



Общероссийский математический портал

А. В. Александров, Л. В. Дородницын, А. П. Дубень, Генерация трехмерных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2018, 221

<https://www.mathnet.ru/ipmp2579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

20 мая 2025 г., 16:32:49





ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Александров А.В.,  
Дородницын Л.В., Дубень А.П.**

Генерация трехмерных  
турбулентных полей  
скорости на основе  
рандомизированного  
спектрального метода

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П. Генерация трехмерных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 221. 18 с. doi:[10.20948/prepr-2018-221](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-221)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-221>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.В. Александров, Л.В. Дородницын, А.П. Дубень**

**Генерация трехмерных  
турбулентных полей скорости  
на основе рандомизированного  
спектрального метода**

**Москва — 2018**

*Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П.*

### **Генерация трехмерных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода**

В работе стохастический спектральный метод, предложенный ранее для генерации двумерных изотропных однородных турбулентных полей, обобщается на трехмерный случай. Приводятся результаты численного анализа предложенной методики. Показывается, что полученные реализации турбулентных полей обладают необходимыми свойствами для использования в качестве граничных условий для LES/DNS расчетов.

**Ключевые слова:** синтетическая турбулентность, рандомизированный спектральный метод

*Alexandrov Anatoly, Dorodnicyn Ludwig, Duben Aleksey*

### **Generation of three-dimensional turbulent velocity fields on the base of a randomized spectral method**

The stochastic spectral method proposed earlier for the generation of two-dimensional isotropic homogeneous turbulent fields is generalized to the three-dimensional case. The results of a numerical analysis of the proposed method are presented. It is shown that the obtained implementations of turbulent fields have the necessary properties for use as boundary conditions for LES / DNS calculations.

**Key words:** synthetic turbulence, randomized spectral method

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00726-А.

## **Оглавление**

Введение .....	3
Генерация трехмерного турбулентного поля скорости на основе спектрального метода .....	4
Генерация трехмерного турбулентного поля скорости на основе рандомизированного спектрального метода .....	6
Анализ численных реализаций трехмерного турбулентного поля скорости.....	8
Заключение.....	14

## Введение

В настоящее время при проведении численного моделирования турбулентных течений с помощью вихреразрешающих подходов широко востребованы методы, позволяющие получать искусственно сгенерированные турбулентные поля, обладающие заданным статистическими и физическими характеристиками. Необходимость в использовании таких полей возникает, например, в задачах аэроакустики [1-5]. Синтетически сгенерированные турбулентные поля могут использоваться в качестве начальных условий для верификации и валидации RANS/LES кодов [6], когда экспериментально известны свойства турбулентного течения на последующие моменты времени. В последнее время синтетические турбулентные поля всё чаще применяются для задания входных нестационарных граничных условий при расчетах турбулентных течений гибридными RANS/LES методами [7].

Среди множества существующих способов постановки нестационарных входных условий для LES расчета наиболее универсальным представляется применение метода генерации синтетических турбулентных полей, удовлетворяющих заданным статистическим и физическим требованиям. Использование таких полей часто позволяет сократить вычислительные затраты за счет уменьшения области или времени, которые необходимы для развития турбулентного течения, то есть перехода от искусственно созданного в физически корректное состояние. В частности, синтетические турбулентные поля, построенные на основе наиболее распространенных спектральных методов, позволяют существенно сократить расчетную область/время расчета, хотя и требуют некоторой переходной зоны/времени для развития турбулентного течения (например, для восстановления значения трения на стенке). Уменьшение этой переходной зоны/времени и связанных с ними вычислительных затрат является в настоящее время одной из важнейших характеристик метода генерации синтетической турбулентности.

В настоящей работе стохастический спектральный метод, предложенный ранее для генерации двумерных изотропных однородных турбулентных полей в работах [4,5], обобщается на трехмерный случай. Свойства турбулентных полей, сгенерированных с помощью предложенного метода, исследуются численно. Показывается, что полученные реализации турбулентных полей обладают необходимыми свойствами для их использования в качестве граничных условий.

Как правило, неоднородные анизотропные синтетически сгенерированные турбулентные поля, необходимые для инженерных задач, строятся на основе искусственно сгенерированных однородных изотропных полей с помощью тензорного масштабирования, предложенного в работе [8], или его упрощенной формы, использующей разложение Холецкого тензора Рейнольдсовых напряжений [9-11]. Обе методики применимы для адаптации к

анизотропному случаю полей, полученных с помощью рассматриваемого генератора.

## **Генерация трехмерного турбулентного поля скорости на основе спектрального метода**

Простейшим способом постановки нестационарных входных условий на границе LES области, основанных на искусственно сгенерированных турбулентных полях, является использование белого шума с равномерно распределенной по масштабам энергией в качестве турбулентных пульсаций [12]. Практика показала, что такой подход не работает. Сгенерированные пульсации довольно быстро затухают, распространяясь вниз по потоку. По всей видимости, это происходит из-за отсутствия временных и пространственных корреляций и несоответствия энергетического спектра. Возникает вопрос: каким требованиям должны удовлетворять искусственно сгенерированные турбулентные поля для их использования в качестве входных граничных условий? В настоящий момент исчерпывающего ответа на этот вопрос нет, однако принято считать [12], что синтетическое турбулентное поле должно обладать теми же свойствами, которые известны о реальном физическом турбулентном поле, а именно: должны совпадать такие статистические характеристики, как одноточечные моменты первого и более высоких порядков, двухточечные пространственные корреляции, спектральное распределение энергии; должна корректно воспроизводиться известная информация о форме и ориентации разрешаемых масштабов; кроме того, одним из требований может быть соблюдение корректности двухточечных корреляций скорости третьего порядка (для воспроизведения нелинейного энергетического каскада). Для дозвуковых течений должно выполняться условие без дивергентности. Сам метод генерации полей не должен приводить к возникновению паразитных артефактов, таких как нефизические акустические волны или нефизическая периодичность течения. Помимо этого, для практического использования важны простота и невысокая вычислительная стоимость, т.к. метод должен позволять генерировать нестационарные реализации турбулентного поля «на лету» во время LES расчета.

