



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Анна В. Белицкая, Леон А. Петросян, Сетевая игра сокращения вредных выбросов в атмосферу,
МТИП, 2012, том 4, выпуск 2, 3–13

<https://www.mathnet.ru/mgta78>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 мая 2025 г., 06:24:29



УДК 519.83

ББК 22.18

СЕТЕВАЯ ИГРА СОКРАЩЕНИЯ ВРЕДНЫХ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРУ

АННА В. БЕЛИЦКАЯ

ЛЕОН А. ПЕТРОСЯН

Факультет прикладной математики –
процессов управления

Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: aanytk@yandex.ru, spbuoasis7@peterlink.ru

В работе рассматривается сетевая дифференциальная игра n -лиц сокращения вредных выбросов в атмосферу. За основу взята теоретико-игровая модель экологического регулирования, предложенная в статье [9]. Каждый игрок имеет свою собственную динамику накопленного загрязнения. При этом динамика игрока i , $i = 1, \dots, n$ зависит от выбросов игроков из некоторого множества K_i , где K_i – это множество игроков, связанных дугой с игроком i . Построено равновесие по Нэшу. Исследована кооперативная модель, где в качестве дележа было рассмотрено пропорциональное решение.

Ключевые слова: сетевая игра, равновесие по Нэшу, пропорциональное решение, процедура распределения дележа.

1. Введение

В последнее время возрос интерес к применению теоретико-игровых методов для исследования вопросов, связанных с многосторонними межгосударственными соглашениями по проблеме охраны окружающей среды. Примером таких соглашений является Киотский протокол, в соответствии с которым участники соглашения должны ограничивать уровень загрязнения окружающей среды. Значительное внимание уделяется изучению принципов формирования соглашений,

направленных на снижение уровня загрязнений, в том числе в условиях конфликта интересов участников соглашения; а также теоретико-игровым моделям в области охраны окружающей среды. Одним из примеров таких моделей является теоретико-игровая модель сокращения вредных выбросов в атмосферу.

Модель сокращения вредных выбросов в атмосферу была впервые предложена Л.А. Петросяном и Г. Заккурром [9]. Исследуется ситуация, когда предприятия-загрязнители сами принимают активное участие в регулировании, в результате чего они значительно снижают объемы выбросов, по сравнению с уровнем, установленным законодательством. В модели есть два вида издержек, которые «несут» игроки (предприятия-загрязнители): издержки на возмещение ущерба от загрязнения и издержки на уменьшение выбросов. Целью игроков является уменьшение их суммарных издержек.

В работе рассматривается сетевая игра сокращения вредных выбросов в атмосферу, которая была построена на основе модели, предложенной Л.А. Петросяном и Г. Заккурром [9].

2. Модель

Рассмотрим сетевую игру $G = (X, L)$, где X – конечное множество вершин, L – множество пар (i, j) , называемое множеством дуг, где $i \in X, j \in X$. Точки $x \in X$ будем называть вершинами или узлами сети, а пару $(x, y) \in X$ – дугой, соединяющей узлы x и y .

Рассмотрим игру сокращения вредных выбросов в атмосферу на сети G . Игра представляет собой набор $\Gamma(I, L)$, где I – это множество игроков (предприятий), объединенных в сеть: $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Узлами этой сети являются игроки из множества I . Узлы будем обозначать также как и игроков, соответствующих данным узлам.

L – множество ребер $(i, j) \in L, i \in I, j \in I$.

Выбросы игрока $i, i = 1, \dots, n$ в момент времени $t, t \in [t_0, \infty)$, обозначим как $e_i(t)$.

Введем обозначения:

K_i – множество игроков, от которых зависит динамика накопленного загрязнения игроком i : в нашей модели K_i – это множество игроков, связанных дугой с игроком i ; m_j – количество игроков, динамика накопленного загрязнения которых зависит от выбросов игрока j, e_j .

Пусть $S_i(t)$ – это накопленное загрязнение игроком i за время t . Динамика накопленного игроком i загрязнения определяется дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{S}_i(t) &= \sum_{j \in K_i} \left(e_j \frac{1}{2m_j} \right) + \frac{e_i}{2} - \delta S_i(t), \\ S_i(t_0) &= S_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где δ – коэффициент, характеризующий долю поглощенного загрязнения.

