Алгебра и логика, 23, № 4 (1984), 419-429

УДК 519.48

О НЕКОММУТАТИВНЫХ ИНВАРИАНТАХ РЕДУКТИВНЫХ ГРУПП

А. Н. КОРЮКИН

В настоящей работе рассматривается вопрос о конечной порождаемости алгебр инвариантов некоторых линейных групп, действующих на конечно-порожденных ассоциативных алгебрах. При стандартной постановке вопроса в некоммутативном случае уже для конечных групп получаются в основном отрицательные результаты. В этом случае справедлива следующая теорема, доказанная независимо Диксом и Форманеком [1] и Харченко [2]:

ТЕОРЕМА. Пусть G — конечная группа линейных преобразований конечномерного пространства V. Рассмотрим индуцированное действие G на тензорной алгебре $F\langle V\rangle$ пространства V. Тогда алгебра инвариантов $F\langle V\rangle^G$ конечно-порождена в том и только в том случае, когда G — группа скалярных преобразований.

Основным результатом § 1 настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть G — группа линейных преобразований конечномерного пространства V, W — минимальное (по включению) подпространство V такое, что $F\langle V\rangle^G \subseteq F\langle W\rangle$. Тогда $F\langle V\rangle^G$ конечно-порождена тогда и только тогда, когда G действует на W как конечная группа скалярных преобразований.

Необходимо заметить, что в некоммутативном случае алгебра инвариантов линейно действующей группы обладает дополнительной алгебраической структурой, вырождающейся в классическом случае. Хорошо известно, что на m-й тензорной степени пространства V действуют как линейная группа $GL(V)$, так и группа подстановок S_m, переставляющая местами (одинаковым образом) сомножители во всех суммах тензоров. Более того, эти действия централизуют друг друга, и, значит, алгебра инвариантных тензоров любой группы $G \subseteq GL(V)$ также допускает действие группы S_m. Понятно также, что построение инварианта f^{σ} по инварианту f и подстановке σ не представляет никаких вычислительных затруднений и поэтому разумно исследовать алгебру инвариантов $F\langle V\rangle^G$ как ассоциативную алгебру, на однородных компонентах которой действуют симметрические группы. Теперь возникает естественный вопрос: существует ли конечное множество инвариантов такое, что все остальные выражаются через них с помощью операций алгебры и действия симметрических групп на однородных компонентах ? Для конечных групп и полей нулевой характеристики этот вопрос явно сформулирован в [2]. Теорема 3 настоящей работы дает положительный ответ на этот вопрос для редуктивных групп. В теореме 4 найдены условия, при которых алгебра некоммутативных инвариантов редуктивной группы конечно-порождена как алгебра.

§ 1. Конечная порожденность алгебры некоммутативных инвариантов

В дальнейшем V – фиксированное конечномерное пространство над полем F, U, W – его подпространства, $F\langle V\rangle$ – тензорная (свободная) алгебра пространства V, A – множество элементов тензорной алгебры. Очевидно, что $F\langle U\rangle \cap F\langle W\rangle = F\langle U \cap W\rangle$. Поэтому если $A \subseteq F\langle U\rangle$, $A \subseteq F\langle W\rangle$, то $A \subseteq F\langle U \cap W\rangle$. Отсюда для конечномерного пространства V и любого A следует существование наименьшего по включению подпространства пространства V, тензорная алгебра которого содержит все элементы из A. Это пространство будем называть опорным пространством множества A.

ЛЕММА 1. *Если множество A устойчиво относительно действия линейной группы G (т.е. $A^g = A$ для всякого g из G), то и его опорное пространство устойчиво относительно G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – опорное пространство для A. Так как $A \subseteq F\langle U\rangle$, то $A^g \subseteq F\langle U^g\rangle$ для всякого g из G. Но $A^g = A$, следовательно, $A \subseteq F\langle U \cap U^g\rangle$. Если $U^g \neq U$, то U не есть опорное пространство. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Если алгебра инвариантов $F\langle V\rangle^G$ конечно-порождена (для линейной группы G), то G действует на опорное пространство алгебры инвариантов, как конечная циклическая группа скалярных матриц.*

Для доказательства нам потребуется ряд лемм.