В настоящей работе рассматриваются спектральные методы построения однородного изотропного синтетического турбулентного поля скорости. Изотропность и однородность понимаются здесь в смысле инвариантности статистических характеристик относительно поворота и переноса соответственно.

Идея построения однородного изотропного синтетического турбулентного поля скорости на основе спектрального представления впервые встречается в работе Р. Крайчнана [13]. Автор предложил определять пульсации скорости в точке  $\mathbf{r}$  в следующем виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N [\mathbf{v}(k_n) \cos(\mathbf{k}_n \mathbf{r} + \omega_n t) + \mathbf{w}(k_n) \sin(\mathbf{k}_n \mathbf{r} + \omega_n t)],$$

где  $\mathbf{k}_n$  – волновые векторы, а  $\mathbf{v}(k_n)$  – амплитуды гармоник. Для обеспечения несжимаемости турбулентного поля векторы  $\mathbf{v}(\mathbf{k}_s), \mathbf{w}(\mathbf{k}_s)$  и  $\mathbf{k}_n$  строятся так, чтобы соблюдалось следующее условие:  $\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}_n) = \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{w}(\mathbf{k}_n) = 0$ .

Изотропность обеспечивается тем, что волновые векторы  $\mathbf{k}_n$  выбираются равномерно распределенными по сфере. Оставшиеся параметры Крайчнан предлагал определять стохастически на основе модельного энергетического спектра.

В дальнейшем этот подход получил развитие в целом ряде работ [1-3,6,9].

Карвейт и др. в работе [1] использовали моды на основе комплексных экспонент, а в качестве энергетического спектра брали спектр фон-Кармана Пао

$$E(k) = \frac{k^4}{(k^2 + k_0^2)^{17/6}} \exp\left(-2,25(\eta k)^4\right),$$

где  $\eta$  – колмогоровский масштаб, а константа  $k_0 = \frac{1}{L_0} = \frac{1}{0,032}$  обеспечивает соответствие известному однородному изотропному турбулентному полю за решеткой, экспериментально изученному Ком-Бело и др. в работе [14]. Авторы исследовали детали применения данного спектрального метода. Среди прочего они указали на то, что для корректного описания энергонесущих масштабов необходимо использовать логарифмический масштаб при выборе волновых чисел. Помимо этого, они считали целесообразным отказаться от стохастического выбора параметров, в частности, в силу небольшого числа используемых мод и нецелесообразности, в этих условиях, фактически случайного задания параметров мод с низкими волновыми числами. Известно, что зависящие от времени турбулентные течения очень чувствительны именно к пульсациям с такими масштабами.

Необходимо заметить, что стохастический выбор параметров метода лучше соответствует природе турбулентности и, тем самым, в силу приведенного выше критерия соответствия искусственно сгенерированного поля физическому, кажется более предпочтительным. Помимо этого, при определенных условиях детерминированный выбор параметров может привести возникновению паразитных артефактов, таких как нефизическая периодичность.

Тем не менее, в дальнейшем именно подход с детерминированным выбором волновых чисел и/или амплитуд мод оказался наиболее распространенным.

Опишем его, следуя работе [2]. Рассмотрим трехмерное преобразование Фурье турбулентного однородного изотропного поля скорости в точке  $\mathbf{r}$

$$u(\mathbf{r}, t) = \int \tilde{u}(\mathbf{k}, t) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$

В случае конечного числа мод интеграл перейдет в сумму. Тогда для кинетической энергии турбулентности получим выражение

$$K = 1/2 (u_i, u_i) = \sum_{n=1}^N \tilde{u}_n^2 = \int_0^{\infty} E(k) dk,$$

где  $E(k)$  – энергетический спектр турбулентности. Откуда получим выражение для амплитуд гармоник  $\tilde{u}_n = \sqrt{E(k_n)\Delta k}$ .

Таким образом, в соответствии со спектральным методом трехмерное турбулентное однородное изотропное поле скорости в данной точке  $\mathbf{r}$  строится в следующем виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 2 \sum_{n=1}^N \sigma_n \tilde{u}_n \cos(\mathbf{k}_n \mathbf{r} + \psi_n),$$

где  $\sigma_n$  – единичный вектор, ортогональный к  $\mathbf{k}_n$ , а фаза  $\psi_n$  является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале  $[0, 2\pi]$ . Значения модуля волнового вектора, как правило, выбирают распределенными по закону геометрической прогрессии между минимальным, определяемым размером энергонесущих вихрей, и максимальным, определяемым шагом сетки, волновыми числами.

В работе [8] был предложен метод со случайными амплитудами, именно он реализован в пакете AnsysFluent.

## Генерация трехмерного турбулентного поля скорости на основе рандомизированного спектрального метода

Одновременно с детерминированным подходом в работах [4,5] развивался подход со стохастическим выбором параметров. На основе рандомизированного спектрального метода [15] для задач аэроакустики был предложен метод генерации двумерного гауссова изотропного турбулентного поля.

