В. Е. Трощиев, Метод построения блочно-треугольных разностных схем для уравнения переноса в самосопряженной форме,
Матем. моделирование, 1998, том 10, номер 1, 117–125

https://www.mathnet.ru/mm1243

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **10** номер **1** год **1998**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ БЛОЧНО-ТРЕУГОЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В САМОСОПРЯЖЕННОЙ ФОРМЕ

© *В.Е. Трощиев*

Государственный научный центр Российской Федерации
Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142092, г. Троицк Московской области

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научно-технического центра (проект №067-94)

Предлагается метод построения разностных схем для линейного уравнения переноса 2-го порядка:

$$M\varphi(\vec{r},\vec{\Omega}) \equiv \operatorname{div}\left[\vec{\Omega}\frac{1}{\sigma(\vec{r})}\left(-\vec{\Omega}\nabla\varphi + \frac{1}{4\pi}Q(\vec{r},\vec{\Omega})\right)\right] + \sigma(\vec{r})\cdot\varphi = \frac{1}{4\pi}Q(\vec{r},\vec{\Omega}) \tag{1}$$

в предположении, что источник $Q(\vec{r},\vec{\Omega})$ является заданной функцией (простая итерация). Уравнение (1) является эквивалентной записью в самосопряженной форме уравнения переноса 1-го порядка:

$$L\varphi(\vec{r},\vec{\Omega}) \equiv \vec{\Omega}\cdot\nabla\varphi + \sigma(\vec{r})\cdot\varphi = \frac{1}{4\pi}Q(\vec{r},\vec{\Omega}). \tag{2}$$

Задача решения уравнения (1) ставится в выпуклом теле G и является краевой в отличие от уравнения (2), для которого решается задача Коши. Новизна метода заключается в том, что указаны некоторые свойства краевой задачи (1), позволяющие строить конечно-разностные и конечно-элементные схемы с блочно-треугольными матрицами для системы сеточных уравнений.

THE METHOD OF CONSTRUCTING OF BLOCK-TRIANGULAR DIFFERENCE SCHEMES FOR SELFADJOINT FORM OF THE TRANSPORT EQUATION

V.E. Troshchiev

State research center of the Russian Federation
Troitsk institute for innovation & fusion research
142092, Troitsk Moscow Reg., Russia

The method is proposed for construction of difference schemes for the 2nd order linear transport equation:

$$M\varphi(\vec r,\vec\Omega) \equiv \operatorname{div}\left[\vec\Omega\frac{1}{\sigma(\vec r)}\left(-\vec\Omega\nabla\varphi + \frac{1}{4\pi}Q(\vec r,\vec\Omega)\right)\right] + \sigma(\vec r)\cdot\varphi = \frac{1}{4\pi}Q(\vec r,\vec\Omega) \qquad (1)$$

under the assumption that $Q(\vec r,\vec\Omega)$ is a given function (simple iteration). Equation (1) is one among selfadjoint forms equivalent to the transport equation of the 1st order:

$$L\varphi(\vec r,\vec\Omega) \equiv \vec\Omega\cdot\nabla\varphi+\sigma(\vec r)\cdot\varphi = \frac{1}{4\pi}Q(\vec r,\vec\Omega). \qquad (2)$$

The problem of the equation (1) is stated in a convex body G and is a boundary problem in contrast to the equation (2), for which Cauchy problem is stated. The novelty of the method is that some properties of the problem (1) are indicated, and these properties make it possible to build finite-difference and finite-elements schemes with block-triangular matrices for boundary value for the system of discrete equations.

1. Введение. Уравнение переноса 1-го порядка и постановка задачи

При численном решении задач нейтронно-ядерной физики процессы переноса и размножения нейтронов чаще всего описывают уравнением переноса 1-го порядка, которое в односкоростном приближении имеет вид (см. [1-4]):

$$\begin{aligned} &L\varphi(\vec r,\vec\Omega) \equiv \vec\Omega\cdot\nabla\varphi + \sigma(\vec r)\cdot\varphi = \frac{1}{4\pi}Q(\vec r,\vec\Omega),\\ &Q(\vec r,\vec\Omega) = J(\vec r,\vec\Omega) + F(\vec r,\vec\Omega),\\ &J(\vec r,\vec\Omega) = \frac{1}{4\pi}\sigma(\vec r)\cdot m(\vec r)\cdot\iint\varphi(\vec r,\vec\Omega')\cdot g(\vec r,\vec\Omega'\to\vec\Omega)d\Omega' \end{aligned} \qquad (1)$$