Ребро $(i, j) \in L$ в сетевой игре сокращения вредных выбросов, если динамика накопления загрязнения игроком i зависит от выбросов игрока j . Сеть является ориентированной, то есть если ребро $(i, j) \in L$, то из этого не следует, что ребро $(j, i) \in L$.

В отличие от модели, рассмотренной Л.А. Петросяном и Г. Закурном [9], в сетевой игре сокращения вредных выбросов в атмосферу каждый игрок имеет свою динамику накопления загрязнения. При этом на динамику загрязнения, накопленного игроком i , могут влиять не только выбросы игрока i , но и выбросы других игроков (узлов), которые имеют связь с игроком i .

Игра начинается в момент времени t_0 из начального состояния $S_0 = (S_1^0, \dots, S_n^0)$.

Обозначим за $C_i(e_i)$ издержки на природоохранные мероприятия, которые несет игрок i , если он удерживает выбросы на некотором допустимом уровне e_i :

$$C_i(e_i(t)) = \frac{\gamma}{2}(e_i(t) - \bar{e}_i)^2, \quad 0 \leq e_i(t) \leq \bar{e}_i, \quad \gamma > 0.$$

Параметр \bar{e}_i – это предельно допустимый выброс, определяющий максимально разрешенный уровень выбросов.

Пусть $D_i(S_i)$ – это издержки возмещения ущерба от загрязнения.

$$D_i(S_i) = \pi S_i(t), \quad \pi > 0.$$

Функции издержек являются непрерывно дифференцируемыми и выпуклыми: $C'_i(u_i) < 0$ и $D'_i(x) > 0$. Каждый игрок стремится минимизировать суммарные издержки. Таким образом, потери игроков

(их суммарные издержки) имеют следующий вид:

$$K_i(S_i^0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} (C_i(e_i(t)) + D_i(S_i(t))) dt,$$

где $e = (e_1, \dots, e_n)$ – это ситуация в игре, а ρ – ставка дисконтирования.

3. Равновесие по Нэшу

Для поиска равновесия по Нэшу найдем решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{aligned} \rho F_i(S) = \min_{e_i} \left\{ \frac{\gamma}{2} (e_i - \bar{e}_i)^2 + \pi S_i + \right. \\ \left. + \sum_{l \in I} \frac{\partial F_l(S)}{\partial S_l} \left(\sum_{j \in K_l} (e_j \frac{1}{2m_j}) + \frac{e_l}{2} - \delta S_l \right) \right\}, \quad i \in I, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $F_i(S)$ – функция Беллмана ($i \in I$), $S = (S_1, \dots, S_n)$ – некоторое состояние игры.

Потери i -го игрока в любой фиксированной ситуации $S = (S_1, \dots, S_n)$ зависят лишь от загрязнения, накопленного i -м игроком, и не зависят от загрязнений, накопленных другими игроками. Поэтому функцию Беллмана $F_i(S)$ будем искать в виде

$$F_i(S) = a_i S_i + b_i. \quad (3.2)$$

Найдем производную выражения, стоящего в скобке, в уравнении (3.1) по e_i и приравняем ее к нулю. Получим следующие равновесные по Нэшу стратегии:

$$e_i^N = \bar{e}_i - \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial F_i(S)}{\partial S_i}. \quad (3.3)$$

Подставим в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (3.1) равновесные по Нэшу стратегии e_i^N (3.3) и функцию Беллмана в виде (3.2):

$$\begin{aligned} \rho a_i S_i + \rho b_i = \frac{1}{8\gamma} \left[\frac{\partial(a_i S_i + b_i)}{\partial S_i} \right]^2 + \pi S_i + \left[\sum_{j \in K_i} (\bar{e}_j \frac{1}{2m_j}) + \frac{1}{2} \bar{e}_i - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\gamma} \sum_{j \in K_i} (a_i \frac{1}{2m_j}) - \frac{1}{4\gamma} \frac{\partial(a_i S_i + b_i)}{\partial S_i} \right] \frac{\partial(a_i S_i + b_i)}{\partial S_i} - \frac{\partial(a_i S_i + b_i)}{\partial S_i} \delta S_i. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Упростим полученное уравнение (3.4):

$$\rho a_i S_i + \rho b_i = \frac{1}{8\gamma} a_i^2 + \pi S_i + E_i^N a_i - a_i \delta S_i, \quad (3.5)$$