В рамках него поле скорости представлялось в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N A Q(\omega) \left[ \xi_n \cos(\tilde{\mathbf{k}}_n(\omega \mathbf{r})) + \eta_n \sin(\tilde{\mathbf{k}}_n(\omega \mathbf{r})) \right],$$

где матрица  $Q(\omega)$  имеет элементы  $q_{ij}(\omega) = \delta_{ij} - \omega_j \omega_j$ ,  $\omega_1 = \cos(2\pi\gamma)$ ,  $\omega_2 = \sin(2\pi\gamma)$ ,  $\gamma$  – равномерно распределенная на  $[0, 1]$  случайная величина. Два независимых случайных двумерных вектора  $\xi_n$  и  $\eta_n$  имеют гауссовское распределение со средним 0 и дисперсией 1. В дальнейшем будем называть такой способ генерации турбулентного поля рандомизированным спектральным методом (РСМ) в отличие от детерминированного спектрального метода (СМ) генерации. К сожалению, данный подход не получил дальнейшего развития.

Реализуемые с помощью метода РСМ поля обладали теоретически необходимыми статистическими характеристиками. В частности, у них



совпадали одноточечные моменты первого второго и третьего порядков, а также продольная и поперечная корреляционные функции с соответствующими физическими характеристиками. В соответствии с обсуждавшимся выше представляется естественным использование данного метода для генерации турбулентных полей с целью построения входных граничных условий для LES расчетов.

В настоящей работе метод генерации двумерного изотропного турбулентного поля скорости, основанный на рандомизированном спектральном подходе, обобщен на трехмерный случай.

Рассмотрим следующую интерпретацию РСМ метода.

Легко проверить, что для гармоник из  $\Delta k$  величина  $\bar{E}_n = \langle (Q_{ij}\xi_n^j, Q_{ij}\xi_n^j) \rangle = A^2$ . Для того чтобы поле имело заданный энергетический спектр  $E(k)$  в среднем, необходимо, чтобы

$$E(k_n)\Delta k_n = \bar{E}_n N_k,$$

где  $N_k$  – количество выпадений случайной величины  $\tilde{\mathbf{k}}_n$  в  $\Delta k_n$ . Очевидно, что  $N_k = p(k_n)\Delta k_n N$ , где  $p(k)$  – плотность вероятности модуля волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Пусть  $p(k) = E(k)/\sigma^2$ , где кинетическая энергия турбулентности  $\int_0^\infty E(k)dk = \sigma^2$  и, следовательно,  $\int_0^\infty p(k)dk = 1$ . Тогда, используя выражения для  $\bar{E}_n$  и  $N_k$ , получим

$$E(k_n)\Delta k_n = \frac{A^2 E(k_n)\Delta k_n N}{\sigma^2}.$$

Сокращая, получим, что для того, чтобы поле имело заданный энергетический спектр  $E(k)$  в среднем, необходимо, чтобы  $A = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ .

Для кинетической энергии турбулентности получим

$$\int_0^\infty E(k)dk = \sum_{n=1}^N E(k_n)\Delta k_n = \sum_{n=1}^N \bar{E}_n p(k_n)\Delta k_n N = \frac{\sum_{n=1}^N A^2 E(k_n)\Delta k_n N}{\sigma^2} = \sigma^2.$$

*При такой интерпретации двумерный РСМ метод легко обобщить на трехмерный случай.*

Пусть аналогично двумерному случаю трехмерное поле скорости представляется в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N A Q(\omega) \left[ \xi_n \cos(\tilde{\mathbf{k}}_n(\omega \mathbf{r})) + \boldsymbol{\eta}_n \sin(\tilde{\mathbf{k}}_n(\omega \mathbf{r})) \right],$$

где матрица  $Q(\omega)$  имеет элементы  $q_{ij}(\omega) = \delta_{ij} - \omega_j \omega_j$ . В трехмерном случае единичный вектор  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  равномерно распределен по сфере, а два независимых случайных трехмерных вектора  $\xi_n$  и  $\boldsymbol{\eta}_n$  имеют гауссовское распределение со средним 0 и дисперсией 1. В трехмерном случае для гармоник из  $\Delta k$  величина  $\bar{E}_n = \langle (Q_{ij}\xi_n^j, Q_{ij}\xi_n^j) \rangle = 2A^2$ . Следовательно, в трехмерном случае для того, чтобы поле имело заданный энергетический спектр  $E(k)$  в среднем, необходимо, чтобы  $A = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$ . Таким образом, в трехмерном случае окончательно получим

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^N Q(\omega) \left[ \xi_n \cos(\tilde{\mathbf{k}}_n(\omega \mathbf{r})) + \eta_n \sin(\tilde{\mathbf{k}}_n(\omega \mathbf{r})) \right].$$

В качестве энергетического спектра можно использовать модифицированный спектр Кармана-Пао из [9]

$$E(k) = \frac{\left(\frac{k}{k_e}\right)^4}{\left(1 + \left(\frac{k}{k_e}\right)^2\right)^{17/6}} f_\eta f_{cut},$$

где функции  $f_\eta = \exp\left(-\left(12\frac{k}{k_e}\right)^2\right)$  и  $f_{cut} = \exp\left(-\frac{4\max(k-0.9k_{cut})}{k_{cut}}\right)$  отвечают за изменение формы спектра при приближении к колмогоровскому волновому числу  $k_\eta$  и быстрое уменьшение вблизи максимально разрешимого на используемой сетке волнового числа  $k_{cut}$ .

## Анализ численных реализаций трехмерного турбулентного поля скорости

Исследуем свойства описанного РСМ генератора на примере искусственно сгенерированного однородного изотропного турбулентного поля в кубе с безразмерной стороной  $2\pi$ .