Если X – базис V, то мультипликативное замыкание множества X – свободная полугруппа, элементы ее называем мономами, словами или последовательностями (от X), элементы множества X – буквами. Как обычно, считаем, что на однородных компонентах полугруппы мономов действуют симметрические группы (по формуле $(y_1 \cdot \ldots \cdot y_m)^H = y_{H(1)} \cdot \ldots \cdot y_{H(m)}$, y_i – буквы). Элементы тензорной алгебры записываем в виде $x = \sum \alpha_e e$, где суммирование ведется по конечному множеству различных мономов, α_e – коэффициенты из поля. Если $\alpha_e \neq 0$, то говорим, что моном e *используется в записи* x. Пусть M – множество мономов, A – множество элементов тензорной алгебры, y – буква. Будем говорить, что y *имеет вхождение* в M (в A), если y имеет вхождение в какое-нибудь слово из M (в моном, который *используется в записи* некоторого элемента из A). Будем говорить, что последовательность букв $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ согласована с M (с A), если хотя бы один из мономов вида $y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$ есть элемент M (*используется в записи* хотя бы одного элемента из A).

ЛЕММА 2. *Если мультипликативное замыкание конечного множества мономов M замкнуто относительно действия симметрических групп, то любая бесконечная последовательность букв $y_1, \ldots, y_n \ldots$, имеющих вхождения в M, согласована с M.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m – максимум длин слов из M. Рассмотрим слово $e = e_1 \cdot \ldots \cdot e_m$, где e_i есть слово из M, имеющее вхождение буквы y_i. Переставим буквы в слове e так, чтобы новое слово имело вид $x = y_1 \cdot \ldots \cdot y_m \cdot z$. По условию, x лежит в мультипликативном замыкании множества M, т.е. $x = v_1 \cdot \ldots \cdot v_n$, где v_i из M. Так как длина v_1 не превосходит m, то, сравнивая обе записи слова x, имеем $v_1 = y_1 \cdot \ldots \cdot y_i \in M$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если алгебра R, порожденная конечным множеством A элементов тензорной алгебры, однородна и замкнута относительно действия симметрических групп, то любая бесконечная последовательность букв, имеющих вхождения в A, согласована с A.*

Для доказательства достаточно взять в качестве M множество мономов, используемых в записи A, и воспользоваться предыдущей леммой.

Будем говорить, что автоморфизм пространства V является полупростым (скалярным), если в некотором базисе ему соответствует диагональная (скалярная) матрица.

