

И. В. Близникова

**О ГЕОМЕТРИИ ПОЛУНЕГОЛОМНОЙ
КОНГРУЭНЦИИ ПЕРВОГО РОДА**

О Г Л А В Л Е Н И Е

§ 1. Многообразие Грассмана	125
§ 2. Полуноголономные конгруэнции	132
§ 3. Полуноголономная конгруэнция первого рода	133
1. Дифференциальная окрестность первого порядка	133
2. Геометрические интерпретации	136
3. Дифференциальная окрестность второго порядка	140
4. Геометрические интерпретации	141
Цитированная литература	148

Методом Г. Ф. Лаптева [6] рассматривается полуноголономная конгруэнция первого рода, т. е. многообразие Грассмана $Gr(1,3)$, на каждой прямой которого заданы две мнимые точки (эллиптический случай).

§ 1. МНОГООБРАЗИЕ ГРАССМАНА

1. Многообразие Грассмана. Рассмотрим вещественное n -мерное проективное пространство P_n , отнесенное к подвижному реперу $\{A_j\}$, который состоит из $n+1$ аналитической точки A_1, \dots, A_{n+1} . Инфинитезимальное перемещение такого репера определяется уравнениями

$$dA_I = \omega_I^K A_K \quad (1)$$

$$(I, J, K = 1, 2, \dots, n+1; i, j, k, \dots = 1, \dots, m+1;$$

$$\alpha, \beta = m+2, \dots, n+1).$$

Компоненты инфинитезимального перемещения репера $\{A_j\}$, т. е. 1-формы ω_j^K являются инвариантными 1-формами проективной группы $PG(n, R)$, структурные уравнения которой имеют вид:

$$D\omega_j^I = \omega_j^K \wedge \omega_K^I. \quad (2)$$

Плоское m -мерное многообразие (m -мерную плоскость) можно определить $m+1$ линейно независимой аналитической точкой P_1, P_2, \dots, P_{m+1} ($m < n$). Предположим, что репер $\{A_j\}$ выбран так, что m -мерная плоскость Π_m определяется аналитическими точками A_1, \dots, A_{m+1} . Тогда условия инвариантности плоскости Π_m имеют вид:

$$\omega_p^\alpha = 0, \quad (3)$$

т. е. первые интегралы этой вполне интегрируемой системы можно считать координатами плоскости Π_m . Множество всех m -мерных плоскостей пространства P_n называется многообразием Грассмана $Gr(m, n)$, которое является дифференцируемым многообразием (плоскость Π_m рассматривается как точка многообразия $Gr(m, n)$). Заметим, что 1-формы ω_p^α имеют следующую структуру

$$D\omega_p^\alpha = \omega_q^\beta \wedge \omega_{p\beta}^{\alpha q}, \quad (4)$$

где

$$\omega_{p\beta}^{\alpha q} = \delta_p^q \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_p^q, \quad (5)$$

а размерность Γ многообразия Грассмана $Gr(m, n)$ равна $(n-m)(m+1)$.

Условия стационарности плоскости Π_m мы можем рассматривать как дифференциальные уравнения подгруппы H_m проективной группы $PG(n, R)$ пространства P_n . Группа H_m является стационарной подгруппой плоскости Π_m . Инвариантные 1-формы подгруппы H_m определяются следующим образом

$$\theta_\alpha^p = \omega_\alpha^p \Big|_{\omega_p^\alpha=0}, \quad \theta_p^q = \omega_p^q \Big|_{\omega_p^\alpha=0}, \quad \theta_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta \Big|_{\omega_p^\alpha=0},$$

а структурные уравнения группы H_m имеют вид:

$$\begin{aligned} D\theta_p^q &= \theta_p^r \wedge \theta_r^q, \\ D\theta_\alpha^p &= \theta_\alpha^q \wedge \theta_q^p + \theta_\alpha^\gamma \wedge \theta_\gamma^p, \\ D\theta_\beta^\alpha &= \theta_\beta^\gamma \wedge \theta_\gamma^\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что группа H_m всегда имеет две подгруппы:

1. Проективную группу $PG(m; R)$, т. е. группу проективных преобразований образующего элемента многообразия $Gr(m, n)$ и

2. Проективную группу $PG(n-m-1; R)$, т. е. группу проективных преобразований дуального пространства для образующего элемента многообразия $Gr(m, n)$. Очевидно, что

$$Gr(m, n) = PG(n, R)/H_m.$$

Многообразию Грассмана можно рассматривать и как погруженное многообразие N -мерного проективного пространства P_N , где $N = \binom{n+1}{m+1} - 1$, однородные координаты которого являются грассмановыми координатами m -мерных подпространств Π_m пространства P_n (см. [9, 10]). Допустимые проективные преобразования координат пространства P_n , порожденные элементами группы $PG(n, R)$, индуцируют, преобразования грассмановых координат пространства Π_m , а значит, и преобразования координат пространства P_N , т. е. этим определяется естественный гомоморфизм группы $PG(n, R)$ в группу $PG(N, R)$. Этот гомоморфный образ группы $PG(n, R)$ в группу $PG(N, R)$ обозначим через $*PG(n, N, R)$. Очевидно, что

$$\dim *PG(n, N, R) \leq \dim PG(n, R).$$

Подгруппу $*PG(n, N, R)$ проективной группы $PG(N, R)$ будем называть группой индуцированных преобразований пространства P_N .

Преобразования группы индуцированных преобразований пространства P_N сохраняют многообразие Грассмана $Gr(m, n)$. При естественном гомоморфизме группы $PG(n, R)$ в группу $PG(N, R)$ определяется и естественный гомоморфизм любой подгруппы группы $PG(n, R)$ в группу $PG(N, R)$. Проективные преобразования пространства P_N , порожденные элементами той подгруппы группы $PG(N, R)$, в которую отображается группа H_m при естественном гомоморфизме группы $PG(n, R)$ в $PG(N, R)$, образуют стационарную подгруппу точки многообразия Грассмана $Gr(m, n)$.

Преобразования группы $*PG(N, R)$, сохраняющие Γ -мерную плоскость пространства P_N , образуют группу $*H_\Gamma$, которую будем называть индуцированной стационарной подгруппой Γ -мерной плоскости Π_Γ пространства P_N . Очевидно, что группа $*H_\Gamma$ всегда является подгруппой стационарной подгруппы Γ -мерной плоскости пространства P_N , т. е. всегда

$$\dim *H_\Gamma \leq \dim H_\Gamma.$$

В группе $*H_\Gamma$ всегда содержится подгруппа $*PG(\Gamma, R)$, преобразования которой преобразуют только точки Γ -мерной плоскости Π_Γ .

2. Ассоциированные расслоенные многообразия. Дифференцируя внешним образом соотношения (5), мы получим

$$D\omega_{p\beta}^{\alpha q} = \omega_{s\beta}^{\alpha q} \wedge \omega_{p\sigma}^{\alpha s} + \omega_s^{\alpha} \wedge \omega_{p\beta\sigma}^{\alpha qs}, \quad (7)$$

где

$$\omega_{p\beta\sigma}^{\alpha qs} = -\delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\rho}^s \omega_{\sigma}^q - \delta_{\rho}^s \delta_{\sigma}^{\alpha} \omega_{\beta}^s. \quad (8)$$

Из этих соотношений, в силу (2) и (5), следует, что

$$D\omega_{p\beta\sigma}^{\alpha qs} = \omega_{t\rho\sigma}^{\rho q s} \wedge \omega_{p\rho}^{\alpha t} + \omega_{t\rho}^{\rho q} \wedge \omega_{p\sigma\rho}^{\alpha st} + \omega_{t\sigma}^{\rho s} \wedge \omega_{p\rho}^{\alpha qt}, \quad (9)$$

т. е. для многообразия Грассмана всегда

$$\omega_{p,\gamma\sigma}^{\alpha qts} = 0. \quad (10)$$

Это означает, что порядок изотропии грассманова многообразия $Gr(m, n)$ всегда равен 2 (см. [8]).

