V. N. Remeslennikov, Finite approximability of metabelian groups, *Algebra Logika*, 1968, Volume 7, Number 4, 106–113

Алгебра и логика, 7, № 4 (1968), 106–113.

УДК 519.45

ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В.Н.РЕМЕСЛЕННИКОВ

Нетрудно показать, что произвольная метабелева группа представима матрицами над коммутативным кольцом (предложение 3.1 настоящей статьи). Этот факт натолкнул на мысль получить теорему Ф.Холла [3] о финитной аппроксимируемости конечнопорожденных метабелевых групп как следствие аппроксимационной теоремы для конечнопорожденной группы, изоморфно представимой матрицами над коммутативным кольцом (теоремы 1.3 и 3.2).

В предложении 3.1 содержится и такое утверждение: метабелева группа без кручения изоморфно представима матрицами над коммутативным кольцом нулевой характеристики. Более детальная, чем теорема 1.3, аппроксимационная теорема 2.3. для групп, представимых матрицами над кольцами нулевой характеристики, позволяет вывести следующую

ТЕОРЕМУ 3.3. *Если G – конечнопорожденная метабелева группа без кручения, то почти для всех простых чисел p в G существует инвариантная подгруппа* (выбор которой зависит от числа p), *аппроксимируемая конечными p-группами.*

Необходимые подготовительные леммы об аппроксимируемости коммутативных колец собраны в §§ 1 и 2. Используемые факты о таких кольцах могут быть найдены в [1] и [4]. Всюду в статье под словом кольцо понимается ассоциативное кольцо с единицей, что в дальнейшем не оговаривается. Нетрудно, однако, заметить, что леммы 1.2 и 2.1 справедливы и для колец без единицы.

§ 1. Подпрямо неразложимые конечнопорожденные коммутативные кольца

Кольцо подпрямо неразложимо, если пересечение всех его идеалов, за исключением нулевого идеала, отлично от нулевого идеала. В случае подпрямо неразложимого кольца это ненулевое пересечение назовем монолитом. Понятно, что монолит является минимальным идеалом в кольце, обратное,вообще говоря, неверно. Основным подготовительным материалом этого параграфа будет служить следующая

ЛЕММА 1.1. Конечнопорожденное коммутативное подпрямо неразложимое кольцо является конечным кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K - кольцо, удовлетворяющее условиям леммы. Если, кроме того, K - полупростое (т.е. радикал Джекобсона равен нулевому идеалу) кольцо, то K - поле. Из полей только конечные поля конечнопорождены в сигнатуре кольца. Так как последние удовлетворяют условиям леммы, то в полупростом случае конечные поля и только они являются подпрямо неразложимыми кольцами.

Если радикал Джекобсона кольца K не равен нулю, то в силу конечной порожденности кольца K этот идеал является нильпотетным идеалом, а монолит M кольца K является идеалом с нулевым умножением.

Пусть $K \cong F/L$, где F - кольцо многочленов с целыми коэффициентами от конечного числа неизвестных. Так как F -нетерово кольцо, то по теореме Ласкера-Нетер идеал L является пересечением примитивных идеалов. Но кольцо K подпрямо неразложимо, а потому идеал L сам является примарным идеалом. Другими словами, все делители нуля в K являются нильпотентными элементами, а потому все они содержатся в радикале Джекобсона кольца K.

Рассмотрим пару: кольцо K и монолит M. На M можно смотреть как на неприводимый модуль над кольцом K. По лемме Шура любой оператор $k \in K$ индуцирует на M либо нулевой эндоморфизм, либо автоморфизм. Если J - аннулятор модуля M в кольце K, то фактор-кольцо K/J является примитивным кольцом и идеал J совпадает с радикалом Джекобсона кольца K. Но примитивное коммутативное кольцо является полем, и так как кольцо K конечнопорождено, то K/J - конечное поле. J - нильпотентный идеал и конечнопорожден как кольцо. Поэтому J – конечное кольцо, а, следовательно, таким же является и кольцо K

Лемма доказана.

Так как любое кольцо аппроксимируется подпрямо неразложимыми кольцами, то справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Конечнопорожденное коммутативное кольцо аппроксимируется конечными кольцами.