ЛЕММА 4. Пусть g - автоморфизм конечномерного пространства V над алгебраически замкнутым полем F. Если g не скалярный, то найдется базис X пространства V и бесконечная последовательность букв (из X), которая не согласована с алгеброй некоммутативных инвариантов этого автоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g не полупростой. Рассмотрим базис $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, в котором $x_1^g=\rho x_1+x_2$ и $x_2^g=\rho x_2+x_3$ (либо $x_2^g=\rho x_2$), а пространство $x_3F+\ldots+x_nF$ инвариантно относительно g. Рассмотрим произвольный инвариант f автоморфизма g и представим его в виде $f=\alpha x_1^m+\beta x_1^{m-1}x_2+f_1$, где α,β - из F и в записи f_1 не используются мономы $x_1^m, x_1^{m-1}x_2$. Тогда $f^g=\alpha\rho^m x_1^m+(\beta\rho^m+ +\alpha\rho^{m-1})x_1^{m-1}x_2+f_2$, причем в записи f_2 не используются мономы x_1^m, $x_1^{m-1}x_2$. Так как $f^g=f$, то, сравнивая обе записи элемента f, получаем $\alpha=0$, что означает, что последовательность букв $x_1,\ldots,x_1,\ldots$ не согласована с алгеброй $F\langle V\rangle^g$. Пусть теперь g полупростой, но не скалярный автоморфизм, т. е. в некотором базисе $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ пространства V $x_i^g=\rho_i x_i$ $(\rho_i\in F)$. Для определенности полагаем $\rho_1\neq\rho_2$. Рассмотрим последовательность букв $y_1,\ldots,y_i,\ldots$, где $y_1=x_1$, если $\rho_1\neq 1$, и $y_1=x_2$ - в противном случае; $y_i=x_1$, если $y_1\cdot\ldots\cdot y_{i-1}x_1$ не инвариантен относительно g, и $y_i=x_2$ - в противном случае. По своему построению все мономы $y_1\cdot\ldots\cdot y_i$ не инвариантны относительно g. Но $F\langle V\rangle^g$ есть линейная оболочка мономов (от X), инвариантных относительно g. Это означает, что мономы $y_1\cdot\ldots\cdot y_i$ не используются при записи инвариантов автоморфизма g, т. е. построенная последовательность не согласована с $F\langle V\rangle^g$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть K - расширение поля F, G - группа автоморфизмов V над F, $W=V\otimes_F K$. Тогда алгебра $F\langle V\rangle^G$ конечно-порождена тогда и только тогда, когда алгебра $F\langle W\rangle^G$ конечно-порождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F\langle V\rangle^G$ конечно-порождена и множество $v_1,\ldots$ $\ldots,v_m$ порождает ее, то это же множество порождает и $F\langle W\rangle^G$. Обратно, если множество $u_1,\ldots,u_n$ порождает $K\langle W\rangle^G$, то, расписывая u_i в виде $u_i=\sum u_{ij}\omega_j$, где $\{\omega_j\}$ – базис поля K как пространства над F, получим конечное множество $\{u_{ij}\}$, порождающее алгебру $F\langle V\rangle^G$, что и доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1. Пусть G – линейная группа и алгебра $F\langle V\rangle^G$ конечно-порождена. В силу леммы 5 можно считать, что поле F алгебраически замкнуто. Пусть U – опорное пространство алгебры $F\langle V\rangle^G$. В силу леммы 1 пространство U устойчиво относительно всех автоморфизмов из G. Рассмотрим группу H всех автоморфизмов, получаемых из элементов G сужением на U. Пусть g – произвольный элемент группы H. Если g не скалярный, то в силу леммы 4 найдутся базис пространства U и последовательность букв из этого базиса, которая не согласована с $F\langle U\rangle^g$. Но $F\langle V\rangle^G\subseteq F\langle U\rangle^g$, поэтому эта последовательность букв не согласована и с $F\langle V\rangle^G$, и, по лемме 3, алгебра $F\langle V\rangle^G$ не может быть конечно-порождена. Итак, g скалярный, следовательно, H есть группа скалярных автоморфизмов. Если H бесконечна, то как бесконечная группа скалярных матриц она не имеет ненулевых инвариантов. В этом случае $U=0$ и H тривиальна. Противоречие. Итак, H конечна. Так как H вложима в F (каждому скалярному автоморфизму поставим в соответствие его собственное число), то она, как конечная подгруппа мультипликативной группы поля, циклическая. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть G – почти специальная группа (т.е. конечного индекса над подгруппой специальной группы). Если алгебра $F\langle V\rangle^G$ конечно-порождена, то G – конечная циклическая группа скалярных матриц.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению, найдется такое число m, что $(\det g)^m=1$ для всех g из G, и поэтому группа G имеет инвариант $S_n^m(x_1,\ldots,x_n)$, где $S_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot x_{\sigma(n)}$ (суммирование ведется по всем подстановкам σ) – стандартный многочлен. Если опорное пространство U стандартного многочлена имеет размерность r, меньшую $n=\dim V$, то, выбрав базис $v_1,\ldots,v_r$ в U и пополнив его до базиса $v_1,\ldots,v_n$ пространства V, а затем воспользовавшись равенством $S_n(x_1,\ldots,x_n)=\lambda S_n(v_1,\ldots,v_n)$ $(\lambda\in F)$, получим $S_n(v_1,\ldots,v_n)\subseteq$