Если Γ -мерная плоскость Π_{Γ} является касательным пространством погруженного многообразия $Gr(m, n) \subset P_N$ (в Γ -мерной плоскости фиксируется точка), то в этом случае из группы $*PG(\Gamma, R)$ выделяется подгруппа $*GL(N, R)$, которая является гомоморфным образом (при естественном гомоморфизме) группы $PG(n, R)$ в первую дифференциальную группу $GL(\Gamma, R)$ многообразия $Gr(m, n)$. Инвариантные 1-формы группы $*GL(\Gamma, R)$ имеют вид:

$$\theta_{p\beta}^{\alpha q} = \omega_{p\beta}^{\alpha q} |_{\omega_r^{\gamma} = 0} \quad (11)$$

и связаны следующими структурными уравнениями

$$D\theta_{p\beta}^{\alpha q} = \theta_{s\beta}^{\alpha q} \wedge \theta_{p\sigma}^{\alpha s}. \quad (12)$$

1-формы $\theta_{p\beta}^{\alpha q}$ и $\theta_{p\beta\sigma}^{\alpha qs}$, где

$$\theta_{p\beta\sigma}^{\alpha qs} = \omega_{p\beta\sigma}^{\alpha qs} |_{\omega_r^{\gamma} = 0}, \quad (13)$$

являются инвариантными 1-формами естественного гомоморфного образа группы $PG(n, R)$ во вторую дифференциальную группу $GL^2(\Gamma, R)$ многообразия $Gr(m, n)$. Естественный гомоморфный образ группы $PG(n, R)$ в группу $GL^2(\Gamma, R)$ обозначим через $*GL^2(\Gamma, R)$. Очевидно, что

$$\dim *GL(\Gamma, R) \leq \dim GL(\Gamma, R),$$

$$\dim *GL^2(\Gamma, R) \leq \dim GL^2(\Gamma, R).$$

Заметим, что группа $*GL(\Gamma, R)$ является гомоморфным образом (при естественном гомоморфизме) тензорного произведения групп $PG(m, R)$ и $PG(n-m-1, R)$, а группа $*GL^2(\Gamma, R)$ — гомоморфным образом подгруппы H_m .

Таким образом, с грассмановым многообразием $Gr(m, n)$ ассоциируются следующие главные расслоенные пространства:

1. Главное расслоенное пространство $P(Gr(m, n), PG(m, R))$, структурные уравнения которого имеют вид (4) и

$$D\omega_p^q = \omega_p^s \wedge \omega_s^q + \omega_p^3 \wedge \omega_p^q. \quad (14)$$

2. Главное расслоенное пространство $Q(Gr(m, n), PG(n-m-1, R))$, структурные уравнения которого имеют вид (4) и

$$D\omega_p^\alpha = \omega_p^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_p^\alpha \wedge (-\omega_p^\rho). \quad (15)$$

3. Главное расслоенное пространство $R(Gr(m, n), *GL(N, R))$, структурные уравнения которого имеют вид (4) и (7).

Главные расслоенные пространства P , Q , и R имеют общую базу $Gr(m, n)$.

3. Линейные дифференциально-геометрические связности. Найдем структуру дифференциально-геометрических объектов, три помощи которых определяются линейные дифференциально-геометрические связности ассоциированных расслоенных пространств P , Q и R .

Линейную дифференциально-геометрическую связность пространства P можно определить при помощи 1-форм

$$\tilde{\omega}_q^p = \omega_q^p + P_{q\gamma}^{ps} \omega_\gamma^s. \quad (16)$$

Из хорошо известной теоремы Г. Ф. Лаптева [7] следует, что эти 1-формы определяют линейную дифференциально-геометрическую связность тогда и только тогда, когда 2-формы

$$D\tilde{\omega}_q^p - \tilde{\omega}_q^s \wedge \tilde{\omega}_s^p$$

являются полубазовыми. Эти 2-формы будут полубазовыми 2-формами тогда и только тогда, когда на многообразии $Gr(m, n)$ определено поле дифференциально-геометрического объекта следующей структуры (соответствующие внешние дифференциальные уравнения пропущены):

$$\nabla P_{q\gamma}^{ps} - \delta_q^s \omega_\gamma^p = P_{q\gamma\sigma}^{pst} \omega_t^\sigma. \quad (17)$$

Свертывая эти уравнения по индексам p и q , мы получим

$$\nabla P_{p\gamma}^{ps} - \omega_\gamma^s \equiv 0 \pmod{\omega_p^\alpha}. \quad (18)$$

Так как дифференциально-геометрический объект $P_{p\gamma}^{ps}$ является аналогом свернутого объекта аффинной связности, то его будем называть свернутым объектом линейной дифференциально-геометрической связности главного расслоенного про-

пространства P . Заметим, что при помощи свернутого объекта линейной дифференциально-геометрической связности $\overset{\circ}{P}_{\gamma}^{ps}$ можно построить объект линейной дифференциально-геометрической связности следующим образом

$$\overset{\circ}{P}_{q\gamma}^{ps} = \delta_q^s P_{\gamma}^p. \quad (19)$$

Вообще-то $P_{q\gamma}^{ps} \neq \overset{\circ}{P}_{\gamma q}^{ps}$.

Линейная дифференциально-геометрическая связность главного расслоенного пространства Q определяется 1-формами

$$\tilde{\omega}_{\beta}^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\alpha} + Q_{\beta\gamma}^{\alpha p} \omega_{\gamma}^p, \quad (20)$$

где

$$\nabla Q_{\beta\gamma}^{\alpha p} + \delta_{\gamma}^{\alpha} \omega_{\beta}^p = Q_{\beta\gamma\sigma}^{\alpha p q} \omega_{\sigma}^q. \quad (21)$$

Свернутый объект линейной дифференциально-геометрической связности главного расслоенного пространства Q имеет вид $Q_{\alpha\gamma}^{\alpha p}$, т. е.

$$\nabla Q_{\alpha\gamma}^{\alpha p} + \omega_{\gamma}^p \equiv 0 \pmod{\omega_{\alpha}^{\alpha}}. \quad (21')$$

Заметим, что дифференциальные уравнения свернутых объектов линейных дифференциально-геометрических связностей пространств P и Q отличаются только знаком.

Линейная дифференциально-геометрическая связность главного расслоенного пространства R определяется при помощи 1-форм

$$\tilde{\omega}_{p\beta}^{\alpha q} = \omega_{p\beta}^{\alpha q} + R_{p\beta\gamma}^{\alpha q t} \omega_{\gamma}^t, \quad (22)$$

где

$$\nabla R_{p\beta\gamma}^{\alpha q t} + \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\gamma}^t \omega_p^q + \delta_p^q \delta_{\gamma}^t \omega_{\beta}^{\alpha} = R_{p\beta\gamma\sigma}^{\alpha q t s} \omega_{\sigma}^s. \quad (23)$$

Если задана линейная дифференциально-геометрическая связность главного расслоенного пространства R , то в этом случае грассманово многообразие $Gr(m, n)$ является обычным пространством аффинной связности. Заметим, что линейные дифференциально-геометрические связности пространств P и Q всегда индуцируют вполне определенные связности пространства R .

В дальнейшем мы рассмотрим только такие связности пространств P , Q и R , которые возникают на оснащенных грассмановых многообразиях.

4. Оснащенные многообразия Грассмана. Если на многообразии Грассмана задано поле дифференциально-геометрического объекта, то в этом случае многообразие $Gr(m, n)$ называется оснаственным многообразием Грассмана. Предметом дифференциальной геометрии оснащенного многообразия

Грассмана является изучение инвариантов, дифференциальных комитантов и инвариантных операций, построенных при помощи дифференциальных продолжений конечного порядка заданного поля дифференциально-геометрического объекта (фундаментального объекта многообразия Грассмана). В качестве примеров оснащенных многообразий Грассмана можно рассматривать неголономные линейчатые многообразия (см. [1]).

