Равенство треугольников по стороне и биссектрисам двух прилежащих углов

В. Оксман

В заметке доказан признак равенства треугольников по стороне и биссектрисам двух прилежащих углов, из которого, в частности, следует теорема Штейнера-Лемуса.

Теорема. Если сторона и биссектрисы двух прилежащих к ней углов одного треугольника соответственно равны стороне и биссектрисам двух прилежащих углов другого треугольника, то эти треугольники равны.

Доказательство.

Обозначим в ΔABC: $BC = a$, $AC = x$, $AB = y$, биссектрису угла B через l_1, биссектрису угла C через l_2. Тогда из известных формул получим:

$$l_1^2 = ay\left[1 - (\frac{x}{a+y})^2\right], \qquad l_2^2 = ax\left[1 - (\frac{y}{a+x})^2\right], \quad \text{откуда}$$

$$x^2 = (a+y)^2\left[1 - \frac{l_1^2}{ay}\right], \qquad y^2 = (a+x)^2\left[1 - \frac{l_2^2}{ax}\right].$$

Обозначим $l_1^2/a = t_1$, $l_2^2/a = t_2$. Заметим, что $t_1 < y$, $t_2 < x$.

Тогда $y = (a+x)\sqrt{1 - \frac{t_2}{x}}$ (*), $x = (a+y)\sqrt{1 - \frac{t_1}{y}}$ (**).

Исследуем функцию $y(x) = (a+x)\sqrt{1 - \frac{t}{x}}$, $0 < t < x$.

Очевидно, что данная функция непрерывна при $t < x < \infty$.

Прямая $y = x + a - t/2$ является ее наклонной асимптотой.

$$y' = \sqrt{1 - \frac{t}{x}} + (a+x)\frac{\frac{t}{x^2}}{2\sqrt{1 - \frac{t}{x}}} > 0, \text{ поэтому } y \text{ возрастает на } (t, \infty).$$

Докажем, что y выпукла вверх. Для этого достаточно проверить, что $y'' < 0$.

$$y' = \frac{2(1 - \frac{t}{x}) + \frac{at}{x^2} + \frac{t}{x}}{2\sqrt{1 - \frac{t}{x}}} = \frac{2 - \frac{t}{x} + \frac{at}{x^2}}{2\sqrt{1 - \frac{t}{x}}},$$

$$y'' = \frac{2\sqrt{1-\frac{t}{x}}\left(\frac{t}{x^2}-\frac{2at}{x^3}\right)-\left(2-\frac{t}{x}+\frac{at}{x^2}\right)\frac{t}{x^2\sqrt{1-\frac{t}{x}}}}{4(1-\frac{t}{x})} =$$

$$\frac{2(1-\frac{t}{x})(\frac{t}{x^2}-\frac{2at}{x^3})-(2-\frac{t}{x}+\frac{at}{x^2})\frac{t}{x^2}}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}} =$$

$$= \frac{\frac{t}{x^2}[2(1-\frac{t}{x})(1-\frac{2a}{x})-2+\frac{t}{x}-\frac{at}{x^2}]}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}} = \frac{\frac{t}{x^2}(2-\frac{2t}{x}-\frac{4a}{x}+\frac{4at}{x^2}-2+\frac{t}{x}-\frac{at}{x^2})}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}} =$$

$$= \frac{t}{x^2}\frac{\frac{3at}{x^2}-\frac{t+4a}{x}}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}} = \frac{t}{x^4}\cdot\frac{3at-x(t+4a)}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}}$$

Очевидно,что знак полученного выражения совпадает со знаком выражения $3at - x(t+4a)$.

$$x(t+4a) > t(t+4a) = t^2+4at > 3at, \text{ поэтому } \quad 3at - x(t+4a) < 0.$$

Таким образом, $y'' < 0$.

На рис. 1 изображен примерный график функции $y(x)$.

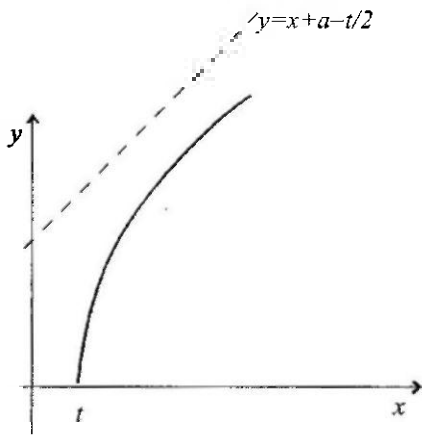

Рис.1

Лемма. Если функция $f(x)$ определена, непрерывна, выпукла на интервале (t,∞) и имеет наклонную асимптоту $y = \kappa x + m$,то любая прямая $y = \kappa x + n$ $(n \in R)$ не может пересекать график $f(x)$ более чем в одной точке.

Доказательство. Предположим для определенности, что $f(x)$ выпукла вверх (такое предположение не меняет общности рассуждений). Нетрудно доказать,что в этом случае $f(x) < \kappa x + m$ для любого $x \in (t,\infty)$.

Пусть прямая $y = \kappa x + n$ (параллельная асимптоте) пересекает график $f(x)$ в точках $N_1(x_1, y_1)$ и $N_2(x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$ (рис. 2).

