r_1=\alpha_2(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)+\alpha_3(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)$, $r_2=\alpha_1(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)+\alpha_3(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)$, $r_3=$ $=\alpha_1(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)+\alpha_2(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)$, $d_i=\alpha_iV-\beta_iU$.

[1)] Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ, 1987, № 7403-В87, 12с.