5. Неголономные линейчатые многообразия. Если мы рассмотрим гладкое r -параметрическое семейство m -мерных плоскостей пространства $P_n (1 \leq r < (m+1)(n-m), 1 \leq m \leq n-1)$, то этому семейству $Gr(m, n, r)$ всегда соответствует вполне определенная последовательность фундаментальных дифференциально-геометрических объектов

$$H^{(1)}(m, n, r) \subset H^{(2)}(m, n, r) \subset \dots \subset H^{(v)}(m, n, r),$$

каждый из которых характеризует геометрическое строение соответствующей дифференциальной окрестности многообразия $Gr(m, n, r)$, т. е. фундаментальный дифференциально-геометрический объект первого порядка $H^{(1)}(m, n, r)$ характеризует строение первой дифференциальной окрестности многообразия $Gr(m, n, r)$ и т. д.

В дальнейшем мы рассмотрим многообразия Грассмана, оснащенные полем дифференциально-геометрического объекта такой же структуры, как и $H^1(m, n, r)$.

Определение. Если на многообразии Грассмана $Gr(m, n)$ задано поле дифференциально-геометрического объекта $H^{(1)}(m, n, r)$, то многообразие Грассмана называется неголономным многообразием $NGr(m, n, r)$ типа $Gr(m, n, r)$. (см. [1]).

Заметим, что

$$\dim NGr(m, n, r) = (m+1)(n-m).$$

Таким образом, геометрия неголономного многообразия $NGr(m, n, r)$ эквивалентна геометрии оснащенного многообразия Грассмана (оснащающий дифференциально-геометрический объект — объект типа фундаментального дифференциально-геометрического объекта первого порядка для $Gr(m, n, r)$). В некоторых случаях первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект $H^{(1)}(m, n, r)$ многообразия $Gr(m, n, r)$ имеет подобъекты. Тогда можно рассматривать многообразие Грассмана $Gr(m, n)$, оснащенное подобъектом объекта $H^{(1)}(m, n, r)$. Если $h(m, n, r)$ — нетривиальный подобъект объекта $H^{(1)}(m, n, r)$, то имеет место следующее определение.

Определение. Если на многообразии Грассмана $Gr(m, n)$ задано поле дифференциально-геометрического объекта $h(m, n, r)$, то многообразие Грассмана $Gr(m, n)$ называется частично неголономным многообразием $NGr(m, n, r, h)$ типа $\{Gr(m, n, r), h(m, n, r), H^{(1)}(m, n, r)\}$.

§ 2. ПОЛУНЕГОЛОМНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ

Конгруэнция прямых. Будем считать, что $n=3, m=1$. Конгруэнция прямых трехмерного проективного пространства P_3 определяется следующими дифференциальными уравнениями (ω_1^3 и ω_2^4 главные 1-формы):

$$\omega_1^4 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4,$$

$$\omega_2^3 = b'\omega_1^3 + c\omega_2^4.$$

Система величин $\{a, b, b', c\}$ образует дифференциально-геометрический объект — первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект конгруэнции прямых $Gr(1, 3, 2)$. Хорошо известно, что с первой дифференциальной окрестностью луча конгруэнции $Gr(1, 3, 2)$ ассоциируются следующие три квадратичные формы:

$$\varphi = a_{pq}t^p t^q, \quad \psi = a^{\alpha\beta}t_\alpha t_\beta, \quad \chi = c_{\alpha\beta}\theta^\alpha \theta^\beta, \quad (24)$$

где t^p — однородные координаты точки луча $l = (A_1 A_2)$ конгруэнции $Gr(1, 3, 2)$, t_α — однородные координаты плоскости, проходящей через луч l конгруэнции, и $\theta^3 = \omega_1^3$, $\theta^4 = \omega_2^4$. Коэффициенты этих квадратичных форм выражаются через компоненты первого фундаментального дифференциально-геометрического объекта конгруэнции $Gr(1, 3, 2)$ следующим образом

$$a_{11} = b, \quad a_{12} = \frac{1}{2}(bb' - ac), \quad a_{22} = b',$$

$$a^{33} = c, \quad a^{34} = \frac{1}{2}(1 + ac - bb'), \quad a^{44} = a,$$

$$c_{33} = ab', \quad c_{34} = \frac{1}{2}(bb' + ac - 1), \quad c_{44} = bc.$$

Квадратичная форма φ определена на луче l рассматриваемой конгруэнции и обращается в нуль в фокусах конгруэнции, т. е. в таких точках $F = t^p A_p$ луча l , для которых $F + dF \in l$. Квадратичная форма ψ определена на пучке плоскостей с осью l и обращается в нуль на фокальных плоскостях конгруэнции $Gr(1, 3, 2)$, т. е. на таких плоскостях $\Pi_2: a_\alpha x^\alpha = 0$ этого пучка, что плоскость $\Pi + d\Pi$ тоже прохо-

дит через луч l . Квадратичная дифференциальная форма χ обращается в нуль на развертывающихся линейчатых поверхностях конгруэнции $Gr(1,3,2)$. Очевидно, что тензоры a_{pq} , $a^{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta}$ являются подобъектами первого фундаментального дифференциально-геометрического объекта конгруэнции $Gr(1,3,2)$.

Заметим, что при помощи квадратичной формы φ можно определить проективное соответствие (инволюцию) между точками луча l , причем двойными элементами этого соответствия являются фокусы луча l конгруэнции. Аналогичным образом определяется проективное соответствие (инволюция) в пучке плоскостей с осью l (двойные элементы — фокальные плоскости конгруэнции).

Таким образом, можно рассматривать многообразие Грасмана $Gr(1,3)$, оснащенное при помощи формы φ (или ψ).

Определение. Частично неголономное многообразие $NGr(1,3,1, \{a_{pq}\})$ типа $\{Gr(1,3,1), \{a_{pq}\} \subset H^{(1)}(1,3,1)\}$ будем называть полунеголономной конгруэнцией первого рода, а частично неголономное многообразие $NG(1,3,1, \{a^{\alpha\beta}\})$ типа $\{Gr(1,3,1), \{a^{\alpha\beta}\} \subset H^{(1)}(1,3,1)\}$ — полунеголономной конгруэнцией второго рода.

Если $\det \|a_{pq}\| > 0$, то полунеголономную конгруэнцию первого рода назовем эллиптической, а если $\det \|a_{pq}\| < 0$, то гиперболической.

§ 3. ПОЛУНЕГОЛОМНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ ПЕРВОГО РОДА

1. Дифференциальная окрестность первого порядка

1. Основные уравнения. Дифференциальные уравнения поля фундаментального дифференциально-геометрического объекта a_{pq} полунеголономной конгруэнции первого рода $NGr(1,3,1, \{a_{pq}\})$ имеют вид

$$\nabla a_{pq} - \omega a_{pq} = a_{pq\alpha}^r \omega_r^\alpha, \quad (25)$$

где $D\omega = 0$. Ограничимся рассмотрением эллиптического случая, т. е. когда $\det \|a_{pq}\| > 0$. Если $M = t^p A_p$ и $N = T^p A_p$ — две точки луча l многообразия $Gr(1,3)$, то эти точки находятся в инволюции, порожденной фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом a_{pq} многообразия $Gr(1,3)$ тогда и только тогда, когда

$$a_{pq} t^p T^q = 0. \quad (26)$$

Двойные точки этого инволютивного соответствия являются мнимыми. В частично канонизированном репере уравнения

(25) примут вид (предполагается, что двойными точками инволютивного соответствия (26) являются точки $A_1 + iA_2$ и $A_1 - iA_2$, т. е. $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$):

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \lambda_\alpha^p \omega_p^\alpha, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \mu_\alpha^p \omega_p^\alpha. \quad (27)$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, мы получим

$$\{\nabla \lambda_\alpha^p + 2\mu_\alpha^p \omega_1^2 + \delta_2^p \omega_\alpha^2 - \delta_1^p \omega_\alpha^1\} \wedge \omega_p^\alpha = 0, \quad (28)$$

$$\{\nabla \mu_\alpha^p + 2\lambda_\alpha^p \omega_2^2 + \delta_1^p \omega_\alpha^2 + \delta_2^p \omega_\alpha^1\} \wedge \omega_p^\alpha = 0. \quad (29)$$