Пример реализации поля скорости приведен на рис. 1 слева. На рисунке 1 справа изображены изоповерхности Q-критерия. Видно, что полученная с помощью рандомизированного спектрального метода реализация поля скорости обладает свойствами изотропной и развитой турбулентности.

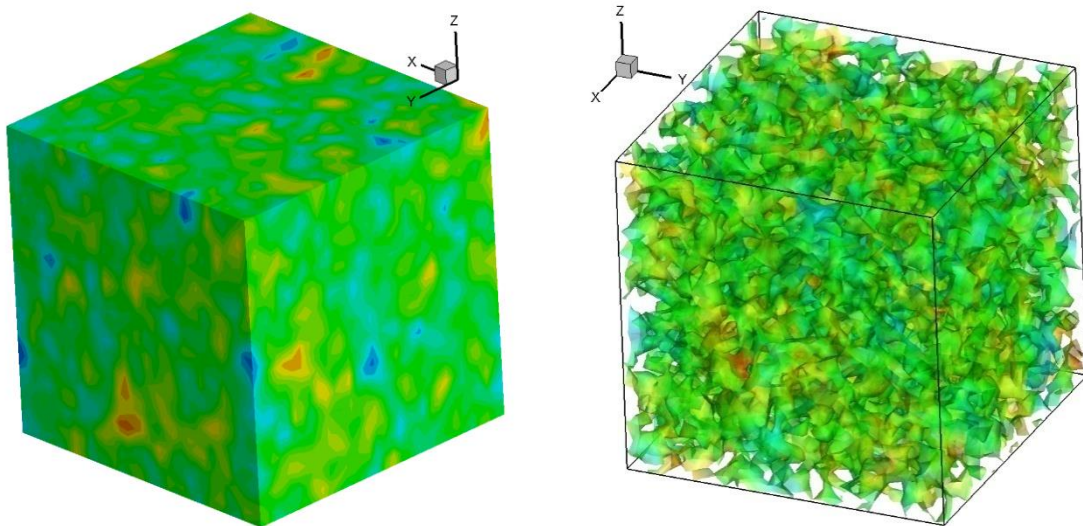


Рис. 1. Поле компоненты скорости (слева)  
и изоповерхности Q-критерия (справа).

Для оценки качества сгенерированного поля в соответствии со сказанным выше рассмотрим одноточечные моменты первого, второго и третьего порядков, двухточечные пространственные корреляции и спектральное распределение энергии.

Одноточечные моменты будем вычислять на основе осреднения 3000 реализаций поля. Для моментов первого порядка должно выполняться:  $\langle u_x \rangle = \langle u_y \rangle = \langle u_z \rangle = 0$ . Для моментов второго порядка –  $\langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle = \sigma^2$ . Для моментов третьего порядка –  $\langle u_x^3 \rangle = \langle u_y^3 \rangle = \langle u_z^3 \rangle = 0$ .

На рисунках 2 и 3 приведены средние значения трех компонент скорости и их квадратов в зависимости от числа реализаций. Можно видеть, с ростом числа осредняемых реализаций они довольно быстро приближаются к теоретическим.