где для краткости введем обозначение:

$$E_i^N = \sum_{j \in K_i} \left(\bar{e}_j \frac{1}{2m_j} \right) + \frac{1}{2} \bar{e}_i - \frac{1}{2\gamma} \sum_{j \in K_i} \left(a_j \frac{1}{2m_j} \right) - \frac{1}{4\gamma} a_i.$$

Равновесные по Нэшу стратегии перепишем в виде

$$e_i^N = \bar{e}_i - \frac{1}{2\gamma} a_i. \quad (3.6)$$

Вычислим из уравнения (3.3) коэффициенты a_i и b_i :

$$a_i = \frac{\pi}{\rho + \delta} = a,$$

$$b_i = \frac{\pi^2}{8\rho\gamma(\rho + \delta)^2} + \frac{\pi}{\rho(\rho + \delta)} E_i^N,$$

где

$$E_i^N = \sum_{j \in K_i} \left(\bar{e}_j \frac{1}{2m_j} \right) + \frac{1}{2} \bar{e}_i - \frac{\pi}{4\gamma(\rho + \delta)} \sum_{j \in K_i} \left(\frac{1}{m_j} \right) - \frac{\pi}{4\gamma(\rho + \delta)}.$$

Подставив найденное значение коэффициента a_i в уравнение (3.5), получим равновесные по Нэшу стратегии

$$e_i^N = \bar{e}_i - \frac{\pi}{2\gamma(\rho + \delta)}. \quad (3.7)$$

Издержки i -го игрока в равновесии по Нэшу равны

$$F_i(S_i^N) = \frac{\pi}{\rho(\rho + \delta)} \left(\frac{\pi}{8\gamma(\rho + \delta)} + E_i^N + \rho S_i^N \right), \quad (3.8)$$

где S_i^N – траектория игрока i в ситуации равновесия по Нэшу.

Найдем траектории S_i^N игроков i , $i = 1, \dots, n$. Для этого необходимо подставить равновесные по Нэшу стратегии e_i^N (3.5) в уравнение динамики (2.1) с начальным состоянием $S_i(t_0) = S_i^0$. Решив полученное дифференциальное уравнение, найдем вид траекторий в равновесии по Нэшу

$$S_i^N = e^{-\delta(t-t_0)} S_i^0 + \frac{1}{\delta} E_i^N (1 - e^{-\delta(t-t_0)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

4. Кооперативное решение

Минимизируем суммарные издержки максимальной коалиции $I = \{1, \dots, n\}$:

$$\min_{e_1, e_2, \dots, e_n} \sum_{i \in I} K_i(S_i^0, t_0) = \sum_{i \in I} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} (C_i(e_i(t)) + \pi S_i(t)) dt, \quad (4.1)$$

при условии, что

$$\begin{aligned} \dot{S}_i(t) &= \sum_{j \in K_i} \left(e_j \frac{1}{2m_j} \right) + \frac{e_i}{2} - \delta S_i(t), \\ S_i(t_0) &= S_i^0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Перепишем условие (4.1) в виде

$$\min_{e_1, e_2, \dots, e_n} \sum_{i \in I} K_i(S_i^0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \left(\sum_{i \in I} (C_i(e_i(t))) + \pi \sum_{i \in I} S_i(t) \right) dt. \quad (4.2)$$

Введем обозначение

$$\bar{S} = \sum_{i \in I} S_i.$$

Из (4.2) видно, что минимизируемый функционал зависит только от \bar{S} и не зависит от S_i , $i = 1, \dots, n$. Поэтому и минимальные издержки коалиции I зависят от \bar{S} и не зависят от S_1, \dots, S_n , то есть функцию Беллмана можно искать, как функцию, зависящую лишь от $\sum_{i \in I} S_i = \bar{S}$.

Покажем это. Решение задачи (4.1) эквивалентно решению следующей системы уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{aligned} \rho F(I, S_1, \dots, S_n) &= \min_{e_1, e_2, \dots, e_n} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\gamma}{2} (e_i - \bar{e}_i)^2 + \pi S_i \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(I, \bar{S})}{\partial S_i} (E_i - \delta S_i) \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $F(I, S_1, \dots, S_n)$ – функция Беллмана.

Пусть M_i – это множество игроков, на которых влияет игрок i , т. е. множество игроков, имеющих связь с игроком i . Тогда $|M_i| = m_i$.