или в дивергентной форме:

$$L\varphi(\vec r,\vec\Omega) \equiv \operatorname{div}(\vec\Omega\cdot\varphi) + \sigma(\vec r)\cdot\varphi = \frac{1}{4\pi}Q(\vec r,\vec\Omega). \qquad (1')$$

Здесь $\vec r$, $\vec\Omega$ — независимые переменные, $\varphi(\vec r,\vec\Omega)$ — искомая функция: $\vec r$ — радиус-вектор точки пространства, где находится частица; $\vec\Omega$ — единичный вектор направления полета частицы, Ω — поверхность единичной сферы; $\varphi(\vec r,\vec\Omega)$ — поток частиц (плотность частиц, умноженная на скорость частиц); $\sigma(\vec r)$ — заданный коэффициент поглощения частиц средой; $Q(\vec r,\vec\Omega)$ — источник частиц, где $J(\vec r,\vec\Omega)$ — интеграл столкновений (интеграл вторичных нейтронов), $F(\vec r,\vec\Omega)$ — независимый источник частиц, $g(\vec r,\vec\Omega'\to\vec\Omega)$ — индикатриса рассеяния.

Подчеркнем, что эквивалентность представлений (1) и (1') для уравнения переноса следует из предположения, что единичный вектор $\vec\Omega$ не зависит от координат пространства $\vec r$.

Решение уравнения (1) ищется в выпуклой области G пространства $\vec r = (x,y,z)$ для всех возможных направлений $\vec\Omega = (\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$. Заданные функции $\sigma(\vec r), m(\vec r), g(\vec r,\vec\Omega'\to\vec\Omega)$, $F(\vec r,\vec\Omega)$ предполагаются кусочно-непрерывными по $\vec r$. В областях непрерывности они являются кусочно-гладкими. На поверхности S тела G задается граничное условие в виде потока частиц, направленных в G:

$$\varphi(\vec r_s,\vec\Omega) = \Psi(\vec r_s,\vec\Omega), \quad \vec r_s\in S, \quad \vec\Omega\cdot\vec n < 0,\ \vec n \text{ — внешняя нормаль к } S. \qquad (2)$$

В [2] дано обоснование существования и единственности решения задачи (1),(2).

Уравнение (1) решается простыми итерациями по интегралу столкновений $J(\vec{r},\vec{\Omega})$, который на каждой итерации известен. Таким образом, интегро-дифференциальная задача (1),(2) на каждой простой итерации является задачей Коши для уравнения переноса 1-го порядка (1) или (1′):

$$L\overset{\nu+1}{\varphi}(\vec{r},\vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\overset{\nu}{Q}(\vec{r},\vec{\Omega}), \qquad \overset{\nu}{Q}(\vec{r},\vec{\Omega}) = \overset{\nu}{J}(\vec{r},\vec{\Omega}) + F(\vec{r},\vec{\Omega}), \tag{1''}$$

$$\overset{\nu+1}{\varphi}(\vec{r}_s,\vec{\Omega}) = \Psi(\vec{r}_s,\vec{\Omega}), \quad \vec{r}_s \in S, \quad \vec{\Omega}\cdot\vec{n} < 0, \tag{2'}$$

ν - порядковый номер простой итерации. Далее мы опускаем индекс ν, считая, что источник $Q(\vec{r},\vec{\Omega})$ в уравнениях (1), (1′), (1″) является заданной функцией.

При построении разностных аппроксимаций задачи (1),(2) для двумерных и трехмерных областей существенным является обеспечение треугольности матрицы у системы сеточных уравнений схемы. Треугольные или блочно-треугольные схемы имеют большое значение для эффективной реализации метода простой итерации (1″), (2′) по интегралу столкновений и для построения алгоритмов ускорения сходимости итераций в тех случаях, когда уравнение переноса приходится решать на неортогональных сетках — треугольниках, четырехугольниках, параллелепипедах и т. д.