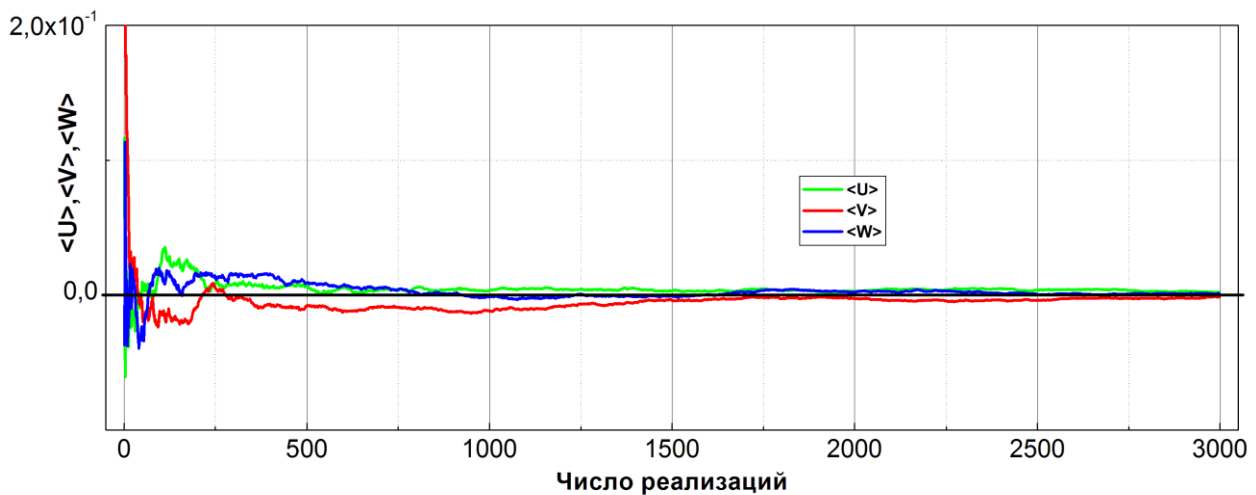


Рис. 2. Моменты первого порядка

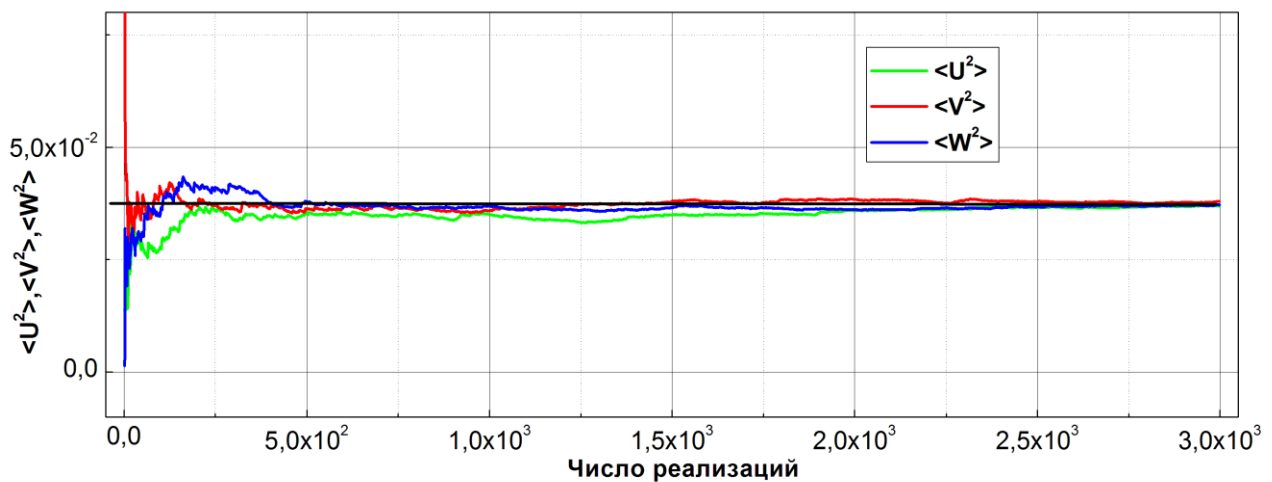


Рис. 3. Моменты второго порядка

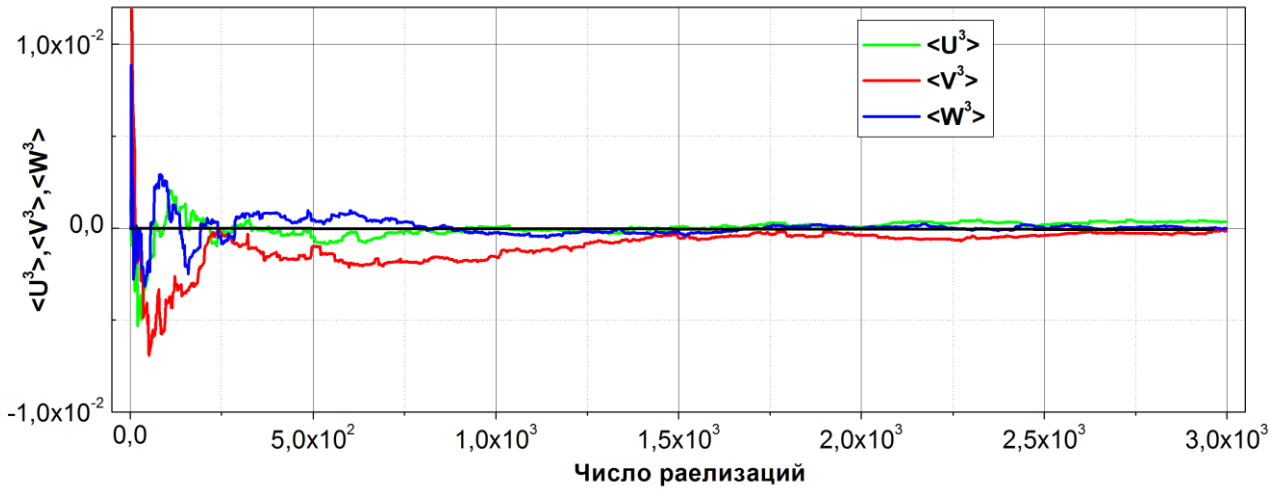


Рис. 4. Моменты третьего порядка

На рисунке 4 приведены значения моментов третьего порядка. С ростом числа осредняемых реализаций они также быстро приближаются к ожидаемым.

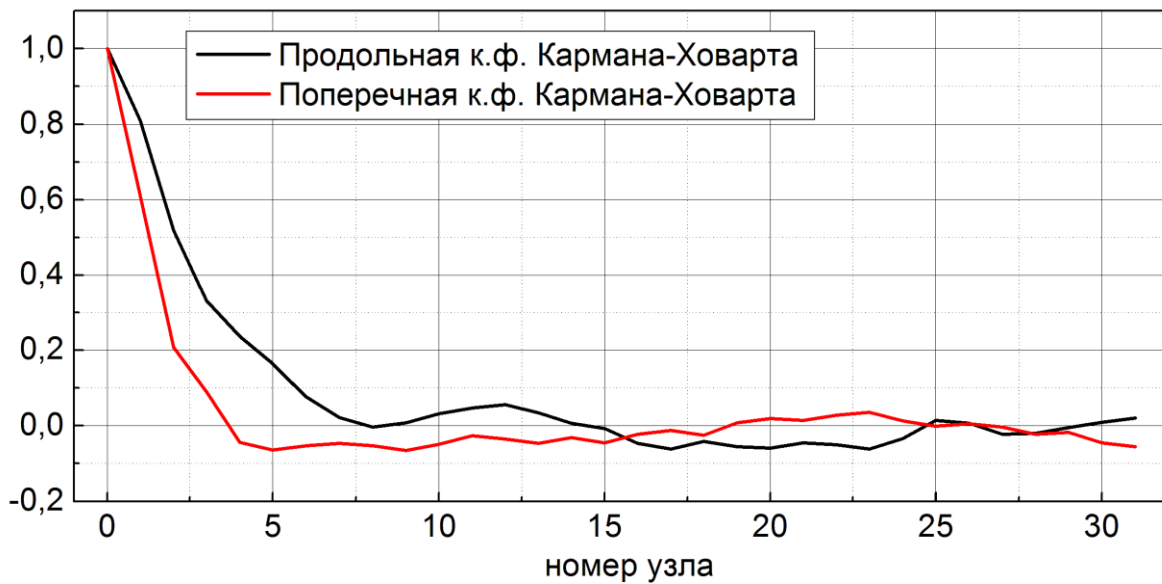


Рис. 5. Двухточечные моменты второго порядка: продольная и поперечная корреляционные функции Кармана-Ховарта