$\subseteq F\langle v_1,\dots,v_r\rangle$. Это, очевидно, при $r<n$ неверно. Итак, $r=n$, т.е. U совпадает с V, и утверждение прямо следует из теоремы 1. Утверждение следствия 1 для конечных групп есть теорема Дикса-Форманека-Харченко [1, 2].

СЛЕДСТВИЕ 2. Алгебра некоммутативных инвариантов неприводимой группы матриц либо тривиальна, либо неконечно-порождена.

Для доказательства заметим, что у неприводимой группы матриц нет собственных инвариантных подпространств, а значит, опорное пространство алгебры инвариантов либо 0 и группа не имеет ненулевых инвариантов, либо V. Если во втором случае алгебра инвариантов конечно-порождена, то группа состоит из скалярных матриц и может быть неприводимой только в случае, когда V – одномерное пространство, но тогда нет смысла говорить о некоммутативных инвариантах.

§ 2. Конечная порожденность алгебры инвариантов редуктивной группы с учетом действия симметрических групп

Пусть I – однородный идеал, замкнутый в тензорной алгебре относительно действия симметрических групп на однородных компонентах. Алгебру $R=F\langle V\rangle/I$ будем называть S-алгеброй. Она градуирована, и симметрические группы, как и в тензорной алгебре, действуют линейными преобразованиями на соответствующих однородных компонентах алгебры R. Любую ее однородную подалгебру (идеал), замкнутую относительно действия симметрических групп, называем S-подалгеброй (S-идеалом). Заметим, что S-подалгебра может и не быть S-алгеброй.

ТЕОРЕМА 2. Любая строго возрастающая последовательность S-идеалов S-алгебры R конечна.

Для доказательства воспользуемся следующим утверждением.

ЛЕММА Хигмана [3, с. 332]. Пусть X – конечное множество букв, $e_1,\dots$ $\dots,e_m,\dots$ – бесконечная последовательность слов (от X). Тогда найдется пара натуральных чисел i,j таких, что $i<j$ и e_i есть подпоследовательность последовательности e_j.

Напомним, что слово e (от X) называется подпоследовательностью слова f (от X), если e может быть получено из f вычеркиванием некоторых букв.

Теорему 2 достаточно доказать для тензорной алгебры. Доказательство проведем от противного. Пусть $I_1,\dots,I_m,\dots$ – бесконечная последовательность S-идеалов в $F\langle V\rangle$. Пусть $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ – базис пространства V. Из элементов множества $I_{m+1}\setminus I_m$ выберем элемент z_{m+1} с минимальным старшим мономом e_{m+1} (от X) в лексикографическом упорядочивании мономов. В силу однородности I_i, элемент z_i также однороден. Для последовательности старших мономов $e_1,\dots,e_m,\dots$ рассмотрим числа i,j из утверждения леммы Хигмана. Пусть

