Л. А. Аксентьев, А. М. Елизаров, М. И. Киндер, Обратные краевые задачи для многосвязных областей на римановых поверхностях рода нуль, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1984, выпуск 21, 19–32

https://www.mathnet.ru/kukz137

10. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности.— М.: Физматгиз, 1963,— 212 с.
11. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций.— М.: Наука, 1964,— 228 с.
12. Видякина Н. Н. О разрешимости одной обратной краевой задачи на римановой поверхности.— Тр. семин. по краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, 1974, вып. 11, с. 32—42.
13. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа.— М.: Наука, 1975,— 512 с.

Доложено на семинаре 25 января 1983 г.

УДК 517.54

Л. А. Аксентьев, А. М. Елизаров, М. И. Киндер

ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ РОДА НУЛЬ

Введение. Обратные краевые задачи (окз) на римановых поверхностях составляют развивающийся раздел теории окз [1, 2]. Характерная черта этих задач состоит в том, что искомая область D_z и заданная область D_w соответственно над плоскостями z и w расположены на конечнолистных конформно эквивалентных друг другу римановых поверхностях.

Впервые постановка окз на римановой поверхности дана в [3, 4] для случая односвязной конечной области D_z и отсутствия особенностей у искомой функции $w(z)$. Единственность решения этой задачи доказана при условии, что выбраны система точек ветвления и порядок смены листов в D_w. В работе [5] рассмотрен случай конечной многосвязной области D_z (без точек ветвления), в которой $w(z)$ имеет особенности с заданными главными частями.

Л. А. Аксентьевым [6—8] дано развитие общей постановки окз на римановой поверхности из [5]: задаются $n+1$ комплекснозначных дифференцируемых функций

$$w_k(\tau) = u_k(\tau) + iv_k(\tau),\ k = \overline{0, n}, \tag{1}$$

где $\tau = s$, $s \in [0, l_k]$ — дуговые абсциссы искомых контуров L_{zk} длин l_k, а $u'_k(s)$, $v'_k(s)$, $k = \overline{0, n}$, удовлетворяют условию Гельдера. Задается область D_w на конечнолистной римановой поверхности $\mathbf{R}_w$, причем проекция ∂D_w на плоскость w определяется уравнениями (1): $w|_{L_{zk}} = w_k(s)$. Требуется найти контур $L_z = \bigcup\limits_{k=0}^{n} L_{zk}$ на римановой поверхности $\mathbf{R}_z$ (конформно эквивалентной $\mathbf{R}_w$), ограничивающий D_z, и функцию $w(z): D_z \to D_w$ по краевому условию (1). Предполагается, что конформность отображения $w(z)$ нарушается в конечном числе точек, причем известны образы этих точек и поведение в них функции $z(w)$, обратной к $w(z)$. В [6—8] показано, что принципиальная схема решения поставленной задачи для областей любой конечной связности и поверхностей любого рода сходна схеме решения обычных окз на плоскости. Там же выписаны в общем виде решение задачи и условия разрешимости. Первая группа условий разрешимости выражает требования однозначности функции $z'(t)$ (t — точка фундаментального многоугольника, являющегося прообразом поверхности $\mathbf{R}_w$), а вторая группа связана с требованиями замкнутости контуров L_{zk}.

Несколько окз для односвязной области на римановой поверхности $\mathbf{R}_z$ рода нуль с допустимыми полюсами у функции $z(w)$ и нулями у $z'(w)$, являющихся частными случаями описанной выше общей задачи, исследованы в работе [9].

Пусть функция $z(w)$ имеет в точках b_j $(j=1, \ldots, p)$ области D_w полюсы порядков m_j, а $z'(w)$ обращается в 0 первого порядка в точках a_l $(l=1, \ldots, N)$ (некоторые из a_l могут совпадать). Будем в этом случае говорить, что $z(w)$ — из класса $[N;\ m_1, \ldots, m_p]$ (обозначение введено в работе [9]). Отметим, что случай $[N;\ m_1]=[0;\ 1]$ (внешняя окз) рассмотрен Ф. Д. Гаховым [10]. В [9] доказана разрешимость задачи для односвязной области в классах $[N;\ 1]$, $[N;\ 0]$ при любом N в предположении, что определяемый в (1) контур L_w — простой и кусочно-гладкий.

В настоящей работе для случая окз на римановых поверхностях рода нуль с допустимыми полюсами и нулями у $z'(w)$ дано уточнение общей постановки окз. Оно основывается на постановке внутренней окз в случае многосвязной области [1, с. 76], видоизменении такой постановки из работы [11] и связанной с ней работы [12] и внесении дополнительных ограничений геометрического характера на граничные контуры искомой области D_z. Исследуются разрешимость задачи для $z(w)$ из классов $[N;\ 0]$, $[N;\ 1]$, $[N;\ \underbrace{1, \ldots, 1}_{p}]$ и возможность удовлетворения условий разрешимости. Данная работа является продолжением и развитием нашей статьи [13].