Оценим теперь двухточечные моменты. Будем рассматривать продольную  $f(r) = \langle u_x(0,0,0)u_x(r,0,0) \rangle / \langle u_x^2(0,0,0) \rangle$  и поперечную  $g(r) = \frac{\langle u_y(0,0,0)u_y(r,0,0) \rangle}{\langle u_y^2(0,0,0) \rangle}$  корреляционные функции Кармана-Ховарта. На рисунке 5 приведены графики этих функции в зависимости от расстояния (номера узла). Ожидаемо, максимальное значение корреляции наблюдается в нуле и асимптотически стремится к нулю с ростом  $r$ . Как известно, для однородной турбулентности интегралы от этих функций должны относиться как 2:1. На рисунке 6

приведено это отношение в зависимости от числа осредненных реализаций. Видно, что начиная с тысячи реализаций отношение интегралов также стремится к теоретически ожидаемому.



Рис. 6. Двухточечные моменты второго порядка: продольная и поперечная корреляционные функции Кармана-Ховарта

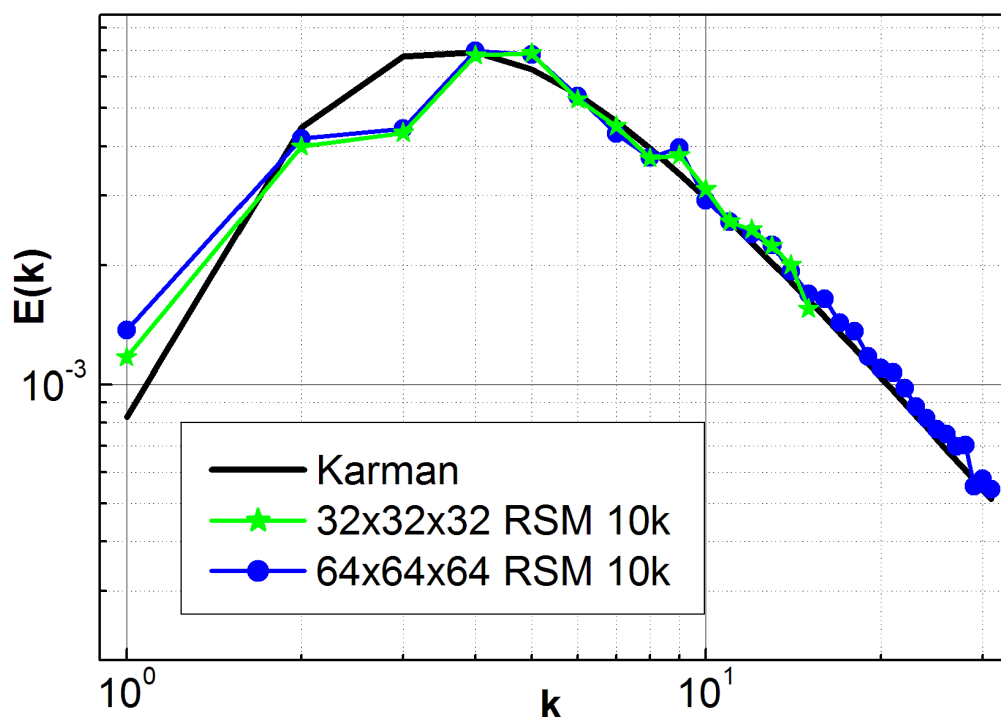


Рис. 7. Энергетический спектр полей, полученных на основе РСМ на сетках с 32 и 64 узлами на ребро куба

Перейдем теперь к оценке энергетического спектра.

На рисунке 7 приведены энергетические спектры реализаций турбулентных полей скорости, полученных на основе рассмотренного рандомизированного спектрального метода на двух сетках. Первая сетка имеет 32 узла на ребро, а вторая – 64. Видно, что в инерционном интервале спектр реализации турбулентного поля скорости очень близок к исходному спектру Кармана-Пао. В энергонесущем диапазоне существует одна гармоника, для которой наблюдается относительно большое отличие.

Аналогичное несовпадение энергетических спектров на одной гармонике наблюдается и при генерации турбулентного поля скорости для рассматриваемой задачи с помощью наиболее популярного спектрального метода [6]. На рисунке 8 приведены энергетические спектры реализаций турбулентного поля скорости, сгенерированных с помощью спектрального метода, описанного в [6], и рандомизированного спектрального метода на сетке, имеющей 33 узла на ребро.