$$e_j = y_1\cdot\ldots\cdot y_m \ (y_i\in X),$$

$$e_i = y_{r_1}\cdot\ldots\cdot y_{r_s} \quad (1\le r_1<r_2<\ldots<r_s\le m).$$

Обозначим через h моном, полученный из e_j вычеркиванием букв, стоящих на местах $r_1,\dots,r_s$. Через $1',\dots,m'$ обозначим последовательность, в которой $1'=r_1,\dots,s'=r_s$, а последовательность $(s+1)',\dots,m'$ получена из последовательности $1,\dots,m$ вычеркиванием подпоследовательности $r_1,\dots,r_s$. Рассмотрим подстановку $H: k'\to k$ $(k=1,\dots,m)$. Запишем z_i в виде $e_i+\sum\alpha_e e$, где суммирование ведется по мономам e, меньшим e_i, α_e из F. (Считаем, что при e_i коэффициент в записи z_i равен единице.) Имеем $(z_ih)H=(e_ih)H+\sum\alpha_e(eh)H$. Покажем, что моном $(e_ih)H$ – старший в записи $(z_ih)H$. Пусть $e<e_i$. В мономах $(eh)H$, $(e_ih)H$ вычеркиванием букв, стоящих на местах $r_1,\dots,r_s$, получаем один и тот же моном h. Поэтому первая ненулевая разность индексов букв достигается на последовательности мест $r_1,\dots,r_s$. В мономе $(eh)H$ последовательность букв, расположенных на местах $r_1,\dots,r_s$, совпадает с e, в мономе $(e_ih)H$ – с e_i. Но $e<e_i$, поэтому $(eh)H<(e_ih)H$ и $(e_ih)H$ – старший в записи $(z_ih)H$. К тому же, по построению, $(e_ih)H= e_j$, поэтому старший моном элемента $z_j-(z_ih)H$ меньше e_j. Но $z_j-(z_ih)H\in I_{j+1}\setminus I_j$, что противоречит выбору z_j. Теорема 2 доказана.

Если S-подалгебра S-алгебры R может быть получена замыканием конечного множества однородных элементов $f_1,\dots,f_m$ операциями алгебры и действием симметрических групп, то говорим, что она порождена как S-подалгебра конечным множеством $f_1,\dots,f_m$ (конечно-порождена). Обозначим ее $SA(f_1,\dots,f_m)$.

ТЕОРЕМА 3. *Алгебра инвариантов линейной редуктивной группы G, действующей на S-алгебре $R=F(V)/I$ $(I^g\subseteq I, g\in G)$, конечно-порож-*

дена как S-подалгебра[*].

Докажем сначала две леммы. Пусть R – S-алгебра, D – ее S-подалгебра, $f_1,\dots,f_m$ – однородные элементы из D, $Sid_D(f_1,\dots,f_m)$ – минимальный по включению однородный идеал алгебры D, замкнутый относительно действия симметрических групп. Элементы $Sid_D(f_1,\dots,f_m)$ записываем в виде

$$\sum_{i,j}(f_i h_{ij})H_j, \tag{1}$$

где h_{ij} – либо однородные из D, либо элементы поля. Через G обозначаем фиксированную редуктивную группу. Для элемента h из R через M_h обозначим минимальное (по включению) пространство в R, содержащее h и инвариантное относительно G, через N_h – пространство, порожденное элементами $h^g - h$ для всех g из G; M_h конечномерно, N_h – его подпространство коразмерности не более чем единица, причем на M_h/N_h группа действует тождественно, либо $M_h = N_h$, либо (в силу редуктивности группы) существует $h^* \in M_h^G$ такой, что $M_h = h^*F + N_h$. В обоих случаях

$$h = h^* + h', \qquad h^* \in M_h^G,\ h' \in N_h. \tag{2}$$

ЛЕММА 6. Пусть R – S-алгебра, на которой градуировано действует редуктивная группа G, $f_1,\dots,f_m$ – однородные элементы алгебры R^G. Тогда $R^G \cap Sid_R(f_1,\dots,f_m) = Sid_{R^G}(f_1,\dots,f_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 6. Достаточно показать включение $R^G \cap Sid_R(f_1,\dots,f_m) \subseteq Sid_{R^G}(f_1,\dots,f_m)$. (Обратное очевидно.) Пусть $x \in R^G \cap Sid_R(f_1,\dots,f_m)$. Тогда в силу (1) имеем $x = \sum_{i,j}(f_i h_{ij})H_j$. Рассмотрим конечное множество $A = \{(i,j) \mid h_{ij} \neq 0\}$. Доказательство того, что $x \in Sid_{R^G}(f_1,\dots,f_m)$, проведем индукцией по числу K элементов множества A.