§ 1. Постановка задачи. Необходимое условие разрешимости

Пусть $(n+1)$-связная конечнолистная область D_z с гладкой границей $\partial D_z = \bigcup\limits_{k=0}^{n} L_{zk}$ расположена на некоторой римановой поверхности R_z рода нуль и может содержать точки ветвления $\mathbf{R}_z$, порядки которых известны. Область D_z может быть как ограниченной, так и неограниченной. Для того, чтобы уменьшить произвол в выборе области D_z, зададим еще одну геометрическую характеристику этой области: набор целых чисел $n_{z0}, n_{z1}, \ldots, n_{zn}$, которые будут граничными индексами кривых $L_{z0}, L_{z1}, \ldots, L_{zn}$ соответственно. Класс таких областей обозначим через $\{n_{z0}, n_{z1}, \ldots, n_{zn}\}$.

Пусть, далее, над плоскостью w задана конечнолистная риманова поверхность $\mathbf{R}_w$ рода нуль, на которой размещена $(n+1)$-связная область D_w. Проекция границы ∂D_w на плоскость задается уравнениями (1), где $\tau \in [0, 1]$, а $u_k(\tau)$, $v_k(\tau)$ — непрерывно-дифференцируемые функции. Будем дополнительно предполагать, что область D_w не содержит внутри себя точек ветвления $\mathbf{R}_w$ и ограничена. К этому случаю всегда можно прийти, совершая униформизацию и дополнительное конформное преобразование. Отметим, что задание только проекции ∂D_w в виде (1) не позволяет однозначно определить риманову поверхность $\mathbf{R}_w$ и область D_w на ней ([7], с. 7).

Как и в [11, 12], излагаемая ниже постановка окз для многосвязных областей на римановых поверхностях рода нуль позволяет снять часть условий разрешимости первой группы.

Итак, по функциям $w_k(\tau)$, $k=\overline{0, n}$, из (1) (где $\tau = s/l_k$, $\tau \in [0, 1]$, $l_0 = 1$, остальные l_k неизвестны), описывающим проекцию на плоскость w границы заданной $(n+1)$-связной ограниченной области D_w без точек ветвления, расположенной на конечнолистной римановой поверхности $\mathbf{R}_w$ рода нуль, требуется найти функцию $w(z)$ и $(n+1)$-связную область ее определения D_z в заданном классе $\{n_{z0}, n_{z1}, \ldots, n_{zn}\}$ с p бесконечно удаленными точками и точками ветвления $(\neq \infty)$ суммарного порядка N. При этом известно, что искомая функция $w(z)$ осуществляет конформное отображение D_z на D_w всюду, за исключением конечного числа точек ветвления (образы $a_1, \ldots, a_N$ которых в D_w заданы), непрерывна вплоть до границы ∂D_z, обратная функция $z(w)$ принадлежит классу $[N; m_1, \ldots, m_p]$, где $\sum_{j=1}^{p} m_j = P$, а граничные значения $w(z)$ представлены функциями $w_k(\tau)$, $k=\overline{0, n}$.

Замечание 1. Задачу об определении конечной области D_z будем называть внутренней, задачу об определении области, содержащей бесконечно удаленные точки,— внешней. Это значит, что внутренней задаче соответствует $p=0$, внешняя задача соответствует случаю $p \neq \infty$.

Таким образом, функция $z'(w)$ однозначна в D_w, обращается в нуль первого порядка в заданных точках $a_1, \ldots, a_N$ (напомним, что некоторые из них могут совпадать) и имеет полюсы порядков $m_j + 1$ в неизвестных точках $b_1, \ldots, b_p$.

Отметим, что для нахождения значений $b_1, \ldots, b_p$ мы, как и в [7], будем использовать условия разрешимости первой группы. Получающиеся при этом уравнения (их число равно числу неизвестных параметров) являются обобщением уравнения Ф. Д. Гахова для определения простого полюса во внешней окз для плоской области [10] на случай окз на римановых поверхностях. Вывод и исследование разрешимости аналога уравнения Ф. Д. Гахова для внешней окз в плоской многосвязной области приведены в работе [12].

Остановимся на необходимом условии разрешимости задачи. Оно имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n} n_{zk} = \sum_{k=0}^{n} n_{wk} + N - (P + p), \tag{2}$$

где n_{wk} — граничные индексы кривых L_{wk}, и возникает из соотношения для индексов граничных кривых, выведенного в [6—8].

Действительно, функция $z'(w)$ имеет p полюсов порядков $m_j + 1$ в точках b_j и N нулей первого порядка. Как следует из [8], для граничных индексов $n_w = \sum_{k=0}^{n} n_{wk}$, $n_z = \sum_{k=0}^{n} n_{zk}$ областей D_w и D_z должно выполняться соотношение

$$\sum_{j=1}^{p} \gamma(b_j) + \sum_{l=1}^{N} \gamma(a_l) = n_w - n_z,$$

где величины $\gamma(b_j)$ и $\gamma(a_l)$ определяются по характеру особенностей b_j и a_l и легко подсчитываются [8]: $\gamma(b_j) = m_j + 1$, $\gamma(a_l) = -1$. Учитывая, что $P = \sum_{j=1}^{p} m_j$, из последних равенств выводим соотношение (2).