Продифференцируем правую часть уравнения (4.3) по e_i и приравняем полученное выражение к нулю:

$$e_i^I = \bar{e}_i - \frac{1}{2\gamma} \left(\sum_{j \in M_i} \frac{1}{m_i} \frac{\partial F(I, S_1, \dots, S_n)}{\partial S_j} + \frac{\partial F(I, S_1, \dots, S_n)}{\partial S_i} \right).$$

Функцию Беллмана $F(I, S_1, \dots, S_n)$ будем искать в виде

$$F(I, S_1, \dots, S_n) = a \sum_{i=1}^n S_i + b = a\bar{S} + b, \quad (4.4)$$

то есть в виде функции, зависящей только от $\sum_{i \in I} S_i$. Тогда она записывается в виде $F(I, \bar{S})$. Полученные стратегии e_i^I и функцию Беллмана (4.4) подставим в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{aligned} \rho a \sum_{i=1}^n S_i + \rho b &= \sum_{i=1}^n \frac{a^2}{2\gamma} + \pi \sum_{i=1}^n S_i + \\ &+ a \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in K_i} (e_j^I \frac{1}{2m_j}) + \frac{1}{2} e_i^I \right) - a\delta \sum_{i=1}^n S_i. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Решая уравнение (4.5), получаем коэффициенты a и b функции Беллмана:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi}{\rho + \delta}, \\ b &= \frac{\pi}{\rho(\rho + \delta)} \left(\sum_{i=1}^n \bar{e}_i - \frac{n\pi}{2\gamma(\rho + \delta)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальные стратегии максимальной коалиции имеют вид

$$e_i^I = \bar{e}_i - \frac{\pi}{\gamma(\rho + \delta)}. \quad (4.6)$$

Минимальные издержки максимальной коалиции I равны

$$F(I, \bar{S}) = \frac{\pi}{\rho(\rho + \delta)} \left(\sum_{i=1}^n \bar{e}_i - \frac{n\pi}{2\gamma(\rho + \delta)} + \rho \sum_{i=1}^n S_i^I \right), \quad (4.7)$$

где S_i^I – оптимальная кооперативная траектория игрока i .

Найдем вид оптимальных кооперативных траекторий игроков $i \in I$. Для этого необходимо подставить оптимальные стратегии максимальной коалиции e_i^I (4.6) в уравнение динамики (2.1) с начальным состоянием $S_i(t_0) = S_i^0$. Решив соответствующее дифференциальное уравнение, получим:

$$S_i^I = e^{-\delta(t-t_0)} S_i^0 + \frac{1}{\delta} E_i^I (1 - e^{-\delta(t-t_0)}), \quad i = 1, \dots, n,$$

где через E_i^I для краткости обозначим

$$E_i^I = \sum_{j \in K_i} (\bar{e}_j \frac{1}{2m_j}) + \frac{1}{2} \bar{e}_i - \frac{\pi}{\gamma(\rho + \delta)} \left(\sum_{j \in K_i} \frac{1}{2m_j} + \frac{1}{2} \right).$$

5. Пропорциональное решение

Определение 5.1. Вектор $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ называется пропорциональным решением, если

$$\xi_i(t) = F_i(S_i^N) + \frac{F(I, \bar{S}) - \sum_{i \in I} F_i(S_i^N)}{n}, \quad i \in I, \quad (5.1)$$

где $F_i(S_i^N)$ – выигрыш игрока i в равновесии по Нэшу, $F(I, \bar{S})$ – кооперативный выигрыш.

Вычислим пропорциональное решение для сетевой игры сокращения вредных выбросов в атмосферу. Для этого необходимо подставить в уравнение (5.1) издержки игрока i в равновесии по Нэшу $F_i(S_i^N)$ (3.7) и кооперативные издержки $F(I, \bar{S})$ (4.7):

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} F_i(S_i^N) &= \frac{\pi}{\rho(\rho + \delta)} \left(\sum_{i \in I} \bar{e}_i - \frac{3n\pi}{8\gamma(\rho + \delta)} + \rho \sum_{i \in I} S_i^N \right). \\ & \frac{F(I, \bar{S}) - \sum_{i \in I} F_i(S_i^N)}{n} = \\ &= -\frac{\pi}{\rho(\rho + \delta)} \left(\frac{\pi}{8\gamma(\rho + \delta)} + \rho \frac{\pi}{2\gamma\delta(\rho + \delta)} (1 - e^{-\delta(t-t_0)}) \right). \end{aligned}$$