Вопросы построения треугольных или блочно-треугольных разностных схем (БТС) на общих косоугольных сетках для уравнения переноса 1-го порядка (1) исследованы в [5], для треугольных сеток - в [6]. Согласно [5], для любого направления $\vec{\Omega}$ должен выполняться принцип последовательного освещения ячеек (ППО). Для выполнения ППО ячейки сетки должны быть выпуклыми, т. е. сетка должна состоять из выпуклых многоугольников или многогранников с прямыми сторонами или плоскими гранями. Ячейки должны покрывать область $G^h \approx G$ без пустот и пересечений. Тогда в двумерном случае для каждого направления $\vec{\Omega}$ можно указать такой порядок решения уравнения (1) по ячейкам - многоугольникам сетки, при котором матрица полной системы сеточных уравнений окажется блочно-треугольной, причем каждой ячейке сетки соответствует один блок матрицы. В [5] предложен конструктивный алгоритм упорядочения ячеек сетки - алгоритм последовательного освещения ячеек сетки вектором $\vec{\Omega}$ (АПО).

Для трехмерного случая (многогранники) существуют исключения, когда ППО невыполним, однако эти исключения легко устраняются [5]. Далее будем предполагать, что сетка состоит из многоугольников или многогранников T_k, $k=1,2,\ldots K$, удовлетворяющих условию ППО. В [7-10] на основе ППО построены блочно-треугольные схемы для уравнений переноса 1-го порядка. Аппроксимация уравнения переноса 1-го порядка в этих схемах осуществляется методом баланса [11]. Для замыкания системы уравнений в каждой сеточной ячейке применяется метод дополнительных интерполяционных соотношений [4,7,8]. Схемы [7-10] широко применяются для решения задач со сложной геометрией, для моделирования процессов переноса совместно с другими физическими процессами.

После публикации [2] большой интерес представляет проблема использования уравнений переноса 2-го порядка в самосопряженной форме для численного решения задач переноса нейтронов и других видов излучений. Для этих уравнений можно построить дискретные модели с сохранением в сеточной форме некоторых свойств дифференциального оператора, таких как самосопряженность, минимальность квадратичного функционала и др., в том числе на косоугольных сетках [11,12]. Трудности использования уравнений 2-го порядка обусловлены тем, что задачи для них являются краевыми, и поэтому матрицы разностных схем не являются блочно-треугольными. Для многомерных задач переноса решение системы сеточных уравнений становится сложной проблемой.

Ниже исследуется вопрос о возможности построения блочно-треугольных схем для уравнений переноса 2-го порядка с краевыми условиями. Предложен вариант уравнения переноса 2-го порядка в самосопряженной форме, для которого сформулирован и обоснован в общем виде метод построения блочно-треугольных схем конечно-разностного и конечно-элементного типов на косоугольных сетках.

2. Уравнение переноса 2-го порядка и постановка задачи

Запишем уравнение переноса 2-го порядка для функции $\varphi(\vec{r},\vec{\Omega})$, т. е., в отличие от [2], без объединения направлений $\vec{\Omega}$ и $-\vec{\Omega}$. Для этого из (1) выражаем

$$\varphi(\vec{r},\vec{\Omega}) = \frac{1}{\sigma(\vec{r})}\left(-\vec{\Omega}\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{4\pi}Q(\vec{r},\vec{\Omega})\right) \tag{3}$$

и подставляем в уравнение (1'):

$$M\varphi(\vec{r},\vec{\Omega}) \equiv \operatorname{div}\left[\vec{\Omega}\cdot\frac{1}{\sigma(\vec{r})}\left(-\vec{\Omega}\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{4\pi}Q(\vec{r},\vec{\Omega})\right)\right] + \sigma(\vec{r})\cdot\varphi = \frac{1}{4\pi}Q(\vec{r},\vec{\Omega}). \tag{4}$$

В уравнении (4) вектор $\vec{\Omega}$ изменяется, как и в (1), на всей единичной сфере.