Таким образом, при выборе класса областей D_z в зависимости от класса, которому принадлежит $z(w)$, индексы $n_{z0}, \ldots, n_{zn}$ граничных кривых области D_z можно задавать произвольно, лишь бы выполнялось условие (2). Это означает, что при фиксированном классе функций $z(w)$ из $(n+1)$ индексов n_{zk}, $k = \overline{0, n}$, n можно брать любыми, а $(n+1)$-й граничный индекс находить из (2), или же при фиксированном классе областей D_z можно подбирать число нулей, полюсов и их порядки так, чтобы выполнялось (2).

В дальнейшем будем считать, что класс областей D_z и класс функций $z(w)$ подобраны так, что необходимое условие разрешимости задачи выполняется.

§ 2. Схема решения задачи

Схема решения сформулированной задачи остается той же, что и для случая плоской многосвязной области. Именно, решение задачи нетрудно (см. § 12 [1]) приводится к видоизмененной задаче Шварца для функции $\ln dz/dw$ с особенностями логарифмического характера в конечном числе точек.

По функциям $w_k(\tau)$ из (1) находим сначала зависимость

$$\sigma_k = \sigma_k(\tau): \quad \sigma_k(\tau) = \int_0^{\tau} |w_k'(t)|\, dt, \quad k = \overline{0, n},$$

где $\sigma = \sigma_k(s/l_k)$ — дуговая абсцисса на контуре L_{wk}. Из этих соотношений определяем непрерывно-дифференцируемые функции $\tau = \tau(\sigma_k)$, $k = \overline{0, n}$, $\tau'(\sigma_k) > 0$. Следовательно, будут известны значения функции $\ln|dz/dw|$:

$$\ln|dz/dw|\,|_{L_{wk}} = P_k(\sigma) + \ln l_k, \quad k = \overline{0, n}, \tag{3}$$

где $P_k(\sigma) = \ln \dfrac{d\tau}{d\sigma_k}(\sigma)$ — известные непрерывные функции.

Пусть $\mathrm{X}(w)$ — регулярная в D_w функция, имеющая граничные значения вещественной части в виде

$$\operatorname{Re}\mathrm{X}(w)\,|_{L_{wk}} = P_k(\sigma) + h_k, \quad k = \overline{0, n}, \tag{4}$$

$h_0 = 0$, h_k, $k \geqslant 1$,— некоторые постоянные. Область D_w на римановой поверхности $\mathbf{R}_w$ подобна однолистной ([14], с. 273), ее всегда можно отобразить на некоторую плоскую круговую многосвязную область ([14], с. 298) и решать задачу (4) в этой области. Однако решение задачи (4) можно построить в самой области D_w.

Область D_w на $\mathbf{R}_w$ является областью гиперболического типа и, значит, для нее существует функция Грина. Следовательно, решение видоизмененной задачи Шварца (4) запишется в виде $\mathrm{X}(w) + i\alpha$, где α — вещественная постоянная, а

$$\mathrm{X}(w) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_{wk}} [P_k(\sigma) + h_k] \frac{\partial M(w, \tau)}{\partial n}\, d\sigma,$$

$M(w, \tau)$ — комплексная функция Грина, τ — точка на контуре L_{wk}, $\vec{n}$ — внутренняя нормаль к этому контуру. Величины h_k, $k = \overline{1, n}$, определяются единственным образом из условия однозначности функции $\operatorname{Im}\mathrm{X}(w)$.

Для того, чтобы перейти от регулярной функции $\mathrm{X}(w)$ к нерегулярной $\ln z'(w)$, необходимо построить функцию $F(w, w_0)$, которая имеет простой нуль в заданной точке $w_0 \in D_w$ и модуль которой принимает постоянные значения на граничных контурах L_{wk}. При использовании этой функции для погашения особенностей $z'(w)$ мы минимально изменим граничные значения (4) (на аддитивные постоянные). В случае, когда D_w является плоской ограниченной многосвязной областью, а D_z ищется в классе однолистных областей, в работе [12] в качестве $F(w, w_0)$ использована функция, конформно и однолистно отображающая D_w на единичный круг с разрезами по дугам концентрических окружностей так, что внешний контур L_{w0} (который для плоских ограниченных областей всегда существует) переходит в единичную окружность, а $F(w_0, w_0) = 0$. В [15], с. 239, приведено представление функции $F(w, w_0)$ через функцию Грина области D_w и гармонические меры контуров L_{wk}. Существование подобной функции для области D_w, расположенной на римановой поверхности, при широких предположениях доказано в [16, гл. III, § 16 D].

Рассмотрим однозначную в D_w функцию

$$\Psi(w) = \prod_{j=1}^{p} [F(w, b_j)]^{m_j+1} \Big/ \prod_{l=1}^{N} F(w, a_l), \tag{5}$$

с помощью которой устраним особенности функции $z'(w)$. Тогда $\ln[z'(w)\Psi(w)]$ будет аналитической в области D_w функцией, но, вообще говоря, неоднозначной. При обходе в области D_w замкнутых путей, окружающих какой-либо граничный контур L_{wk} $(k = \overline{1, n})$, она может получить приращение, кратное $2\pi i$. Общий вид такой функции для случая плоских областей имеется в [17], с. 409. Используя его, функцию $\ln[z'(w)\Psi(w)]$ можно представить в форме

$$\ln[z'(w)\Psi(w)] = \Omega_0(w) + \sum_{k=1}^{n} \xi_k \ln(w - c_k), \tag{6}$$

где $\Omega_0(w)$ — функция, аналитическая и однозначная в D_w, ξ_k — целые числа, c_k — некоторые фиксированные точки внутри контуров. Правая часть формулы (6) определяет аналитическую в области D_w функцию, которая при обходе контуров L_{wk} $(k \neq 0)$ против часовой стрелки получает приращения, равные $2\pi i \xi_k$.