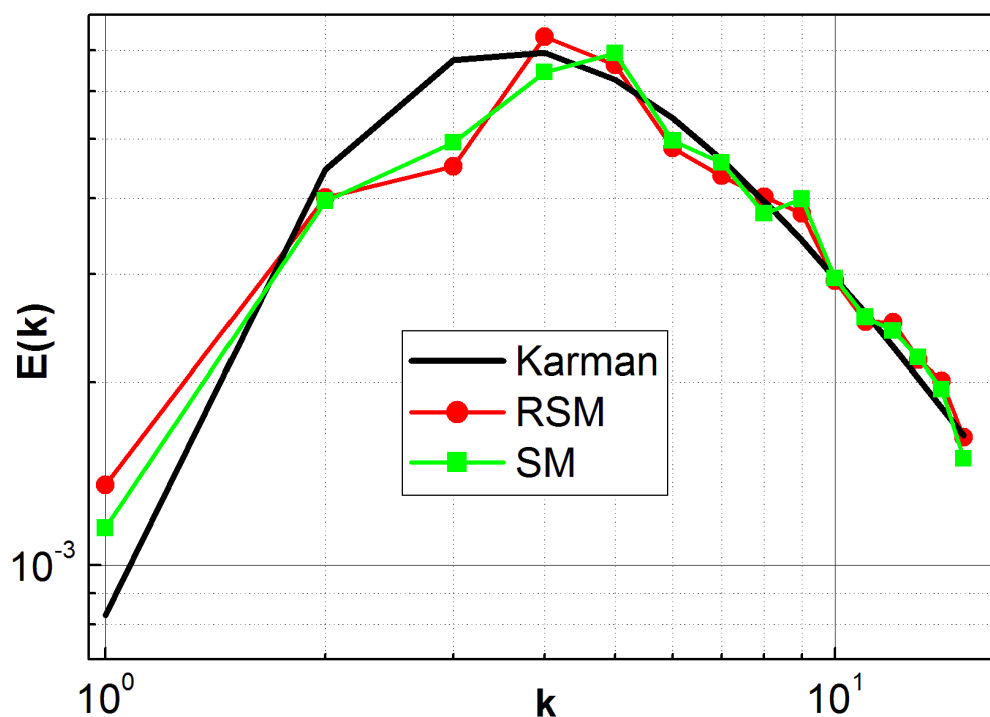


Рис. 8. Энергетический спектр полей, полученных на основе РСМ и СМ

Отметим, что для того, чтобы спектр корректно воспроизводился для поля, сгенерированного на основе метода РСМ, требуется большое количество гармоник. На рисунке 9 приведены энергетические спектры реализаций турбулентного поля скорости, полученные с использованием 1 тысячи, 5 тысяч и 10 тысяч гармоник. Видно, что для относительно малого числа гармоник энергетический спектр воспроизводится недостаточно хорошо. Это объясняется

тем, что статистические свойства проявляются только при большом количестве реализаций волнового вектора.

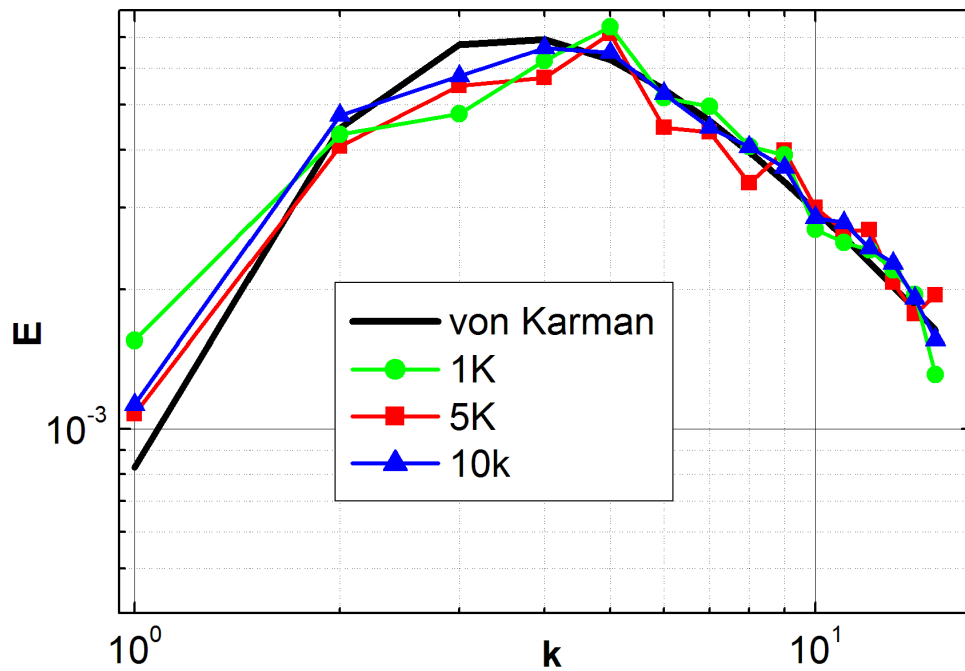


Рис. 9. Энергетический спектр полей, полученных на основе РСМ с использованием 1, 5 и 10 тысяч гармоник