Отсюда, в силу леммы Картана, следует, что

$$\nabla \lambda_\alpha^p + 2\mu_\alpha^p \omega_1^2 + \delta_2^p \omega_\alpha^2 - \delta_1^p \omega_\alpha^1 = \lambda_\alpha^{pq} \omega_q^\beta, \quad (30)$$

$$\nabla \mu_\alpha^p + 2\lambda_\alpha^p \omega_2^2 + \delta_1^p \omega_\alpha^2 + \delta_2^p \omega_\alpha^1 = \mu_\alpha^{pq} \omega_q^\beta, \quad (31)$$

где

$$\lambda_\alpha^{pq} = \lambda_{\alpha}^{qp}, \quad \mu_\alpha^{pq} = \mu_{\alpha}^{qp}. \quad (32)$$

2. Первая дифференциальная окрестность. Система величин $\{\lambda_\alpha^p, \mu_\alpha^p\}$ образует первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект полунеголономной конгруэнции первого рода, а величины $\{\lambda_\alpha^{pq}, \mu_\alpha^{pq}\}$ — второй фундаментальный дифференциально-геометрический объект рассматриваемой полунеголономной конгруэнции. В работе [3] было доказано, что первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект $\{\lambda_\alpha^p, \mu_\alpha^p\}$ имеет следующие подобъекты:

1. Относительный инвариант I , определенный равенством

$$I = - \begin{vmatrix} \lambda_3^1 & \lambda_4^1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_3^1 & \mu_1^2 \\ -\lambda_3^2 & \mu_1^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu_3^1 & \lambda_4^2 \\ \mu_3^2 & -\lambda_4^1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mu_3^1 & \mu_1^1 \\ \mu_3^2 & \mu_1^2 \end{vmatrix}, \quad (33)$$

является решением следующего дифференциального уравнения

$$dI - I(\omega_\alpha^p - \omega_\alpha^\alpha) = I_\alpha^p \omega_p^\alpha, \quad (34)$$

где величины I_α^p являются рациональными функциями от компонент второго фундаментального дифференциально-геометрического объекта полунеголономной конгруэнции первого рода.

2. Свернутый объект h_α^p линейной дифференциально-геометрической связности пространства Q , определенный равенствами:

$$h_\alpha^p = \begin{cases} \frac{1}{2} (-\lambda_\alpha^1 + \mu_\alpha^2), & p = 1, \\ \frac{1}{2} (\lambda_\alpha^2 + \mu_\alpha^1), & p = 2, \end{cases} \quad (35)$$

компоненты которого являются решениями системы дифференциальных уравнений (таких же, как и уравнения (21'))

$$\nabla h_{\alpha}^p + \omega_{\alpha}^p = h_{\alpha\beta}^{pq} \omega_{\beta}^q, \quad (36)$$

где h_{α}^{pq} — рациональные функции от компонент второго фундаментального дифференциально-геометрического объекта рассматриваемой полунеголономной конгруэнции.

3. Тензор $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$, определенный соотношениями

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - h_{\alpha}^1 h_{\beta}^1 - h_{\alpha}^2 h_{\beta}^2, \quad (37)$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu_{\alpha}^1 \mu_{\alpha}^2 \\ \lambda_{\beta}^1 \lambda_{\beta}^2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu_{\beta}^1 \mu_{\beta}^2 \\ \lambda_{\alpha}^1 \lambda_{\alpha}^2 \end{matrix} \right\}, \quad (38)$$

компоненты которого являются решениями системы

$$\nabla \mathfrak{A}_{\alpha\beta} + \mathfrak{A}_{\alpha\gamma} \omega_{\beta}^{\gamma} = \mathfrak{A}_{\alpha\delta} \omega_{\beta}^{\delta} \omega_{\gamma}^{\gamma}, \quad (39)$$

причем $\mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma}^p$ — тоже рациональные функции от компонент второго фундаментального дифференциально-геометрического объекта.

4. Тензор g_{pqr}^{α} , определенный соотношениями (симметрический относительно ковариантных индексов)

$$\begin{aligned} g_{111}^3 &= -g_{122}^3 = \mu_4^2 - h_4^1, \\ g_{122}^3 &= -g_{222}^3 = \lambda_4^2 - h_4^2, \\ g_{122}^4 &= -g_{111}^4 = \mu_3^2 - h_3^1, \\ g_{222}^4 &= -g_{112}^4 = \lambda_3^2 - h_3^2 \end{aligned} \quad (40)$$

и компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla g_{pqr}^{\alpha} + 3g_{pqr}^{\alpha} \omega_s^s = g_{pqr}^{\alpha s} \omega_s^{\beta}. \quad (41)$$

5. Тензор $g_{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6}$, определенный равенствами

$$g_{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6} = \mathfrak{A}_{\alpha\beta} g^{\alpha}(p_1 p_2 p_3) g^{\beta}(p_4 p_5 p_6). \quad (42)$$

6. Дифференциально-геометрический объект $(h_{\alpha}^p, A_{\alpha\beta})$, определяющий инвариантную квадратичку

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2h_{\alpha}^1 x^{\alpha} x^1 - 2h_{\alpha}^2 x^{\alpha} x^2 + A_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0. \quad (43)$$

Заметим, что все компоненты первого фундаментального дифференциально-геометрического объекта полунеголономной конгруэнции первого рода однозначно выражаются через компоненты подобъектов I , h_{α}^p и $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$.

2. Геометрические интерпретации

1. Инвариантная квадратика. Пусть $M = A_1 + tA_2$ и $N = tA_1 - A_2$ — пара соответствующих точек фундаментальной инволюции полуголономной конгруэнции первого рода. Если точка M фиксирована, т. е.

$$\begin{aligned} dt + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^2 - t^2\omega_2^1 &= 0, \\ \omega_1^\alpha + t\omega_2^\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

то, при движении прямой l , точка N описывает поверхность $\{N\}$, касательная плоскость которой (в точке N) имеет вид:

$$(1 + t^2)(x^1 + tx^2) = \{(1 - t^2)(\mu_\alpha^2 - \mu_\alpha^1 t) + 2t(\lambda_\alpha^2 - \lambda_\alpha^1 t)\} x^\alpha. \quad (45)$$

Если точка N фиксирована, т. е.

$$\begin{aligned} \omega_2^\alpha - t\omega_1^\alpha &= 0, \\ dt + t(\omega_1^1 - \omega_2^2) + \omega_2^1 + t^2\omega_1^2 &= 0, \end{aligned} \quad (46)$$

то, при движении прямой l , точка M описывает поверхность $\{M\}$, касательная плоскость которой имеет вид

$$(1 + t^2)(-tx^1 + x^2) = \{(1 - t^2)(\mu_\alpha^2 t + \mu_\alpha^1) + 2t(\lambda_\alpha^2 t + \lambda_\alpha^1)\} x^\alpha. \quad (47)$$

Если точка M перемещается на прямой l , то прямая (45) и (47) описывает линейчатую поверхность шестого порядка, которая вырождается в двойную прямую l и квадратiku второго порядка (43). Этим мы получили геометрическую интерпретацию инвариантной квадратки (43).

2. Инвариантная прямая h . Так как условия инвариантности прямой (относительно преобразований группы H_1)

$$x^p = f_\alpha^p x^\alpha \quad (48)$$

имеют вид

$$\nabla f_\alpha^p + \omega_\alpha^p \equiv 0 \pmod{\omega_p^\alpha},$$

то при помощи свернутого объекта линейной дифференциально-геометрической связности пространства Q всегда в пространстве P_3 определяется поле инвариантных прямых h . Уравнения прямой h имеют вид

$$x^p = h_\alpha^p x^\alpha. \quad (49)$$

Справедливо и обратное утверждение, т. е. если задано поле инвариантных прямых h пространства P_3 , то это поле всегда порождает линейную дифференциально-геометрическую связность главного расслоенного пространства Q :

$$\overset{\circ}{Q}_{\beta\gamma}^{\alpha p} = \delta_\gamma^\alpha h_\beta^p. \quad (50)$$

а также и линейную дифференциально-геометрическую связность главного расслоенного пространства P :

$$\dot{P}_{q\alpha}^{ps} = -\delta_q^s h_p^p. \quad (51)$$

Эти связности определяют линейную дифференциально-геометрическую связность главного расслоенного пространства R , т. е. аффинную связность без кручения многообразия $Gr(1, 3)$:

$$\dot{R}_{p\beta\gamma}^{\alpha qt} = \delta_\beta^\alpha \delta_p^t h_\gamma^q + \delta_p^q \delta_\gamma^\alpha h_\beta^t. \quad (52)$$

Так как дифференциально-геометрический объект h_α^p является алгебраическим комитантом первого фундаментального дифференциально-геометрического объекта полунеголономной конгруэнции первого рода, то аффинная связность $\dot{R}_{p\beta\gamma}^{\alpha qt}$ является внутренней аффинной связностью рассматриваемой полунеголономной конгруэнции.