В случае, когда область D_w расположена на римановой поверхности или когда один из граничных контуров L_{wk} вырождается в разрез по дуге некоторой кривой, это представление нужно изменить.

Опираясь на результаты [18], приведем здесь другую, более удобную форму представления (6), которое будет справедливо для произвольных областей D_w, расположенных на римановой поверхности рода нуль.

Обозначим через $w_k(w)$ комплексные, а через $\omega_k(w)$ — вещественные гармонические меры ($\operatorname{Re} w_k(w) = \omega_k(w)$) контуров L_{wk} относительно области D_w. Рассмотрим многозначную в D_w функцию

$$\sum_{i, j=1}^{n} \Pi_{ij} \xi_i w_j(w), \tag{7}$$

причем $\left(\Pi_{ij}\right)_{i, j=1}^{n}$ является постоянной вещественной симметрической матрицей, связанной с представлением функции $F(w, w_0)$ (см. [15]), ξ_i — целые числа. Ее приращения при обходе точкой w замкнутых путей, гомотопных L_{wk} $(k = \overline{1, n})$, равны $2\pi i \xi_k$. Таким образом, функция (7) играет ту же роль, что и

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \ln(w - c_k),$$

однако она существует для любых областей, расположенных на римановой поверхности рода нуль. Функцию $\ln[z'(w)\Psi(w)]$ можно теперь представить в виде

$$\ln[z'(w)\Psi(w)] = \Omega(w) + \sum_{i,\,j=1}^{n} \prod_{ij} \xi_i w_j(w), \tag{8}$$

где $\Omega(w)$ — аналитическая и однозначная функция.

Выясним теперь, какие значения ξ_i являются допустимыми. Прежде всего, заметим, что из условия однозначности функции $\Omega(w)$ следует равенство нулю приращений мнимой части этой функции при обходе контуров L_{wk}, т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{dz}{dw}\right]_{L_{wk}} + \frac{1}{2\pi}[\arg\Psi(w)]_{L_{wk}} = \sum_{i,\,j=1}^{n} \prod_{ij} \xi_i \frac{1}{2\pi}[\operatorname{Im} w_j(w)]_{L_{wk}}.$$

В этом равенстве символ $[h]_{L_{wk}}$ означает приращение величины h при обходе контура L_{wk} в положительном (относительно области D_w) направлении. Выражение $(1/2\pi)[\arg\Psi(w)]$ легко вычислить. Действительно, аргумент функции $F(w, w_0)$ при обходе L_{wk} получает приращение 0, если $k \neq 0$; 2π, если $k = 0$. Отсюда следует, что для функции (5)

$$\frac{1}{2\pi}[\arg\Psi(w)] = \begin{cases} P + p - N, & k = 0, \\ 0, & k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{9}$$

Учитывая (9), найдем теперь изменение аргумента функции $z'(w)$ вдоль контура L_{wk}:

$$\frac{1}{2\pi}[\arg z'(w)] = \begin{cases} N - P - p - \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i, & k = 0, \\ \xi_k, & k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{10}$$

Опираясь на геометрический смысл производной аналитической функции $z'(w)$, определим значения чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Пусть кривой L_{wk} в области D_w соответствует кривая L_{zk} области D_z. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{dz}{ds}\right]_{L_{zk}} - \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{dw}{ds}\right]_{L_{wk}} = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{dz}{dw}\right]_{L_{wk}}. \tag{11}$$

Так как слева стоит известная величина $n_{zk} - n_{wk}$, то из равенств (10) и (11) определим числа ξ_k в представлениях (6) и (8):

$$\xi_k = n_{zk} - n_{wk}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Соотношения (10) и (11) для контура L_{w0} согласуются между собой, благодаря выполнению необходимого условия разрешимости (2). Итак, задание класса искомых областей в постановке окз позволяет единственным образом определять набор чисел ξ_k

в представлении (8). Отметим, что рассуждения геометрического характера для определения чисел ξ_k применялись впервые в [19] (см. также [17], с. 410) в случае внутренней окз ($N=p=0$) для плоских областей. Во внешней окз, когда $z'(w)$ имеет единственный полюс второго порядка, D_z всегда отыскивалась в классе однолистных областей, содержащих ∞. Это означает, что все n_{zk} равны — 1. Для ограниченной однолистной области D_w граничные индексы известны: $n_{w0}=+1$, $n_{wk}=-1$ при $k\neq 0$. Из формулы (12) следует тогда, что $\xi_k=0$ для всех k. Поэтому для такой задачи функцию $\ln[z'(w)\Psi(w)]$ ($\Psi(w)$ совпадает здесь с $F^2(w, b_1)$) следует искать в классе однозначных функций.