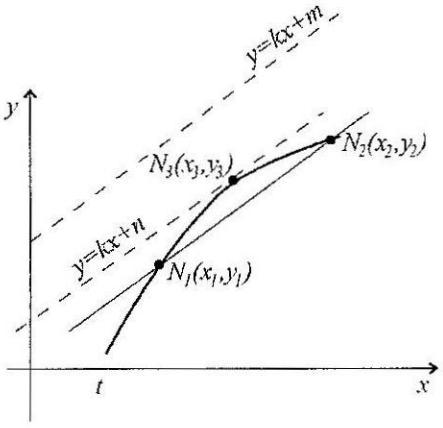

Рис. 2

Согласно теореме Лагранжа о среднем значении существует такая точка $N_3(x_3, y_3)$ на дуге N_1 N_2 графика, в которой касательная к нему параллельна прямой, проходящей через точки N_1, N_2, т.е. параллельна асимптоте $y = \kappa x + m$. Пусть уравнение этой касательной имеет вид $y = kx + p$. В точке N_3 $f(x_3) = y_3 = kx_3 + p < kx_3 + m$. Поэтому $p < m$. Так как $f(x)$ выпукла вверх, то во всех точках x интервала (t, ∞), отличных от x_3, имеем $f(x) < kx + p$. Отсюда $kx + m - f(x) > kx + m - (kx + p)$, т.е. $kx + m - f(x) > m - p$ для всех $x \in (t, \infty)$, что противоречит тому, что прямая $y = kx + m$ является наклонной асимптотой функции $f(x)$.

Вернемся к доказательству основной теоремы. Рассмотрим два уравнения:

$y = (a + x)\sqrt{1 - \frac{t}{x}}$ (1) и $x = (a + y)\sqrt{1 - \frac{t}{y}}$ (2). Очевидно, что если точка (u, w) принадлежит кривой, определенной уравнением (1), то точка (w, u) принадлежит кривой, определенной уравнением (2), и наоборот. Поэтому эти уравнения определяют взаимно обратные функции. Поскольку функция y, заданная уравнением (1), определена на интервале (t, ∞), непрерывна, выпукла вверх на нем, имеет наклонную асимтоту $y = x + a - t/2$ и область значений $(0, \infty)$, то обратная ей функция определена на интервале $(0, \infty)$, непрерывна на нем, выпукла вниз и имеет наклонную асимтоту $y = x - a + t/2$ (ее график симметричен графику функции (1) относительно прямой $y = x$, рис.3). График функции (1) при любом допустимом значении параметра t не может иметь более одной общей точки с прямой $y = x + n$, $n \in R$ (Лемма). Аналогично, график любой функции, определенной уравнением (2), при любом допустимом значении параметра t также не может иметь более одной общей точки с прямой $y = x + n$, $n \in R$.

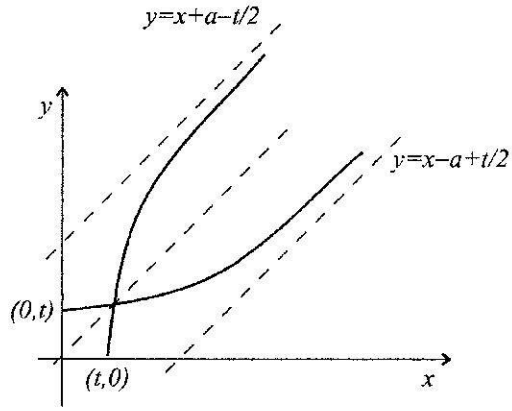

Рис.3

Докажем, что графики (*) и (**) не могут пересекаться более, чем в одной точке. Предположим, что у них существуют две общие точки $(u_1,\ w_1)$ и $(u_2,\ w_2)$, $u_1 < u_2$. Проведем через точку $(u_1,\ w_1)$ прямую $y = x + n$. Заметим, что при этом должно выполняться: $-a + t_1/2 < n < a - t_2/2$.

Кривая (*), помимо $(u_1,\ w_1)$, не имеет с прямой $y = x + n$ других общих точек. Поэтому либо для всех точек (x, y) кривой (*) при $x > u_1$ выполняется неравенство $y > x + n$, либо неравенство $y < x + n$.

Второе неравенство невозможно, т.к. противоречит тому, что $y = x+a-t_2/2$ — асимптота функции (*). Поэтому для функции (*) при $x > u_1$ имеем $y > x+n$. Аналогично, для кривой (**) при $x > u_1$ имеем $y < x+n$, Поэтому при $x > u_1$ у кривых (*) и (**) нет общих точек, что противоречит предположению о существовании точки $(u_2,\ w_2)$ (рис.4).

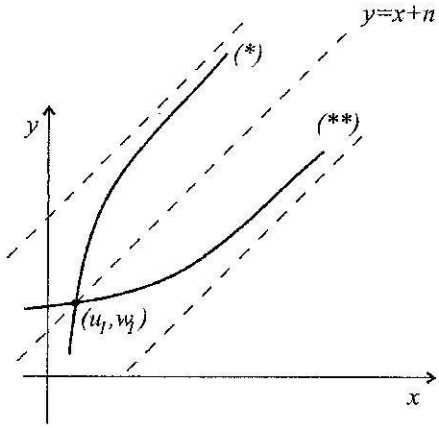

Рис.4

Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} x = (a+y)\sqrt{1-\frac{t_1}{y}} \\ y = (a+x)\sqrt{1-\frac{t_2}{x}} \end{cases}$$

не может иметь более одного решения. Это означает, что одна сторона треугольника и биссектрисы двух прилежащих к ней углов однозначно определяют две другие его стороны, т.е. однозначно определяют треугольник, что и доказывает основную теорему.

В заключение заметим, что из доказанной теоремы в качестве элементарного следствия получаем, что треугольник, у которого биссектрисы двух углов равны, является равнобедренным (теорема Штейнера-Лемуса). Предоставляем читателю самостоятельно проверить это.

Виктор Оксман
Колледж Западной Галилеи (Израиль)
E-mail: voxman@research.haifa.ac.il