Пусть $GL(n,K)$ – полная группа невырожденных матриц над кольцом K и кольцо K аппроксимируется конечными кольцами с помощью семейства идеалов $J_\alpha, \alpha \in \Lambda$. Непосредственная проверка показывает, что в этом случае группа $GL(n,K)$ аппроксимируется конечными группами $GL(n, K/J_\alpha), \alpha \in \Lambda$, с помощью семейства гомоморфизмов $\varphi_\alpha : GL(n,K) \to GL(n, K/J_\alpha)$, индуцированных естественными гомоморфизмами $K \to K/J_\alpha, \alpha \in \Lambda$. Поэтому имеет место

ТЕОРЕМА 1.3. Если G – конечнопорожденная группа, изоморфно представимая матрицами над коммутативным кольцом, то G аппроксимируется конечными группами.

§ 2. Аппроксимируемость коммутативных колец нулевой характеристики

ЛЕММА 2.1. Пусть K – конечнопорожденное коммутативное кольцо нулевой характеристики. Тогда для почти всех (т.е. за исключением, быть может, конечного числа) простых чисел p, кольцо K аппроксимируется конечными кольцами, характеристика которых равна степени числа p

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть доказательства будет состоять в редукции к случаю колец без делителей нуля, а вторая – в анализе последнего случая.

Пусть $K \cong F/J$, где F – кольцо многочленов с целыми коэффициентами от конечного числа неизвестных. По теореме Ласкера-Нетер идеал J есть конечное пересечение примарных идеалов $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Пусть множества $J_1^*, J_2^*, \dots, J_n^*$ будут аддитивными изоляторами идеалов $J_1, J_2, \dots, J_n$. Множества $J_1^*, J_2^*, \dots, J_n^*$ так же, как и соответствующие множества без звездочек, являются примарными идеалами. Для доказательства примарности идеала J_α^* достаточно проверить, что любой делитель нуля в фактор-кольце F/J_α^* есть нильпотентный элемент. Что это так, видно из следующей цепочки следований:

$$\bar a\, \bar b = \bar 0 \text{ в } F/J_\alpha^* \;\&\; \bar a \neq \bar 0 \;\&\; \bar b \neq \bar 0 \Longrightarrow ab = c \text{ в } F/J_\alpha \;\&\; \exists n\,(nc = 0)$$
$$\Longrightarrow na \cdot b = nc = 0 \;\&\; na \neq 0 \;\&\; b \neq 0 \Longrightarrow \exists m\,(b^m = 0) \Longrightarrow \bar b^m = \bar 0.$$

Кроме того, $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} J_\alpha^* = J$. Для доказательства равенства достаточно проверить включение $J \supset \bigcap J_\alpha^*$. Проследим, что это так, не забывая о нулевой характеристике кольца K.

$$a \in \bigcap_{\alpha=1}^{n} J_\alpha^* \Longrightarrow \forall \alpha\,(a \in J_\alpha^*) \Longrightarrow \exists n \forall \alpha\,(na \in J_\alpha) \Longrightarrow na \in J$$
$$\Longrightarrow a \in J.$$

Так как $K \subset F/J_1^* \times F/J_2^* \times \dots \times F/J_n^*$ и фактор-кольца F/J_α^*, $\alpha = 1, \dots, n$, нулевой характеристики, то, не стесняя общности рассуждений, можно предполагать, что $F/J \cong K$ и J – примарный идеал в F. В этом случае, как уже отмечалось, все делители нуля содержатся в радикале $R(K)$ кольца K.

Цепочка следований $\exists n \; n\bar a = \bar 0$ в $K/R(K) \Longrightarrow na \in R(K)$

$$\Longrightarrow \exists m \quad n^m a^m = 0 \Longrightarrow a^m = 0 \Longrightarrow a \in R(K) \Longrightarrow \bar a = \bar 0$$

показывает, что кольцо $K/R(K)$ нулевой характеристики, а другая

$$\bar a \bar b = \bar 0 \;\&\; \bar a \neq 0 \;\&\; \bar b \neq 0 \text{ в } K/R(K) \Longrightarrow ab = c \text{ в } K \;\&\; c \in R(K) \Longrightarrow \exists m\, a^m b^m = c^m = 0$$
$$\&\; a \neq 0 \;\&\; b \neq 0 \Longrightarrow \exists n\,(a^m)^n = 0 \Longrightarrow a \in R(K) \Longrightarrow \bar a = \bar 0 \text{ , что } K/R(K)$$

без делителей нуля. Покажем, что незапретное простое число p для кольца $K/R(K)$ годится и для K. Другими словами, надо показать, что если в аддитивной группе $R(K)$ есть элемент $\tau \neq 0$, делящийся на любую степень числа p (p – полный), то найдется ненулевой p-полный элемент в $K/R(K)$. Можно считать, что $\tau \cdot s$ для любого $s \in R(K)$. В силу нетеровости кольца K возрастающая цепочка идеалов

$$\mathrm{ug}_K\{\tau\} \subseteq \mathrm{ug}_K\left\{\frac{\tau}{p}\right\} \subseteq \dots \subseteq \mathrm{ug}_K\left\{\frac{\tau}{p^m}\right\} \subseteq \dots$$