Вернемся к нашей задаче. Рассмотрим теперь однозначную в D_w функцию $\Omega(w)$, входящую в представление (8). Граничные значения ее вещественной части равны:

$$\operatorname{Re}\Omega(w)|_{L_{w0}}=P_0(\sigma)$$

и

$$\operatorname{Re}\Omega(w)|_{L_{wk}}=P_k(\sigma)+\ln l_k+\sum_{j=1}^{p}(m_j+1)\ln R_k(b_j)-$$
$$-\sum_{l=1}^{N}\ln R_k(a_l)-\sum_{i=1}^{n}\Pi_{ik}\xi_i, \qquad (13)$$

$1\leqslant k\leqslant n$, где $R_k(w_0)$ — радиус кругового разреза, соответствующего L_{wk} при отображении функцией $F(w, w_0)$, и содержат неизвестные параметры l_k, $k=\overline{1,n}$, и b_j, $j=\overline{1,p}$. Неизвестные полюсы b_j будем отыскивать из системы уравнений

$$\text{выч}_{w=bj}\left[\exp\left(X(w)+\sum_{i,\,k=1}^{n}\Pi_{ik}\xi_i w_k(w)\right)\Big/\Psi(w)\right]=0,\ j=\overline{1,p}. \qquad (14)$$

Предположим, что система (14) разрешима и значения b_j найдены. В этом случае граничные значения вещественных частей функций $\Omega(w)$ и $X(w)$ будут совпадать, если на контурах L_{wk}, $k=\overline{1,n}$, справедливы равенства (см. (4), (13))

$$h_k=\ln l_k+\sum_{j=1}^{p}(m_j+1)\ln R_k(b_j)-\sum_{l=1}^{N}\ln R_k(a_l)-\sum_{i=1}^{n}\Pi_{ik}\xi_i. \qquad (15)$$

Из (15) выводим

$$l_k=\exp\left(h_k+\sum_{i=1}^{n}\Pi_{ik}\xi_i\right)\prod_{l=1}^{N}R_k(a_l)\Big/\prod_{j=1}^{p}[R_k(b_j)]^{m_j+1},\ k=\overline{1,n}, \qquad (16)$$

и, следовательно, значения l_k найдены. Итак, при выполнении (16) граничные значения $\operatorname{Re}\Omega(w)$ и $\operatorname{Re}X(w)$ совпадают. Следовательно, функции $\Omega(w)$ и $X(w)$ отличаются на мнимую постоянную, а система (14) обеспечивает отсутствие логарифмических особенностей у $z(w)$ в точках $b_1, b_2, \ldots, b_p$ и входит в первую группу условий разрешимости. Решение задачи записывается теперь в виде

$$z(w) = e^{l\alpha} \int\limits_a^w \exp\Big(\mathrm{X}(w) + \sum_{l,\,k=1}^{n} \Pi_{lk}\xi_l w_k(w)\Big)\Big/ \Psi(w)\,dw + c, \tag{17}$$

где $a\ (\in D_w)$ и c — комплексные постоянные. Целые числа ξ_l, входящие в функцию (17), определяются равенствами (12) по условиям задачи, а величины $b_j,\ j = \overline{1, p}$, являются решениями системы (14). Число решений окз будет не больше числа наборов $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$, являющихся решениями системы (14) и состоящих из различных чисел b_j. Последнее требование вытекает из постановки задачи (число и порядки полюсов фиксированы, совпадение полюсов не допускается).

Для однозначности функции $z(w)$ в области D_w, расположенной на римановой поверхности $\mathbf{R}_w$, должны выполняться равенства

$$\int\limits_{L_{wk}} \exp\Big(\mathrm{X}(w) + \sum_{i,\,j=1}^{n} \Pi_{ij}\xi_i w_j(w)\Big)\Big/ \Psi(w)\,dw = 0, \quad k = \overline{1, n}, \tag{18}$$

составляющие вторую группу условий разрешимости. Таким образом, из описанного выше множества решений системы (14) нужно выбрать такие, которые обеспечивают выполнение (18).

В качестве примера проведенных построений рассмотрим случай, когда D_w представляет собой кольцо $q < |w| < 1$ на плоскости w, D_z ищется в классе $\{n_{z0}, n_{z1}\}$ областей, содержащих две бесконечно удаленные точки, не являющиеся точками ветвления, а $z(w)$ отыскивается в классе $[0;\ 1,1]$. В данном случае $n_{w0} = +1, n_{w1} = -1$ и поэтому необходимое условие разрешимости (2) принимает вид

$$n_{z0} + n_{z1} = -4.$$

Так как гармонические меры $w_0(w)$, $w_1(w)$ и функция Грина для кольца известны (см., напр., [20]), легко записать функцию (5) в явном виде:

$$\Psi(w) = \left[\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{w}{b_1},\ q\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{w}{b_2},\ q\right)\Big/ \vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln w\bar{b}_1,\ q\right) \times \right.$$
$$\left. \times\, \vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln w\bar{b}_2,\ q\right)\right]^2,$$

где $\vartheta_1(w,\ q)$ — тэта-функция ([20], с. 274). Рассмотрим несколько вариантов выбора класса областей D_z при решении окз.