Приведем геометрическую интерпретацию инвариантной прямой h . Полярная плоскость точки $A_1 + tA_2$ луча l относительно квадрики (43) имеет вид:

$$x^1 + tx^2 - (h_\alpha^1 + th_\alpha^2) x^\alpha = 0. \quad (53)$$

Отсюда следует, что прямые l и h : $x^p = h_\alpha^p x^\alpha$ сопряжены относительно инвариантной квадрики (43). Этим мы получили геометрическую интерпретацию инвариантной прямой h .

Прямая (45) и (47) пересекает инвариантную прямую h (при любом t) тогда и только тогда, когда $l=0$. Этим мы получили геометрическую интерпретацию относительного инварианта I .

При помощи поля инвариантных прямых $h(l)$ определяется инвариантное оснащение полунеголономной конгруэнции первого рода, так как каждой точке $M = A_1 + tA_2$ луча l можно сопоставить плоскость, проходящую через точку M и прямую h , т. е. плоскость (M, h) .

Заметим, что 1-формы внутренних связностей главных расслоенных пространств Q и P имеют вид:

$$\bar{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha + h_\beta^p \omega_p^\alpha, \quad (54)$$

и

$$\bar{\omega}_q^p = \omega_q^p - h_\alpha^p \omega_q^\alpha. \quad (55)$$

3. Индуцированная инволюция. Найдем геометрическую интерпретацию тензора $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$. Полярная плоскость точки $\bar{N}(h_\alpha^1 \bar{x}^\alpha, h_\alpha^2 \bar{x}^\alpha, x^3, x^4)$ инвариантной прямой h относительно квадрики (43) имеет вид

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha x^\beta = 0, \quad (56)$$

и пересекает прямую h в точке $N(h_\alpha^1 x^\alpha, h_\alpha^2 x^\alpha, x^3, x^4)$, где

$$x^3 = -\mathfrak{A}_{3\alpha} \bar{x}^\alpha, \quad x^4 = \mathfrak{A}_{4\alpha} \bar{x}^\alpha.$$

Таким образом, если $\det \|\mathfrak{A}_{\alpha\beta}\| \neq 0$, то между точками N и \bar{N} прямой h установлено взаимно однозначное соответствие (56), которое является инволюцией. Эту инволюцию будем называть индуцированной инволюцией прямой h . Заметим, что индуцированная инволюция прямой h порождает инволюцию в пучке плоскостей с осью l , а фундаментальная инволюция — инволюцию в пучке плоскостей с осью h .

Таким образом, если $\det \|\mathfrak{A}_{\alpha\beta}\| \neq 0$, то с полунеголономной конгруэнцией первого рода ассоциируется полунеголономная конгруэнция второго рода, фундаментальная инволюция которой определяется тензором $\mathfrak{A}^{\alpha\beta}$, где

$$\mathfrak{A}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mathfrak{A}} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \mathfrak{A}_{\alpha\beta}}, \quad (57)$$

$$\mathfrak{A} = \det \|\mathfrak{A}_{\alpha\beta}\|. \quad (58)$$

Из (35), (37) и (38) следует, что элементы определителя \mathfrak{A} можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{33} &= -\frac{1}{4} \{(\mu_3^2 + \lambda_3^1)^2 + (\mu_3^1 - \lambda_3^2)^2\}, \\ \mathfrak{A}_{34} &= -\frac{1}{4} \{(\lambda_3^2 - \mu_3^1)(\mu_4^1 - \lambda_4^2) - (\lambda_4^1 + \mu_4^2)(\lambda_3^1 + \mu_3^2)\}, \\ \mathfrak{A}_{44} &= -\frac{1}{4} \{(\lambda_4^1 + \mu_4^2)^2 + (\mu_4^1 - \lambda_4^2)^2\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{16} \{(\mu_3^1 - \lambda_3^2)(\lambda_4^1 + \mu_4^2) + (\mu_3^2 + \lambda_3^1)(\mu_4^1 - \lambda_4^2)\}^2, \quad (59)$$

т. е. всегда $\mathfrak{A} > 0$. Доказали, что ассоциированная полунеголономная конгруэнция второго рода является эллиптической.

4. Соответствие g . Рассмотрим пучок прямых в плоскости $a_\alpha x^\alpha = 0$ с центром в точке $t^p A_p$. Так как плоскость $a_\alpha x^\alpha = 0$ и точка $t^p A_p$ являются постоянными, то

$$t^p \omega_p^\alpha = 0, \quad (60)$$

$$d \left(\frac{t^2}{t^1} \right) + \frac{t^2}{t^1} (\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^2 - \left(\frac{t^2}{t^1} \right)^2 \omega_2^1 = 0, \quad (61)$$

$$a_\alpha \omega_p^\alpha = 0, \quad (62)$$

$$da_\alpha - a_\beta \omega_\alpha^\beta = \theta a_\alpha \quad (D\theta = 0). \quad (63)$$

Когда прямая l описывает пучок прямых, то точка $M = tA_1 - A_2$, где $t = t^2:t^1$, соответствующая центру этого пучка относительно фундаментальной инволюции, описывает кривую $\{M\}$, касательная которой имеет вид

$$a_\alpha x^\alpha = 0, \quad (64)$$

$$\{(t^2 - 1)(-\mu_3^1 a_4 t + \mu_4^1 a_3 t + \mu_3^2 a_4 - \mu_4^2 a_3) - 2t(-\lambda_3^1 t + \lambda_4^1 a_3 t + \lambda_3^2 a_4 - \lambda_4^2 a_3)\} x^3 + a_4 t(1 + t^2)x^2 + a_4(1 + t^2)x^1 = 0.$$

Эта прямая пересекает инвариантную прямую h тогда и только тогда, когда

$$g_{pqr}^{\alpha} t^p t^q t^r a_\alpha = 0. \quad (65)$$

Откуда и следует геометрический смысл тензора g_{pqr}^{α} . Относительно полученного соответствия g любой точке $A_1 + tA_2$ соответствует единственная плоскость

$$\sigma_{\alpha\beta} g_{pqr}^{\alpha} t^p t^q t^r x^\beta = 0, \quad (66)$$

где

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha < \beta, \\ 0, & \alpha = \beta, \\ -1, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

Так как эта плоскость всегда пересекает инвариантную прямую h , то между точками луча l и точками луча h устанавливается соответствие g :

$$g: M = t^p A_p \rightarrow N = t^\alpha H_\alpha, \quad (67)$$

где

$$H_\alpha = A_\alpha + h_\alpha^p A_p \quad (68)$$

и

$$t^\alpha = g_{pqr}^{\alpha} t^p t^q t^r. \quad (69)$$

5. Точки полярного соприкосновения. Полярная плоскость точки $N \in h$, которая соответствует точке M относительно соответствия g , имеет вид

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta} t^\alpha x^\beta = 0. \quad (70)$$

Таким образом, точке $M = t^p A_p$ соответствуют две плоскости (66) и (70). Эти плоскости совпадают тогда и только тогда, когда

$$g_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n} t^{\rho_1} t^{\rho_2} \dots t^{\rho_n} = 0, \quad (71)$$

т. е. на луче l существуют точки, для которых плоскости (66) и (70) совпадают. Эти точки назовем точками полярного соприкосновения луча l полунеголономной конгруэнции первого рода.