Можно вычислить компоненту пропорционального решения для игрока $i, i \in I$:

$$\begin{aligned} \xi_i(t) = & \frac{\pi}{\rho(\rho + \delta)} \left(E_i^N + \rho \left(e^{-\delta(t-t_0)} S_i^0 + \frac{1}{\delta} \left(\sum_{j \in K_i} (\bar{e}_j \frac{1}{2m_j}) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \bar{e}_i - \frac{\pi}{4\gamma(\rho + \delta)} \sum_{j \in K_i} \frac{1}{m_j} - \frac{3\pi}{4\gamma(\rho + \delta)} \right) (1 - e^{-\delta(t-t_0)}) \right) \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Таким образом, получено пропорциональное решение $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ в сетевой игре сокращения вредных выбросов в атмосферу.

6. Динамическая устойчивость

Для того, чтобы выбранное решение оставалось оптимальным в любой подыгре вдоль оптимальной кооперативной траектории, необходимо, чтобы выполнялось условие динамической устойчивости (временной состоятельности) решения, которое было введено Л.А. Петросяном [8]. В этом случае игрокам не выгодно отклоняться от первоначально выбранного дележа, и они до конца игры будут придерживаться выбранных стратегий.

Определение 6.1. Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ называется процедурой распределения дележа, если при любом начальном состоянии на некооперативной траектории $(S_i^N(t), t)$, при любом $t \in [t_0, \infty)$ выполняется следующее условие:

$$\xi_i(S_i^0, t_0) = \int_{t_0}^t e^{-\rho(\tau-t_0)} \beta_i(\tau) d\tau + e^{-\rho(t-t_0)} \xi_i(S_i^N(t), t), \quad i \in I.$$

Теорема 6.1. Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$, где $\beta(t)$ задается формулой

$$\beta_i(t) = \rho \xi_i(S_i^N(t), t) - \frac{d}{dt} \xi_i(S_i^N(t), t) \quad (6.1)$$

является динамически-устойчивой процедурой распределения пропорционального решения $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$.

Выполнение условия (6.1) гарантирует оптимальность выбранного решения в любой подыгре вдоль оптимальной кооперативной траектории, то есть его динамическую устойчивость.

Явное выражение для $\beta_i(t)$ находится путем дифференцирования пропорционального решения $\xi_i(t)$, вычисляемого по формуле (5.2), которое в виду громоздкости в работе не приводится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К. *Динамические игры и их приложения в менеджменте*. СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента». 2009.
2. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник ЛГУ. 1977. № 19. С. 46–52.
3. Петросян Л.А. *Кооперативные игры на сетях* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 143–150.
4. Петросян Л.А., Козловская Н.В., Ильина А.В. *Коалиционное решение в задаче сокращения выбросов* // Вестник СПбГУ. 2010. сер. 10. №2. С. 46–60.
5. Dockner E. J., S. Jorgensen N. van Long and G. Sorger. *Differential Games in Economics and Management Science* // Cambridge University Press. 2000. P. 41–85.
6. Haurie A., Zaccour G. *Differential game models of global environment management* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 1995. P. 3–24.
7. Kaitala V., M. Pohjola. *Sustainable international agreements on green house warming: a game theory study* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 1995. P. 67–88.
8. Petrosyan L. *Differential Games of Pursuit*. World Scientific Pbl. 1993.
9. Petrosyan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27. P. 381–398.

10. Yeung D.W.K., Petrosyan L. A. *Cooperative Stochastic Differential Games*. 2006. P. 41–85.

NETWORK GAME OF EMISSION REDUCTION

Anna V. Belitskaia, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, PhD student (aanytka@yandex.ru),

Leon A. Petrosyan, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Dr. Sc., prof. (spbuoasis7@peterlink.ru).

Abstract: In this paper a n -person network game theoretical model of emission reduction is considered. Each player has its own evolution of the stock of accumulated pollution. Dynamic of player i , $i = 1, \dots, n$ depends on emissions of players $k \in K_i$, where K_i is the set of players which are connected by arcs with player i . Nash equilibrium is constructed. The cooperative game is considered. As optimal imputation the proportional solution is proposed.

Keywords: network game, Nash equilibrium, proportional solution, imputation distribution procedure.