1°. При $K = 0$ доказательство очевидно.

2°. Пусть для $K-1$ утверждение верно. Рассмотрим x, состоящее из K

---

[*] Напомним, что редуктивной называется линейная группа, все рациональные представления которой вполне приводимы.

слагаемых вида $(fh)H$. Выделим одно из этих слагаемых

$$x=(fh)H+y, \tag{3}$$

где y есть сумма $K-1$ слагаемых вида $(fh)H$, т. е.

$$y=\sum_B (f_i h_{ij})H_j, \tag{3'}$$

где B содержит $K-1$ элементов. Пусть $g\in G$. В силу того, что

$$((fh)H)^g-(fh)H=(f(h^g-h))H,$$

имеем

$$0=x^g-x=(f(h^g-h))H+\sum_B(f_i(h^g_{ij}-h_{ij}))H_j. \tag{4}$$

Рассмотрим для элемента h разложение по формуле (2) $h=h^*+h'$, где $h'=\sum_G(h^g-h)\alpha_g$ для некоторых $\alpha_g\in F$. Домножив равенство (4) на α_g и просуммировав их по всем g из G, получим $0=(fh')H+\sum_B(f_ih'_{ij})H_j$, где h'_{ij} – некоторые элементы из R. Инвариант $x-(fh^*)H$, в силу (2) и (3), равен $(fh')H+y$. Расписывая y по формуле (3') и заменяя $(fh')H$ по формуле (5), получаем

$$x-(fh^*)H=\sum_B(f_i(h_{ij}-h'_{ij}))H_j.$$

Но число элементов множества B равно $K-1$, поэтому, по предположению индукции, $x-(fh^*)H\in Sid_{RG}(f_1,\dots,f_m)$. Но тогда и $x\in Sid_{RG}(f_1,\dots,f_m)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 7. Пусть D – S-подалгебра S-алгебры R, $f_1,\dots,f_m$ – однородные элементы D и $D=Sid_D(f_1,\dots,f_m)$. Тогда $D=SA(f_1,\dots,f_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – однородный элемент алгебры D. По условию леммы, $x=\sum_{i,j}(f_ih_{ij})H_j$, где либо $h_{ij}\in F$, либо h_{ij} – однородный элемент D. Можно также считать, что $\deg x=\deg f_i+\deg h_{ij}$. Индукцией по $K=\deg x$ покажем, что $x\in SA(f_1,\dots,f_m)$. При $K=0$ это очевидно. Пусть $K>0$ и элементы D степени, меньшей K, лежат в $SA(f_1,\dots,f_m)$. В S-алгебре, как и в тензорной алгебре, нет элементов ненулевой степени, кроме нуля. Поэтому $\deg f_i > 0$, $\kappa = \deg x > \deg h_{ij}$ и, по предположению индукции, $h_{ij} \in SA(f_1, \ldots, f_m)$. Но тогда и элемент x лежит в $SA(f_1, \ldots, f_m)$, что и доказывает лемму.

Из доказанных лемм легко вытекает утверждение теоремы 3. Действительно, рассмотрим $Sid_R(R^G)$. В силу теоремы 2, существуют $f_1, \ldots, f_m$ из R^G, которые можно считать однородными, такие, что $Sid_R(R^G) = Sid_R(f_1, \ldots, f_m)$. Тогда, по лемме 6, $R^G = R^G \cap Sid_R(f_1, \ldots, f_m) = Sid_{R^G}(f_1, \ldots, f_m)$. Следовательно, по лемме 7, R^G, как S-подалгебра, порождается элементами $f_1, \ldots, f_m$, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим более подробно вопрос конечной порожденности алгебры некоммутативных инвариантов редуктивной группы. Пусть G – линейная группа; вектор u из V есть полуинвариант группы G, т. е. для всех g из G имеем $u^g = \rho(g)u$, $\rho(g) \in F$, где $\rho: G \to F$ – вес полуинварианта u. Полуинвариант u назовем корневым, если найдется натуральное число m такое, что u^m – инвариант группы G, т. е. $\rho^m(g) = 1$ для всех g из G.