3. Дифференциальная окрестность второго порядка

Так как все компоненты фундаментального дифференциально-геометрического объекта рассматриваемой полунеголономной конгруэнции можно выразить через компоненты дифференциально-геометрических объектов I , h_α^p и $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$, то компоненты второго фундаментального дифференциально-геометрического объекта рассматриваемой полунеголономной конгруэнции можно выразить через компоненты дифференциально-геометрических объектов $\{I, I_\alpha^p\}$, $\{h_\alpha^p, h_{\alpha\beta}^{pq}\}$ и $\{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}, \mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p}\}$.

Дифференцируя внешним образом уравнения (34), (36) и (39), в силу леммы Картана, мы получим

$$\nabla I_\alpha^p - 2\omega_\alpha^p = I_{\alpha\beta}^{pq}\omega_\beta^q, \quad (72)$$

$$\nabla h_{\alpha\beta}^{pq} + h_{\alpha\beta}^q\omega_\beta^p + h_{\beta\alpha}^p\omega_\alpha^q = h_{\alpha\beta\gamma}^{pqr}\omega_\gamma^r, \quad (73)$$

$$\nabla \mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p} + \mathfrak{A}_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot p}\omega_\beta^p + \mathfrak{A}_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot p}\omega_\alpha^p - \mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p}\omega_q^q = \mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{\cdot\cdot pq}\omega_\sigma^q, \quad (74)$$

где

$$I_{\alpha\beta}^{pq} = I_{\beta\alpha}^{qp}, \quad h_{\alpha\beta}^{pqs} = h_{\alpha\gamma\beta}^{psq}, \quad (75)$$

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{\cdot\cdot pq} = \mathfrak{A}_{\alpha\beta\sigma\gamma}^{\cdot\cdot qp}.$$

Найдем неголономные ковариантные производные дифференциально-геометрических объектов h_α^p и $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ относительно внутренней аффинной связности многообразия $Gr(1,3)$. Для этого в системах дифференциальных уравнений (36) и (39) заменим 1-формы ω_β^α и ω_q^p 1-формами $\bar{\omega}_\beta^\alpha$ и $\bar{\omega}_q^p$, которые определены соотношениями (54) и (55). После такой замены мы получим

$$\bar{\nabla} h_\alpha^p + \omega_\alpha^p = H_{\alpha\beta}^{pq}\omega_\beta^q, \quad (76)$$

и

$$\bar{\nabla} \mathfrak{A}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p}\omega_\gamma^p, \quad (77)$$

где $H_{\alpha\beta}^{pq}$ и $G_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p}$ — неголономные ковариантные производные дифференциально-геометрических объектов h_α^p и $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$, т. е.

$$H_{\alpha\beta}^{pq} = h_{\alpha\beta}^{pq} - h_\alpha^q h_\beta^p \quad (78)$$

и

$$G_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p} = \mathfrak{M}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p} - \mathfrak{M}_{\alpha\gamma} h_{\beta}^p - \mathfrak{M}_{\gamma\beta} h_{\alpha}^p. \quad (79)$$

Заметим, что система величин

$$k_{\alpha}^p = -\frac{1}{2I} I_{\alpha}^p \quad (80)$$

является решением системы

$$\nabla k_{\alpha}^p + \omega_{\alpha}^p = k_{\alpha\beta}^{pq} \omega_{\beta}^{\beta}, \quad (81)$$

причем

$$k_{\alpha\beta}^{pq} = k_{\beta\alpha}^{qp}. \quad (82)$$

Таким образом, каждая система величин k_{α}^p , $H_{\alpha\beta}^{pq}$ и $G_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p}$ образует подобъект второго фундаментального дифференциально-геометрического объекта полунеголономной конгруэнции первого рода, причем $H_{\alpha\beta}^{pq}$ и $G_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p}$ — тензоры. Заметим, что тензор $H_{\alpha\beta}^{pq}$ имеет следующие подобъекты (тензоры):

$$H_{\alpha\beta} = \sigma_{pq} H_{\alpha\beta}^{pq}, \quad (83)$$

$$K_{\alpha\beta} = H_{(\alpha\beta)} \quad (84)$$

$$H_{pq} = \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{ps} \sigma_{qt} H_{\beta\alpha}^{st}, \quad (85)$$

$$K_{pq} = H_{(pq)}, \quad (86)$$

$$H_{p_1 p_2 p_3 p_4} = \frac{1}{2} \sigma_{p_1 q_1} \sigma_{p_2 q_2} \sigma_{p_3 q_3} \sigma_{p_4 q_4} \sigma^{\gamma\delta} \sigma^{\alpha\beta} H_{\alpha\gamma}^{q_1 q_2} H_{\beta\delta}^{q_3 q_4}, \quad (87)$$

$$K_{p_1 p_2 p_3 p_4} = H_{(p_1 p_2 p_3 p_4)}, \quad (88)$$

$$H_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = \frac{1}{2} \sigma_{pq} \sigma_{rs} H_{\alpha\beta}^{pr} H_{\gamma\epsilon}^{qs}, \quad (89)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = H_{(\alpha\beta\gamma\epsilon)}, \quad (90)$$

причем $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, $\sigma_{12} = -\sigma_{21} = 1$ и $\sigma^{33} = \sigma^{44} = 0$,
 $\sigma^{34} = \sigma^{43} = 1$.

4. Геометрические интерпретации

Найдем геометрические интерпретации подобъектов $H_{\alpha\beta}^{pq}$, k_{α}^p и $G_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot p}$.

1. Тензор кривизны внутренней аффинной связности. Для этого рассмотрим 2-форму

$$D\bar{\omega}_{p\beta}^{\alpha q} - \bar{\omega}_{p\gamma}^{\alpha r} \wedge \bar{\omega}_{r\beta}^{\gamma q},$$

где

$$\bar{\omega}_{p\beta}^{\alpha q} = \omega_{p\beta}^{\alpha q} + \dot{R}_{p\beta\gamma}^{\alpha qt} \omega_l^\gamma.$$

Так как величины $\dot{R}_{p\beta\gamma}^{\alpha qt}$ являются решениями системы

$$\nabla \dot{R}_{p\beta\gamma}^{\alpha qt} + \delta_\beta^{\alpha'} \dot{\omega}_{p'}^t \omega_\gamma^q + \delta_p^q \dot{\omega}_\gamma^{\alpha'} \omega_\beta^t = \dot{R}_{p\beta\gamma\sigma}^{\alpha qts} \omega_\sigma^s, \quad (91)$$

где

$$\dot{R}_{p\beta\gamma\sigma}^{\alpha qts} = \delta_\beta^{\alpha'} \delta_p^t h_{\gamma\sigma}^{qs} + \delta_p^q \delta_\gamma^{\alpha'} h_{\beta\sigma}^{ts}, \quad (92)$$

то, выполнив соответствующие вычисления, мы получим

$$D \bar{\omega}_{p\beta}^{\alpha q} - \bar{\omega}_{p\gamma}^{\alpha r} \wedge \bar{\omega}_{r\beta}^{\gamma q} + R_{p\beta\gamma\sigma}^{\alpha qst} \omega_\sigma^\gamma \wedge \omega_l^s, \quad (93)$$

где

$$R_{p\beta\gamma\sigma}^{\alpha qst} = \dot{R}_{p\beta\gamma\sigma}^{\alpha qst} - \dot{R}_{p\beta\sigma\gamma}^{\alpha qts} - \dot{R}_{r\beta\gamma}^{\alpha qs} \dot{R}_{p\sigma\epsilon}^{art} + \dot{R}_{r\beta\epsilon}^{\alpha qt} \dot{R}_{p\sigma\gamma}^{\ars}, \quad (94)$$

т. е. величины $R_{p\beta\gamma\sigma}^{\alpha qst}$ образуют тензор кривизны внутренней аффинной связности. Тензор Риччи этого тензора кривизны выражается через компоненты тензора $H_{\alpha\beta}^{pq}$.