стабилизируется на некотором номере n. Таким образом, для некоторого элемента a, лежащего вне $R(K)$,

$$\frac{\tau}{p^n} \cdot a = \frac{\tau}{p^{n+1}}.$$

Отсюда $\qquad \tau a = \dfrac{\tau}{p}, \quad \tau a^2 = \dfrac{\tau}{p^2}, \dots, \tau a^n = \dfrac{\tau}{p^n}, \dots ,$

и далее $\tau(a-pa^2)=0,\ldots,\tau(a-p^{n-1}a^n)=0,\ldots$. Вспоминая, что все делители нуля в K собраны в идеале $R(K)$, легко получаем, что элемент a является p -полным по модулю идеала $R(K)$.

Пусть теперь K - кольцо без делителей нуля и $\ddot{K}$ - поле частных для K . Обозначим буквой L чисто трансцендентное расширение поля рациональных чисел, над которым $\ddot{K}$ является алгебраическим расширением. Тогда для подходящего натурального числа n и конечнопорожденного кольца K^* из L кольцо K вкладывается в полное матричное кольцо $M_n(K^*)$. Легко видеть, что если простое число p не будет запретным для K^* , то оно не будет запретным и для $M_n(K^*)$, а следовательно, и для K .

Наконец, предположим, что K - конечнопорожденное кольцо из поля L и покажем, что почти для всех простых p оно аппроксимируется кольцами характеристики равной степени p . Пусть рациональные дроби $\frac{f_i}{g_i}$, $i=1,\ldots,n$, порождают кольцо K . Коэффициенты многочленов f_i, g_i можно считать целыми числами. Пусть Π - множество простых чисел, делящих свободные члены знаменателей g_i . Если $p\bar{\in}\Pi$, то K аппроксимируется кольцами характеристики равной степени p .Для окончания доказательства леммы следует применить следствие 1.2.

С помощью предыдущей леммы нетрудно доказывается следующая

ЛЕММА 2.2. В конечнопорожденном коммутативном кольце K нулевой характеристики для почти всех простых чисел p существует идеал $\mathcal{J}$ со следующими свойствами:

1. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{J}^n=0$, где $\mathcal{J}^n$ - n -я степень идеала $\mathcal{J}$;

2. Фактор-кольцо $K/\mathcal{J}^n$ -конечное кольцо, и его характеристика есть степень p .

Используя первую редукцию в доказательстве леммы 1.1., заметим, что доказательство леммы достаточно провести только для тех колец, которые получаются факторизацией кольца многочленов по примарному идеалу. По предыдущей лемме почти для всех простых чисел p в K существует идеал, фактор-кольцо по которому является конечным полем характеристики p . Этот идеал и будет искомым. В самом деле, все делители нуля кольца K будут содержаться в идеале $\mathcal{J}$, а потому во множестве $1-\mathcal{J}=\{1-a|a\in\mathcal{J}\}$нет ни одного делителя нуля. Отсюда по критерию Крулля [1] пересечение степеней идеала J будет нулевым идеалом. Для доказательства 2-го свойства заметим, что $p\cdot 1 \in J$. Отсюда $p^n 1 \in J^n$, а потому характеристика фактор-кольца K/J^n делит p^n. Конечность K/J^n теперь следует из конечной порожденности идеала J как кольца.

Лемма доказана.

Следствием доказанной леммы служит следующая

ТЕОРЕМА 2.3.*) *Пусть G - конечнопорожденная группа, изоморфно представимая матрицами над коммутативным кольцом нулевой характеристики. Тогда почти для всех простых чисел p в G существует инвариантная подгруппа конечного индекса* (зависящая от выбранного простого числа p), *которая аппроксимируется конечными p-группами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предполагать, что K - конечнопорожденное кольцо, и теорему доказывать для группы $G=GL(\tau,K)$. Выберем такое простое число p, для которого можно построить последовательность идеалов $J^1=J\supset J^2\supset J^3\supset\ldots$, удовлетворяющую условиям 1), 2) леммы 2.2. Далее, рассуждаем так же, как и при доказательстве леммы 2 [2]. Положим $G_n=\langle (q_{ij})\in G \mid q_{ii}-1\in J^n,\ q_{ij}\in J^n,\ i\neq j \rangle$. Множество G_n является ядром гомоморфизма $G\to GL(\tau, K/J^n)$, индуцированного естественным гомоморфизмом $K\to K/J^n$. Таким образом, для каждого n фактор-группа G_1/G_n конечна. Так как G_1 - инвариантная подгруппа конечного индекса в G и $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ равно единичной подгруппе, то остается заметить, что произвольный фактор G_n/G_{n+1}, $n=1,2,\ldots$, является p-группой. В самом деле, элемент $a\in G_n$ можно представить в виде:

$$a=e+(q_{ij}),\quad q_{ij}\in J^n.$$

Так как характеристика кольца J^n/J^{n+1} равна p, то, учитывая разложение $a^p=e+p(q_{ij})+\ldots+(q_{ij})^p$, получаем $a\in G_{n+1}$.

Теорема доказана.

---

*) В случае полей нулевой характеристики теорема известна; см. например, [2] и [5].

§ 3. Приложение к метабелевым группам.

Следующее предложение позволит результаты, полученные в предыдущих параграфах, применить к конечнопорожденным метабелевым группам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Произвольная метабелева группа изоморфно представима матрицами над коммутативным кольцом. Метабелева группа без кручения изоморфно представима матрицами над коммутативным кольцом нулевой характеристики.*

Известно, что произвольную метабелеву группу G можно вложить в полное сплетение $A \mathrm{Wr} B$ абелевых групп A и B. Если, кроме того, G без кручения, то и группу A можно тоже выбрать без кручения. Поэтому достаточно полные сплетения абелевых групп представить матрицами над кольцом.

Пусть $\bar{A}$ - базисная подгруппа в полном сплетении $A \mathrm{Wr} B$ и $\mathcal{E}nd(\bar{A})$- кольцо эндоморфизмов абелевой группы $\bar{A}$. Если L - множество пар $\langle (\bar{a},\varphi) | \bar{a}\in \bar{A},\ \varphi\in \mathcal{E}nd(\bar{A})\rangle$, то превратим множество L в кольцо следующим образом. Сложение пар оставим покомпонентным, а умножение зададим формулой:

$$(\bar{a}_1,\varphi_1)(\bar{a}_2,\varphi_2) = (\bar{a}_1\varphi_2+\bar{a}_2\varphi_1,\ \varphi_1\varphi_2).$$

Отметим, что если A - группа без кручения, то L имеет нулевую характеристику.

Подкольца пар вида $(\bar{a},0)$ и $(0,\varphi)$ изоморфны соответственно $\bar{A}$ с нулевым умножением и кольцу $\mathcal{E}nd(\bar{A})$. Обозначим через α вложение группы B в мультипликативную полугруппу кольца $\mathcal{E}nd(\bar{A})$, определяемое следующим образом:

$$b\alpha = \varphi_b, \text{ где } \varphi_b(\bar{a}) = b\bar{a}b^{-1}, \text{ для всех } \bar{a}\in\bar{A}.$$

Подкольцо, порожденное в L множествами $\langle (a,0) | a\in A\rangle$ и $\langle (0,b\alpha) | b\in B\rangle$, и будет искомым коммутативным кольцом. В самом деле, отображение β:

$$\beta(\bar{a},b) = \begin{pmatrix} (0,b\alpha) & (\bar{a},0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad (\bar{a},b)\in A \mathrm{Wr} B,$$

и дает требуемое вложение полного сплетения $A \mathrm{Wr} B$ в матричную группу над коммутативным кольцом.

Непосредственными следствиями доказанного предложения и теорем 1.3 и 2.3 служат следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3.2. (Ф.Холл [3]). Конечнопорожденная метабелева группа аппроксимируется конечными группами.

ТЕОРЕМА 3.3. Если G - конечнопорожденная метабелева группа без кручения, то почти для всех простых чисел p в G существует инвариантная подгруппа (выбор которой зависит от числа p), аппроксимируемая конечными p-группами.

Поступила в редакцию

25. IX. 1968 г.

Литература

1. О.ЗАРИССКИЙ, П.САМЮЭЛЬ, Коммутативная алгебра, ИЛ., Москва, 1963.
2. М.И.КАРГАПОЛОВ. О конечнопорожденных линейных группах, Алгебра и логика, 5, № 6 (1967), 17-20.
3. P.HALL. On the finiteness of certain soluble groups, London Math. Soc., 9, № 36 (1959), 595-622.
4. Н.ДЖЕКОБСОН, Строение колец, ИЛ., Москва, 1961.
5. Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ. Вербальные и маргинальные подгруппы линейных групп, ДАН СССР, 177, №5 (1967), 1008-1011.