ТЕОРЕМА 4. (а). Если алгебра $F(V)^G$ конечно-порождена, то веса всех корневых полуинвариантов одинаковы.

(б) Если веса всех корневых полуинвариантов одинаковы и G редуктивна, то алгебра $F\langle V\rangle^G$ конечно-порождена тогда и только тогда, когда $F\langle V/W\rangle^G = 0$, где W – пространство корневых полуинвариантов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) – очевидное следствие теоремы 1.

(б) Пусть алгебра $F(V)^G$ конечно-порождена. Предположим, что $F\langle V/W\rangle^G \neq 0$. Рассмотрим $x \in F\langle V/W\rangle^G$, $x \neq 0$, а также прообраз h элемента x при каноническом гомоморфизме $\varphi: F\langle V\rangle \to F\langle V/W\rangle$. В силу формулы (2), $h = h^* + h'$, где h^* – инвариант, h' есть линейная комбинация элементов вида $h^g - h$. Значит, $\varphi(h') = 0$, и $\varphi(h^*) = \varphi(h) = x$. Так как $x \neq 0$, то $h^* \notin \ker\varphi$. В частности, $h^* \notin F(W)$, но, в силу теоремы 1, пространство W совпадает с опорным пространством алгебры $F\langle V\rangle^G$. Противоречие. Обратно, пусть $F\langle V/W\rangle^G = 0$. Так как группа G редуктивна, то найдется G-инвариантное подпространство U такое, что $V=U\oplus W$. Так как пространства U и V/W как G-модули изоморфны, то $F\langle U\rangle^G=0$. Далее, $F\langle V\rangle$ есть прямая сумма G-инвариантных подпространств $V_1\otimes\ldots\otimes V_m$, где V_i есть либо W, либо U. Поэтому и $F\langle V\rangle^G$ есть прямая сумма $(V_1\otimes\ldots\otimes V_m)^G$. Любой элемент из $(V_1\otimes\ldots\otimes V_m)^G$ можно перестановкой привести к виду $x\in(W^{\otimes t}\otimes U^{\otimes s})^G$.

Рассмотрим ненулевой элемент $x\in(W^{\otimes t}\otimes U^{\otimes s})^G$, $x=\sum_i y_i z_i$, где $y_i\in W^{\otimes t}$, $z_i\in U^{\otimes s}$. Можно считать, что $y_1,\ldots,y_i,\ldots$, а также $z_1,\ldots,z_i,\ldots$ линейно независимы. Все y_i как элементы $W^{\otimes t}$ – полуинварианты одного веса. Поэтому z_i – полуинварианты одного веса (обратного к весу полуинвариантов y_i). Но y_i – корневые полуинварианты, поэтому и z_i – корневые полуинварианты. Но $F\langle U\rangle^G=0$, поэтому $z_i=0$ для всех i, т. е. $x=0$. Поэтому $s=0$, $F\langle V\rangle^G=F\langle W\rangle^G$ и алгебра инвариантов конечно-порождена. Теорема доказана.

Литература

1. **W.DICKS, E.FORMANEK, Poincaré series and a problem of S.Montgomery, Lin.Multilin. Algebra, 12, N 1 (1983),21-30.**

2. **V.K.KHARCHENKO, Noncommutative invariants of finite groups and Noetherian varieties, J.Pure Appl.Algebra,31, N 1-3 (1984), 83-90.**

3. **G.HIGMAN, Ordering by divisibility in abstract algebras, Proc. Lond.Math.Soc.,2, N 7 (1952),326-336.**

Поступило 22 марта 1984 г.