2. Присоединенные линейчатые поверхности. Рассмотрим новый репер $\{H_i\}$, где

$$H_p = A_p, \quad H_\alpha = A_\alpha + h_\alpha^p A_p$$

и

$$dH_i = \theta_i^k H_k,$$

причем 1-формы ω_i^k и θ_i^k связаны следующими соотношениями

$$\theta_p^\alpha = \omega_p^\alpha, \quad \theta_\alpha^p = \nabla h_\alpha^p + \omega_\alpha^p - h_\beta^p h_\alpha^q \omega_q^\beta, \quad (95)$$

$$\theta_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta + h_\alpha^q \omega_q^\beta, \quad \theta_p^q = \omega_p^q - h_\alpha^q \omega_\alpha^p. \quad (96)$$

Так как 1-формы $\nabla h_\alpha^p + \omega_\alpha^p$, в силу (36), являются главными, то 1-формы θ_α^p можно представить в следующем виде

$$\theta_\alpha^p = H_{\alpha\beta}^{pq} \omega_q^\beta. \quad (97)$$

Если фиксируем точку $M = t^p A_p$ луча l и плоскость $\Pi(t) : T^3 x^4 = 0$, проходящую через луч l , то прямая l в плоскости $\Pi(t)$ описывает пучок прямых (с центром в точке M), а инвариантная прямая $h(l)$ описывает некоторое линейчатое многообразие $\{h(l)\}$. Из условий стационарности точки M и плоскости $\Pi(t)$, т. е. условий (35) и (36) (при $a_3 = -T^4$, $a_4 = T^3$) следует, что 1-формы ω_α^p выражаются только через 1-форму θ :

$$\omega_1^\alpha = -t^2 T^\alpha \theta, \quad \omega_2^\alpha = t^1 T^\alpha \theta. \quad (98)$$

Так как

$$dH_\alpha = \theta_\alpha^\beta H_\beta + \theta_\alpha^p H_p,$$

то, в силу (97) и (98), линейчатое многообразие $\{h(l)\}$ (M и $\Pi(t)$ — фиксированы) является линейчатой поверхностью. Эту линейчатую поверхность будем называть присоединенной линейчатой поверхностью (она зависит от выбора пучка прямых). Дифференциальные уравнения присоединенной линейчатой поверхности имеют вид:

$$\theta_\alpha^p = H_\alpha^p \theta. \quad (99)$$

где

$$H_\alpha^p = H_{\alpha\beta}^{p[2t^1]} T^\beta. \quad (100)$$

Касательная плоскость $\Sigma(\tilde{T})$ точки $\tilde{N} = \tilde{T}^\alpha H_\alpha$ присоединенной линейчатой поверхности определяется точками H_α и $H_\alpha^p \tilde{T}^\alpha H_p$, т. е.

$$\Sigma(\tilde{T}) = (H_3, H_4, H_\alpha^p \tilde{T}^\alpha H_p).$$

Эта плоскость пересекает прямую l в точке $\tilde{M} = H_\alpha^p \tilde{T}^\alpha H_p$. Если однородные координаты точки \tilde{M} обозначим через \tilde{t}^p , то

$$\frac{\tilde{t}^1}{H_\alpha^1 \tilde{T}^\alpha} = \frac{\tilde{t}^2}{H_\alpha^2 \tilde{T}^\alpha}$$

или

$$\tilde{t}^{[1} H_{\alpha\beta}^{2][2t^1]} T^\beta \tilde{T}^\alpha = 0. \quad (101)$$

Так как плоскость $\Pi(t)$ пересекает прямую h в точке $N = T^\alpha H_\alpha$, то мы получили соответствие между двумя точками M и \tilde{M} прямой l и двумя точками N и \tilde{N} прямой h . Это соответствие будем называть соответствием H . Если любые две точки из этих четырех точек заданы, то соответствие H между остальными двумя точками является проективным соответствием. Соответствие H определяется тензором $H_{\alpha\beta}^{pq}$.

3. Точки коррелятивной неголономности. Если пара точек N и \tilde{N} задана, то соответствие H между точками N и \tilde{N} будет инволюцией тогда и только тогда, когда

$$H_{\alpha\beta} T^\alpha \tilde{T}^\beta = 0, \quad (102)$$

где $H_{\alpha\beta}$ — тензор, определенный равенствами (83), т. е. соответствие H между точками M и \tilde{M} является инволюцией тогда и только тогда, когда точки N и \tilde{N} находятся в проективном соответствии (102). Проективное соответствие (102) определяется тензором $H_{\alpha\beta}$, а двойные точки этого проек-

тивного соответствия являются решениями квадратичного уравнения

$$K_{\alpha\beta} T^{\alpha} T^{\beta} = 0, \quad (103)$$

т. е. определяются тензором (84).

Если пара точек M и \tilde{M} задана, то соответствие H между остальными двумя точками N и \tilde{N} будет инволюцией тогда и только тогда, когда

$$H_{pq} t^p \tilde{t}^q = 0, \quad (104)$$

где H_{pq} — тензор, определенный равенствами (85). Таким образом, соответствие H между двумя точками N и \tilde{N} является инволюцией тогда и только тогда, когда точки M и \tilde{M} находятся в проективном соответствии (104), определенном тензором H_{pq} . Двойные точки этого проективного соответствия определяются уравнением

$$K_{pq} t^p t^q = 0, \quad (105)$$

т. е. тензором K_{pq} , который определен равенствами (86).

О п р е д е л е н и е. Точки луча l , определенные уравнением (105), будем называть точками коррелятивной неголономности полунеголономной конгруэнции первого рода, а плоскости, проходящие через луч l и пересекающие инвариантную прямую h в точках (103), будем называть плоскостями коррелятивной неголономности рассматриваемой полунеголономной конгруэнции.

Эти определения оправдываются следующим обстоятельством. Заметим, что комплекс коррелятивных элементов, введенный К. И. Гринцевичем [4], можно рассматривать как оснащенное многообразие Грассмана $Gr(1,3)$, причем оснащающим дифференциально-геометрическим объектом является относительный инвариант такого же типа, как и относительный инвариант I . В первой дифференциальной окрестности комплекса коррелятивных элементов всегда выделяется инвариантная прямая такого же типа, как и инвариантная прямая h полунеголономной конгруэнции первого рода, т. е. структура первого фундаментального дифференциально-геометрического объекта комплекса коррелятивных элементов такая же, как и структура дифференциально-геометрического объекта $2h_{\alpha}^p$. Отсюда следует, что многообразие Грассмана, оснащенное дифференциально-геометрическим объектом h_{α}^p , следовало бы называть неголономным комплексом коррелятивных элементов. Второй фундаментальный дифференциально-геометрический объект комплекса кор-

релятивных элементов имеет такую же структуру, как и дифференциально-геометрический объект $H_{\alpha\beta}^{pq}$, но только он симметричен относительно пар индексов $\binom{p}{\alpha}$ и $\binom{q}{\beta}$. Поэтому точки неголономности (и плоскости неголономности) комплекса коррелятивных элементов не определены, т. е. любая точка луча l (любая плоскость, проходящая через луч) является точкой (плоскостью) неголономности.

Тензор $H_{\alpha\beta}^{pq} - H_{\beta\alpha}^{qp}$ является тензором неголономности неголономного комплекса коррелятивных элементов, т. е. если $H_{\alpha\beta}^{pq} = H_{\beta\alpha}^{qp}$, то неголономный комплекс коррелятивных элементов вырождается в голономный комплекс коррелятивных элементов.

4. Инфлекссионные центры и плоскости. Уравнение (101) разлагается на два линейных множителя относительно T^α и \tilde{T}^α , если

$$\begin{vmatrix} \tilde{t}^1 H_3^{21} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} t^1 & \tilde{t}^1 H_3^{21} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tilde{t}^1 \\ \tilde{t}^1 H_4^{21} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} t^1 & \tilde{t}^1 H_4^{21} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tilde{t}^1 \end{vmatrix} = 0, \quad (106)$$

т. е. если этим уравнением определяется соответствие между точками M и \tilde{M} луча l , которое можно представить в следующем виде

$$H_{pqrs} \tilde{t}^p \tilde{t}^q t^r t^s = 0. \quad (107)$$

Это соответствие определяется тензором (87) и имеет четыре двойные точки, которые определяются уравнением

$$K_{pqrs} t^p t^q t^r t^s = 0, \quad (108)$$

причем тензор K_{pqrs} определен равенствами (88).

