С. Дориченко, Л. Медников, И. Рубанов, А. Семенов, А. Шаповалов, XXXIV Турнир городов, *Квант*, 2013, номер 4, 42–43

https://www.mathnet.ru/kvant1962

ОЛИМПИАДЫ

XXXIV Турнир городов

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (3)[1]. На плоскости даны шесть точек. Известно, что их можно разбить на две тройки так, что получатся два треугольника. Всегда ли можно разбить эти точки на две тройки так, чтобы получились два треугольника, которые не имеют друг с другом никаких общих точек (ни внутри, ни на границе)?

Г.Жуков

2 (4). Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа A при помощи таких операций можно получить число $A+1$? (Если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)

Е.Бакаев

3 (4). Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши весов, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов.

А.Толпыго

4 (5). См. задачу М2309 «Задачника «Кванта».

5 (5). В четырехугольнике $ABCD$ угол B равен $150°$, угол C прямой, а стороны AB и CD равны. Найдите угол между стороной BC и прямой, проходящей через середины сторон BC и AD.

Н.Стрелкова

10–11 классы

1 (3). См. задачу 2 базового варианта для 8–9 классов.

2 (4). На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Пусть CE – высота, опущенная на гипотенузу AB. Докажите, что угол LEM прямой.

И.Рудаков

3 (4). См. задачу 4 базового варианта для 8–9 классов.

4 (4). См. задачу М2310 «Задачника «Кванта».

5 (5). Назовем приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами *сносным*, если его корни – целые числа, а коэффициенты не превосходят по модулю 2013. Вася сложил все сносные квадратные трехчлены. Докажите, что у него получился трехчлен, не имеющий действительных корней.

Г.Жуков

[1] Здесь и далее в скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.

Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них – натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?

Г.Жуков

2 (4). Двадцать детей – десять мальчиков и десять девочек – встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка сказала, сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.

Е.Бакаев

3 (5). Можно ли в таблице 19×19 отметить несколько клеток так, чтобы во всех квадратах 10×10 было разное количество отмеченных клеток?

Е.Бакаев

4 (5). По кругу расставили 1000 ненулевых чисел и раскрасили их поочередно в белый и черный цвета. Оказалось, что каждое черное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним черных чисел. Чему может быть равна сумма всех 1000 чисел?

Б.Френкин

5 (6). Назовем точку на плоскости *узлом*, если обе ее координаты – целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено ровно два узла. Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

А.Полянский

6 (8). Пусть I – центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC, касающейся катетов AC и BC в точках B_0 и A_0 соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_0 на прямую AI, и перпендикуляр, опущенный из B_0 на прямую BI, пересекаются в точке P. Докажите, что прямые CP и AB перпендикулярны.

Д.Швецов

7 (9). В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитариев состоит из n человек, команда математиков – из m, причем $m \neq n$, а стол для игры всего один. Поэтому было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд играют между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры тот, кто стоит первым в очереди, заменяет за столом члена своей команды и играет с оставшимся за столом. А человек, которого заменили, становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

А.Бердников, И.Митрофанов

10–11 классы

1 (3). См. задачу 1 сложного варианта для 8–9 классов.

2 (4). На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. Затем по одному пришли еще 20 детей, и каждый садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика – *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. В итоге оказалось, что мальчики и девочки на скамейке чередуются. Можно ли наверняка сказать, сколько отважных среди детей на скамейке?

Е.Бакаев

3 (6) Назовем точку на плоскости *узлом*, если обе ее координаты – целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два каких-то узла внутри треугольника, которая либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

А.Полянский

4 (6). Числа 1, 2, …, 100 стоят по кругу в некотором порядке. Может ли случиться, что у любых двух соседних чисел модуль разности не меньше 30, но не больше 50?

А.Шаповалов

5 (7). См. задачу М2313 «Задачника «Кванта».

6. Даны пять различных положительных чисел, сумма квадратов которых равна сумме всех десяти их попарных произведений.

а) (4) Докажите, что среди пяти данных чисел найдутся три, которые не могут быть длинами сторон одного треугольника.

(б) (5) Докажите, что таких троек найдется не менее шести (тройки, отличающиеся только порядком чисел, считаем одинаковыми).

И.Богданов

7. Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста – число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. Могут ли они гарантировать результат:

а) (5) более 500; б) (7) не менее 999?

А.Шаповалов, К.Кноп

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график еще какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?

Г.Жуков

2. См. задачу М2312 «Задачника «Кванта».

3. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z соответственно. На плоскости отметили точку K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY и KZ пересекают прямые BC, CA и AB в точках X_1, Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой.

Ф. Ивлев

4. Конечно или бесконечно множество натуральных чисел, у которых как в десятичной записи, так и в семеричной записи нет нуля?

И.Митрофанов

5. См. задачу М2314 «Задачника «Кванта».

6. Даны 1000000 окружностей, проходящих через одну точку. Докажите, что их можно разбить на 12 групп так, что среди окружностей одной группы ни одна не будет проходить через центр другой.

В.Мокин

Публикацию подготовили С.Дориченко, Л.Медников, И.Рубанов, А.Семенов, А.Шаповалов

LXXVI Московская математическая олимпиада

6 класс

1. Вася умножил некоторое число на 10 и получил простое число. А Петя умножил то же самое число на 15, но все равно получил простое число. Может ли быть так, что никто из них не ошибся?

В.Клепцын

2. Вот ребус довольно простой:
ЭХ вчетверо больше, чем ОЙ,
АЙ вчетверо больше, чем ОХ.
Найди сумму всех четырех.

Д.Шноль

3. См. задачу 1 «Кванта» для младших школьников».

4. 13 детей сели за круглый стол и договорились, что мальчики будут врать девочкам, а друг другу говорить правду, а девочки, наоборот, будут врать мальчикам, а друг другу говорить правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчики». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчики», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребенок не сказал первому: «Большинство из нас мальчики». Сколько мальчиков было за столом?

А.Хачатурян

5. Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6

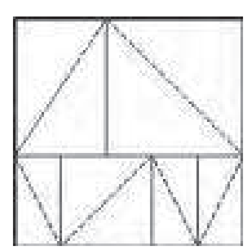

Рис. 1