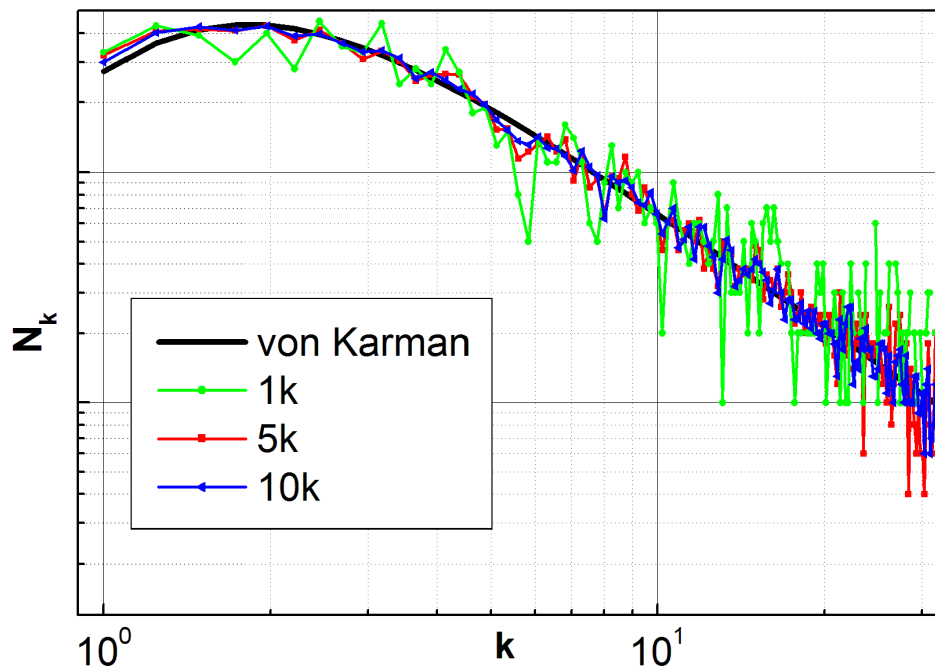


Рис. 10. Число выпадений волнового числа в зависимости от волнового числа при заданной фон Кармановской плотности вероятности для 1, 5, и 10 тысяч реализаций

На рисунке 10 приведены графики зависимости количества выпадений волнового числа от его значения при заданной фон Кармановской плотности вероятности для 1000, 5000 и 10000 реализаций. Для сравнения на этом рисунке также приведена масштабированная плотность вероятности. Очевидно, что соответствие улучшается с ростом числа реализаций

Таким образом, адекватного воспроизведения энергетического спектра можно ожидать только при относительно большом числе реализаций случайной величины или, в нашем случае, большом количестве гармоник. Естественно, что число необходимых гармоник будет зависеть от конкретной задачи, для которой строится искусственное турбулентное поле.

## **Заключение**

В работе обобщен на трехмерный случай рандомизированный метод построения синтетического турбулентного поля скорости, предложенный в [4,5].

Свойства генератора исследованы на примере искусственно сгенерированного однородного изотропного турбулентного поля в кубе. Показано, что статистические характеристики, важные для дальнейшего использования полей, полученных на основе данного метода для построения нестационарных входных граничных условий, совпадают с характеристиками, известными для реального физического турбулентного поля.

Ограничения предложенного метода генерации связаны в первую очередь с относительно большим количеством гармоник, требуемых для проявления статистических свойств. Они должны легко преодолеваться современным уровнем развития вычислительной техники.

Дальнейшее развитие данного метода генерации синтетических турбулентных полей скорости может заключаться в разработке гибридного РСМ-СМ подхода, при котором детерминированный СМ метод будет использоваться для построения энергонесущих гармоник, а моды из инерционного интервала будут строиться на основе РСМ метода.



## Список литературы

1. Karweit M., Blanc-Benon Ph., Juve D. and Comte-Bellot G. Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field: A study of phase variance // *J. Acoust. Soc Am.* 89(1), January 1991.
2. Bechara W., Bailly C., Lafon P., Candel S.M. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // *AIAA journal*, 1994, v.32, № 3, p.455-463
3. Bailly C., Juve D. A Stochastic Approach To Compute Subsonic-Noise Using Linearized Euler's Equations // *AIAA 99-1872, A99-27849*.
4. Боровская И.А., Козубская Т.К., Курбанмурадов О., Сабельфельд К.К. О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование*, 19:10 (2007), 76–88.
5. Боровская И.А. Моделирование однородных случайных полей по заданному спектру в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование*, 19:7 (2007), 67–76.
6. Saad T., Cline D., Stoll R., Sutherland J.C., Scalable Tools for Generating Synthetic Isotropic Turbulence with Arbitrary Spectra // *Article in AIAA Journal/Technical Notes*, August 2016, DOI: 10.2514/1.J055230.
7. Shur M. et al. Improved Embedded Approaches. In: Mockett C., Haase W. // In Schwamborn D. (eds) *Go4Hybrid: Grey Area Mitigation for Hybrid RANS-LES Methods. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, vol 134 (2018). Springer, Cham, DOI: 10.1007/978-3-319-52995-0\_3.
8. Smirnov A., Shi S., Celik I. Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // *J. Fluids Eng* 123(2), 359-371 (Feb 16, 2001).
9. Адамьян Д.Ю., Стрелец М.Х., Травин А.К. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS–LES подходов к расчету турбулентных течений // *Мат. моделирование*, 2011, т. 23, № 7, С. 3–19.
10. Адамьян Д.Ю. Метод генерации синтетической турбулентности на входных границах для расчета турбулентных течений в рамках вихреразрешающих подходов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Санкт-Петербург, 2011.
11. Batten, P., Goldberg, U., and Chakravarthy, S. Interfacing Statistical Turbulence Closures with Large-Eddy Simulation // *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 3, 2004, pp. 485–492. doi:10.2514/1.3496
12. Dhamankar N.S., Blaisdell G.A., and Lyrintzis A. S. Overview of Turbulent Inflow Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations // *AIAA Journal*. Vol. 56, No. 4 (2018), pp. 1317-1334.

13. Kraichnan R. Diffusion by a random velocity field // *The Physics of Fluids* 13(1), (1970).
14. Comte-Bellot G. and Corrsin S. Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated 'isotropic' turbulence // *J. Fluid Mech.* 1971, vol 48, part 2, pp. 273-337.
15. Kurbanmuradov O., Sabelfeld K. Stochastic Spectral and Fourier-Wavelet Methods for Vector Gaussian Random Fields // *Monte Carlo Methods Appl.*, 12:5–6 (2006), 395–445.