Определение. Двойные точки соответствия (107) назовем инфлекссионными центрами полунеголономной конгруэнции первого рода. Эти точки являются аналогами инфлекссионных центров комплекса прямых.

Уравнение (101) разлагается на два линейных множителя относительно t^p и \tilde{t}^q , если

$$\begin{vmatrix} H_{\alpha\beta}^{11} \tilde{T}^\alpha T^\beta & -H_{\alpha\beta}^{12} \tilde{T}^\alpha T^\beta \\ -H_{\alpha\beta}^{21} \tilde{T}^\alpha T^\beta & H_{\alpha\beta}^{22} \tilde{T}^\alpha T^\beta \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. этим уравнением определяется соответствие между плоскостями $\Pi(N)$ и $\Pi(\tilde{N})$ пучка плоскостей (с осью l), которое можно представить в следующем виде

$$H_{\alpha\beta\gamma\epsilon} T^\alpha T^\beta \tilde{T}^\gamma \tilde{T}^\epsilon = 0. \quad (109)$$

Это соответствие имеет четыре двойные плоскости, проходящие через луч l и пересекающие инвариантную прямую h в точках

$$K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} T^\alpha T^\beta T^\gamma T^\varepsilon = 0. \quad (110)$$

Определение. Двойные плоскости соответствия (109) назовем инфлекционными плоскостями полунеголономной конгруэнции первого рода.

5. Вторая инвариантная прямая k . Проективную группу $PG(3, R)$ можно представить в пространстве симметрических тензоров $T_{ij} = T_{ji}$, причем дифференциальные уравнения такого представления имеют вид (условия инвариантности полярного соответствия $T_{ij}x^i y^j = 0$):

$$\nabla T_{ij} - T_{ij}\theta = 0 \quad (D\theta = 0). \quad (111)$$

Если $\tau = \det \|T_{pq}\|$, $I = \det \|T_{ij}\|$, то уравнением

$$|I| = \sqrt{\frac{\tau^2}{|T|}},$$

где I — относительный инвариант, в пространстве симметрических тензоров определяется семейство алгебраических гиперповерхностей (I — параметр семейства). Так как

$$dT_{pq} - T_{ps}\omega_q^s - T_{sq}\omega_p^s - T_{pq}\theta = T_{\alpha q}\omega_p^\alpha + T_{p\alpha}\omega_q^\alpha,$$

то и правая часть уравнения (112) является функцией параметров координат прямой l . Характеристика алгебраической гиперповерхности (112) имеет вид

$$T^2 I^4 = \tau^4, \quad T_{\alpha s} = \frac{1}{2I} I_\alpha^p T_{ps}. \quad (113)$$

Характеристическое полярное соответствие

$$T_{pq}x^p y^q + \frac{1}{2I} I_\alpha^p T_{pq} x^q y^\alpha + \frac{1}{2I} I_\alpha^p T_{qp} x^\alpha y^q + T_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = 0 \quad (114)$$

зависит от параметров $T_{\alpha\beta}$ и T_{pq} , которые связаны соотношением $T^2 I^4 = \tau^4$. Прямая, сопряженная прямой l относительно характеристического полярного соответствия, имеет вид:

$$T_{pq} \left(x^p + \frac{1}{2I} I_\alpha^p x^\alpha \right) = 0.$$

Отсюда следует, что инвариантная прямая $x^p = k_\alpha^p x^\alpha$, где

$$k_\alpha^p = -\frac{1}{2I} I_\alpha^p, \quad (115)$$

сопряжена прямой l относительно произвольного характеристического полярного соответствия (при произвольных T_{pq} и $T_{\alpha\beta}$).

Таким образом, получили геометрическую интерпретацию второй инвариантной прямой k , которая определяется дифференциальной окрестностью второго порядка полунеголономной конгруэнции первого рода.

6. Ассоциированный неголономный комплекс. Заметим, что величины

$$L_{\alpha}^p = h_{\alpha}^p - k_{\alpha}^p \quad (116)$$

образуют тензорное поле, т. е.

$$\nabla L_{\alpha}^p = L_{\alpha\beta}^{pq} \omega_{\gamma}^{\beta} \quad (117)$$

Многообразие Грассмана $Gr(1,3)$, оснащенное тензорным полем L_{α}^p , называется неголономным комплексом (см. [1, 5]). Так как тензор L_{α}^p является алгебраическим комитантом второго фундаментального дифференциально-геометрического объекта полунеголономной конгруэнции первого рода, то этот комплекс назовем ассоциированным неголономным комплексом рассматриваемой полунеголономной конгруэнции. При помощи тензора L_{α}^p каждой точке $M = t^p A_p$ прямой l можно сопоставить плоскость

$$t^{[1} L_{\alpha}^{2]} x^{\alpha} = 0. \quad (118)$$

Рассмотрим плоскости (M, h) и (M, k) . Тогда плоскость (118) определяется как плоскость, проходящая через пару пересекающихся прямых l и $(M, h) \times (M, k)$.

7. Соответствие \mathcal{M} . При помощи тензора $G_{\alpha\beta\gamma}^p$ определяется соответствие между точками инвариантной прямой и h плоскостями пучка плоскостей с осью l . Это соответствие имеет вид

$$G_{\alpha\beta\gamma}^p x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma} a_p = 0. \quad (119)$$

Аналогичным образом можно строить и дифференциальную геометрию гиперболической полунеголономной конгруэнции первого рода, а также и дифференциальную геометрию полунеголономной конгруэнции второго рода, но только в этом случае соответствующие дифференциально-геометрические объекты будут интерпретироваться при помощи двойственных геометрических конструкций.

Выражаю глубокую благодарность проф. К. И. Гринцевичу, под непосредственным руководством которого выполнена эта работа.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Близник а с В. И., Гринцевичю с К. И., О неголономной линейчатой геометрии. Третья Прибалтийская геом. конфер. Тезисы докладов. Палаанга, 1968, 21—25
2. Близник а с В. И., Некоторые вопросы неголономной геометрии. Лит. мат. сб., 1970, 10, № 3, 640—641
3. Близник е н е И. В., О геометрии секущей поверхности одного класса пространств тензорных опорных элементов с линейчатой базой. Лит. мат. сб., 1969, 9, № 2, 233—242
4. Гринцевичю с К. И., О комплексе коррелятивных элементов. Лит. мат. сб., 1964, 4, № 3, 329—335
5. —, О неголономном комплексе. Лит. мат. сб., 1969, 9, № 1, 85—99
6. Лапте в Г. Ф., Геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. мат. об-ва, 1953, 2, 275—362
7. —, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961. Л., 1964, 2, 226—233
8. Лумисте Ю. Г., Связности в однородных расслоениях. Мат. сб., 1966, 69, 419—454
9. Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии. Т. 1. ИЛ, М., 1954
10. —, Методы алгебраической геометрии. Т. 2, ИЛ, М., 1954

I. V. Bliznikienė

ON THE GEOMETRY OF THE SEMI-NON-HOLONOMIC CONGRUENCES OF THE FIRST KIND

The Grassman manifold $Gr(1,3)$ which is equipped by the tensor field a_{pq} is called a semi-non-holonomic congruence. The structure of the first two fundamental geometrical objects of this congruence (in the elliptical case) is considered and the geometrical interpretation of subobjects

$$1, h_{\alpha}^p, U_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}^{p,q}, k_{\alpha}^p, H_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta\gamma\epsilon}$$

and others is obtained.

It is shown that with the semi-non-holonomic congruence we can associate principal fibre bundles P , Q and R with the linear differential-geometrical connection. The geometrical characteristics of the two points of the correlative non-holonomy and the four inflection centres of the straight line of this congruence are found.