1°. Пусть D_z ищется в классе $\{n_{z0}, n_{z1}\} = \{-4, 0\}$. В этом случае в силу (12) $\xi_1 = n_{z1} - n_{w1} = 1$. Схематично представим модель контура L_{z1} $(n_{z1} = 0)$ в виде восьмерки. В качестве контура L_{z0} с граничным индексом $n_{z0} = -4$ возьмем кривую,

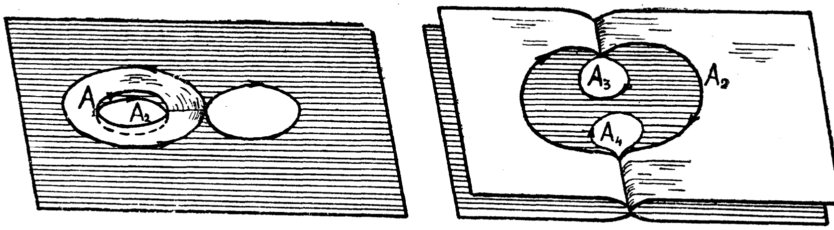

Рис. 1.

состоящую из четырех простых кривых A_1, A_2, A_3, A_4, которые соединяются между собой в четырех точках (см. рис. 1).

2°. Пусть область D_z отыскивается в классе областей $\{n_{z0}, n_{z1}\} = \{-3, -1\}$. Здесь $\xi_1 = 0$. Модель одной из таких областей представлена на рис. 2 (штриховкой обозначен „нижний“ лист этой поверхности).

3°. Если требуется найти область D_z в классе $\{n_{z0}, n_{z1}\} = \{-2, -2\}$, то легко видеть, что $\xi_1 = -1$. Область D_z можно представить в виде внешности двух двулистных кругов, соединенных между собой линией перехода (см. рис. 3).

Случаи $\{-1, -3\}$ и $\{0, -4\}$ сводятся к моделям в 1°, 2° изменением нумерации контуров.

В заключении § 2 остановимся на вопросе разрешимости системы (14) и возможности удовлетворения условий замкнутости (18) в случае, когда $z(w) \in [N; \underbrace{1, \ldots, 1}_{p}]$, а область D_w обладает свойствами симметрии. Все формулируемые ниже утверждения будут доказаны во второй части данной статьи.

Заметим, что при $p = 0$ система (14) вырождается и, следовательно, окз будет разрешима при любом $N = 0, 1, \ldots$, если выполняются условия (18). Случай [0; 1] описывает внешнюю окз для многосвязной области и рассмотрен в [12]. Система (14) представляет собой одно уравнение — аналог уравнения Гахова — для определения полюса b. Его разрешимость с использованием идеи Ф. Д. Гахова доказана в [12].

Нетрудно доказать разрешимость системы (14) в случае, когда $z(w) \in [N; 1]$ при любом $N = 1, 2, \ldots$. Для окз в односвязной области этот результат получен в [9]. Обобщением результата из [9] является

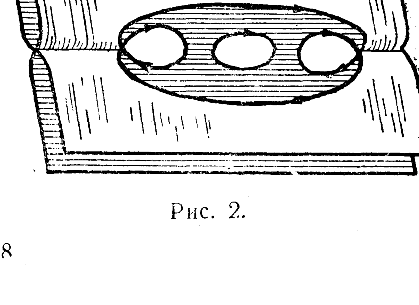

Рис. 2.

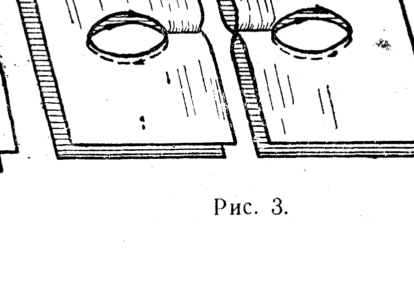

Рис. 3.

Теорема 1. *Система* (14) *для* $z(w)$ *из класса* $[N;\ 1]$ *при любом* $N>0$ *имеет в области* D_w *не менее одного решения. Окз в этом случае будет разрешима, если хотя бы одно из этих решений обеспечивает выполнение условий* (18).

Пусть $z(w)\in[N;\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{p}]$. В этом случае необходимое условие разрешимости (2) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n} n_{zk}=\sum_{k=0}^{n} n_{wk}+N-2p,$$

а постоянные ξ_k определяются из (12). Опишем некоторые достаточные условия разрешимости системы (14) при дополнительном предположении о симметричности области D_w. Приведем необходимые определения.

Пусть D_w — плоская однолистная $(n+1)$-связная ограниченная область, L_{w0} — внешний контур.

Определение 1. *Область* D *называется* m-*симметричной* $(m\geqslant 2)$, *если* $e^{2\pi i/m}D=D$.

Определение 2. *Будем говорить, что граничные функции* $w_0(\tau)$, $w_1(\tau),\ \ldots,\ w_n(\tau)$, *заданные на отрезке* $[0,\ 1]$, $w_k(1)=w_k(0)$, $k=\overline{0,\ n}$, *удовлетворяют условиям* m-*симметрии, если*

$$w_0(\tau\pm 1/m)=e^{\pm 2\pi i/m}w_0(\tau),\quad w_n(\tau\pm 1/m)=e^{\pm 2\pi i/m}w_n(\tau) \tag{19}$$

(*берется один из знаков* $+$ *или* $-$, *лишь бы* $\tau\underset{(-)}{+}1/m\in[0,\ 1]$) *и для любого* $k\neq 0, n$ *существует* $j\neq 0, n$ *такое, что выполняется равенство*

$$w_k(\tau)=e^{2\pi i/m}w_j(\tau). \tag{20}$$

Из определения 2 следует, что если функции из (1) удовлетворяют условиям m-симметрии, то они задают границу m-симметричной области D_w, не содержащей начало координат и такой, что в некоторой „ячейке", поворотом которой на углы, кратные $2\pi/m$, получается вся область, содержится $1/m$-часть контуров L_{w0}, L_{wn} и s контуров с уравнениями $w=w_k(\tau)$, $k=\overline{1, s}$, причем $ms=n-1$. Условия симметрии вида (19), (20) впервые были введены в [21] для случая одно- и двусвязных областей. В виде обобщения результатов [21] получается следующая

Теорема 2. *Пусть граничные функции в обратной задаче удовлетворяют условию* p-*симметрии и определяют границу плоской* $(n+1)$-*связной области* $D_w\not\ni 0$ $(n=1,\ n\geqslant 3)$, *функция* $z(w)$ *принадлежит классу* $[0;\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{p}]$, *а область* D_z *отыскивается в классе* $\{n_{z0},\ n_{z1},\ \ldots,\ n_{zn}\}$, *причем выполняется необходимое условие разрешимости* $\sum_{k=0}^{n} n_{zk}=1-n-2p$. *Тогда для* *всех $p > 1$ существует решение системы* (14), *а соответствующее ему решение окз при выполнении условий замкнутости* (18) *будет p-симметричной функцией в p-симметричной области D_z.*

Замечание 2. Теорема 2 справедлива и в том случае, когда $z'(w)$ имеет N нулей, причем $r = N/p$ — целое число, точки a_l расположены симметрично (в фиксированной „ячейке" области D_w расположено r точек a_l, все остальные получаются из них поворотом на углы, кратные $2\pi/p$). При этом необходимое условие разрешимости, связывающее классы функций $z(w)$ и областей D_z, принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n} n_{zk} = 1 - n + N - 2p.$$

Остановимся на вопросе о выполнении условий замкнутости (18) при предположениях теоремы 2.

Заметим прежде всего, что если условие замкнутости выполняется для некоторого контура L_{wk}, то эти условия выполняются и для всех контуров, получающихся из L_{wk} поворотом на угол, кратный $2\pi/p$.

Если область D_w m-симметрична, m/p — целое число (в частности, p-симметрична), то контуры $L_{w1}, L_{w2}, \ldots, L_{w\, n-1}$ получаются из $(n-1)/m$ внутренних контуров поворотом на угол, кратный $2\pi/m$. Это означает, что достаточно требовать выполнения условий замкнутости только для этих $(n-1)/m$ внутренних контуров.

Поэтому, при предположениях теоремы 2 количество условий разрешимости сокращается до $(n-1)/p$, где $n > 2$ (а при дополнительном требовании m-симметричности D_w — до $(n-1)/m$). При $n = 1$ (случай двусвязной области) условия разрешимости отсутствуют. При $n = 2$ трехсвязная область D_w, не содержащая $w = 0$, не может обладать поворотной симметрией, и поэтому такой случай, как и в теореме 2, не рассматривается.

Итак, как следствие теоремы 2 справедлива

Теорема 3. *Пусть двусвязная область D_w не содержит $w = 0$, m-симметрична и выполнено условие $n_{z0} + n_{z1} = N - 2p$, где m/p — целое. Тогда при $z'(w) \in [N; \underbrace{1, \ldots, 1}_{p}]$ окз имеет решение, удовлетворяющее условиям замкнутости, а область D_z принадлежит классу $\{n_{z0}, n_{z1}\}$, если при $N > 0$ число $r = N/m$ — целое и заданные точки a_l, $l = \overline{1, N}$, обладают тем свойством, что все они получаются из некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_r$ в результате поворота на углы, кратные $2\pi/m$. При $N = 0$ окз для $z(w) \in [0; \underbrace{1, \ldots, 1}_{p}]$ и $D_z \in \{n_{z0}, n_{z1}\}$ разрешима без дополнительных условий.*

Разрешимость системы (14) можно доказать также при предположении, что плоская область D_w обладает зеркальной симметрией, а именно, справедлива

Теорема 4. *Если* $(n+1)$-*связная область* D_w $(n \geqslant 1)$ *симметрична относительно некоторой прямой, которая засекает* s *граничных кривых* $(s \leqslant n+1)$, *и функции* $P_k(\sigma)$, $k=\overline{0, n}$, *не меняются при этом преобразовании симметрии граничных точек, то система* (14) *при* $1 \leqslant p \leqslant s$ *имеет не менее* C_s^p *решений.*

Отметим, что все получающиеся в этом случае в результате решения окз контуры L_{zk} будут симметричны относительно некоторой прямой. Из $2n$ вещественных условий замкнутости (18) n условий будут выполняться автоматически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения.— Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965,— 333 с.

2. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г. Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения.— Итоги науки и техники. Матем. анализ, 18, 1980, с. 67—124.

3. Андрианов С. Н. О существовании и числе решений обратной краевой задачи теории аналитических функций.— Уч. записки Казанск. ун-та, 1953, 113, кн. 10, с. 21—30.

4. Андрианов С. Н. Интегральные уравнения обратных краевых задач.— Тр. 3-его Всес. мат. съезда, 1956, т. 4. М., 1959, с. 14.

5. Гахов Ф. Д., Крикунов Ю. М. Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1956, 20, № 2, с. 207—240.

6. Аксентьев Л. А. Об индексах функций на римановых поверхностях.— ДАН СССР, 1963, 152, № 1, с. 9—12.

7. Аксентьев Л. А. Обратная краевая задача для аналитических функций на римановых поверхностях.— Тр. семин. по обратным краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, 1964, вып. 1, с. 3—13.

8. Аксентьев Л. А. Приложение к обратным краевым задачам индексов функций на римановых поверхностях.— Тр. семин. по краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, 1966, вып. 3, с. 5—10.

9. Видякина Н. Н. О разрешимости одной обратной краевой задачи на римановой поверхности.— Тр. семин. по краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, 1974, вып. 11, с. 32—42.

10. Гахов Ф. Д. Об обратных краевых задачах.— Уч. записки Казанск. ун-та, 1953, 113, кн. 10, с. 9—20.

11. Журбенко Л. Н. Об устойчивости решения обратной краевой задачи с параметром s в случае многосвязной области.— Тр. семин. по краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, 1980, вып. 17, с. 74—84.

12. Аксентьев Л. А., Киндер М. И., Сагитова С. Б. Разрешимость внешней обратной краевой задачи в случае многосвязной области.— Тр. семин. по краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, 1983, вып. 20, с. 22—34.

13. Аксентьев Л. А., Елизаров А. М., Киндер М. И. О продолжении работ Ф. Д. Гахова по обратным краевым задачам.— Сб. трудов юбилейной конференции, посвященной 70-летию академика АН БССР Ф. Д. Гахова.— Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1984.

14. Форд Л. Р. Автоморфные функции. М.— Л.: ОНТИ, 1936,— 340 с.

15. Шиффер М. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений. Приложение к книге Р. Куранта „Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности". ИЛ, 1953, с. 234—301.

16. Ahlfors L. V., Sario L. Riemann surfaces. Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1960, 382 pp.

17. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Наука, 1977,— 640 с.
18. Киндер М. И. Канонические конформные отображения многосвязных областей для обратных краевых задач. Деп. №. 5871—83.
19. Нужин М. Т. Об обратных краевых задачах для многосвязных областей.— Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1964, № 5, с. 69—77.
20. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций.— М.: Наука, 1970,— 304 с.
21. Аксентьев Л. А. Симметричные решения обратных краевых задач.— Тр. семинара по краевым задачам. Изд-во Казанск. ун-та, 1977, вып. 14, с. 20—27.

Доложено на семинаре 25 января 1983 г.

УДК 517.946

Л. К. Астафьева

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

В данной статье рассматривается нелинейная задача со смещениями для уравнения Лаврентьева — Бицадзе с круговой линией изменения типа в случаях, когда известна лишь часть границы области, в которой отыскивается решение. Подобные задачи в линейной постановке исследованы в работах В. И. Жегалова [1], [2].

Задача. В плоскости $z = r \exp i\varphi$ определить число $\theta \in (0, 2\pi)$ и гладкую кривую σ, чтобы выполнялись требования:

1) σ целиком расположена внутри единичного круга Γ и ее концы совпадают с точками $A(1, 0)$ и $B(1, \Theta)$;

2) в области D, ограниченной Γ и кривыми $\ln r - \varphi = 0$, $\ln r + \varphi = \theta$, существует решение $u(r, \varphi)$ уравнения

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \operatorname{sgn}(1 - r) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{1}$$

регулярное при $r > 1$ и $r < 1$, непрерывно продолжимое вместе со своими производными первого порядка на границу и переходную линию $r = 1$ и удовлетворяющее условиям

$$\sum_{l+j+k=0}^{2} a_{jkl}(\varphi)\, u^j\left(\exp\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right),\ \theta + \frac{\varphi}{2}\right) \times$$
$$\times u^k\left(\exp\frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi}{2}\right) u^l(1,\ \varphi) = 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \theta. \tag{2}$$

$$\begin{cases} u^-(1,\ \varphi) = \alpha_0 u^+(1,\ \varphi) \\ \dfrac{\partial u^-}{\partial r}(1,\ \varphi) = \alpha_1 \dfrac{\partial u^+}{\partial r}(1,\ \varphi). \end{cases} \tag{3}$$

Граничные значения функции и ее производной $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ на σ выражены как функции длины вектора r, соединяющего начало координат с переменной точкой контура. Чтобы эти значения выражались однозначно, искомый контур должен быть разбит на части, где r меняется монотонно.