Граничные условия для уравнения (4) должны быть поставлены на освещенной и неосвещенной вектором $\vec{\Omega}$ частях поверхности S:

$$\varphi(\vec{r}_s,\vec{\Omega}) = \Psi(\vec{r}_s,\vec{\Omega}), \quad \vec{r}_s \in S, \quad \vec{\Omega}\cdot\vec{n} < 0, \tag{5}$$

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla\varphi(\vec{r}_s,\vec{\Omega}) = -\sigma(\vec{r}_s)\varphi(\vec{r}_s,\vec{\Omega}) + \frac{1}{4\pi}Q(\vec{r}_s,\vec{\Omega}), \quad \vec{r}_s \in S, \quad \vec{\Omega}\cdot\vec{n} > 0. \tag{6}$$

Условие (6) есть уравнение переноса 1-го порядка (1), ставшее граничным условием на неосвещенной вектором $\vec{\Omega}$ части поверхности S.

В случае разрывов коэффициента $\sigma(\vec{r})$ и источника $Q(\vec{r},\vec{\Omega})$ на поверхностях Γ внутри тела G (контактные поверхности) для единственности решения необходимо потребовать выполнения условий на контактных границах:

$$\varphi(\vec{r}_\Gamma + 0\cdot\vec{\Omega},\vec{\Omega}) = \varphi(\vec{r}_\Gamma - 0\cdot\vec{\Omega},\vec{\Omega}), \tag{7}$$

$$j(\vec{r}_\Gamma + 0\cdot\vec{\Omega},\vec{\Omega}) = j(\vec{r}_\Gamma - 0\cdot\vec{\Omega},\vec{\Omega}), \tag{8}$$

где через j обозначен поток нейтронов:

$$\varphi(\vec{r},\vec{\Omega}) \equiv j(\vec{r},\vec{\Omega}) = \frac{1}{\sigma(\vec{r})}\left(-\vec{\Omega}\cdot\nabla\varphi(\vec{r},\vec{\Omega}) + \frac{1}{4\pi}Q(\vec{r},\vec{\Omega})\right). \tag{9}$$

Условия (7)-(9) аналогичны условиям на контактных границах для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности. Они следуют из свойства непрерывности решения $\varphi(\vec{r},\vec{\Omega})$ вдоль любого луча $\vec{r}_s + \xi\cdot\vec{\Omega}$ [2] и соотношений (3), (9).

3. Метод построения блочно-треугольных разностных схем для уравнения переноса 2-го порядка

Принципиальная возможность построения блочно-треугольных схем для краевой задачи (4)-(6) основывается на следующих положениях.

1. Задача Коши для уравнения переноса 1-го порядка (1),(2) и краевая задача для уравнения 2-го порядка (4)-(6) эквивалентны, так как решения этих задач тождественны. Отсюда следует, что уравнение переноса 1-го порядка (1) можно использовать в качестве краевого условия для уравнения 2-го порядка (4) на любой внутренней поверхности Г в теле G, если вектор $\vec{\Omega}$ пересекает эту поверхность один раз.

2. Если трехмерную область G покрыть (аппроксимировать) выпуклыми Т-многогранниками T_k, k=1,2,...,K, без пустот и пересечений (двумерную область - выпуклыми многоугольниками), то применяя АПО-алгоритм последовательного освещения [5], с учетом положения 1, мы получим блочно-треугольное представление дифференциального оператора 2-го порядка (4) с краевыми условиями типа (5) на освещенной и типа (6) на неосвещенной вектором $\vec{\Omega}$ частях поверхности каждого многогранника T_k. При этом для каждого вектора $\vec{\Omega}$ реализуется свое блочно-треугольное представление полного оператора задачи (4)-(6), каждому многограннику отвечает один блок-оператор $O_{k\Omega}, k = 1,2,\ldots K, \Omega \in 4\pi$.

3. В сеточной форме каждый блок оператор $O_{k\Omega}$ будет блок-матрицей в полной матрице системы сеточных уравнений. Порядок блок-матрицы равен количеству тех узлов сетки, которые расположены внутри многогранника и на неосвещаемых вектором $\vec{\Omega}$ гранях. В этих узлах определяется сеточная функция $\varphi^h(\vec{r},\vec{\Omega})$. Каждому узлу соответствует сеточное уравнение, которое получается как аппроксимация уравнения (4) для внутренних узлов T_k и как аппроксимация граничного условия вида (6) в узлах на неосвещаемых вектором $\vec{\Omega}$ гранях T_k. Значения φ^h в узлах на освещаемых вектором $\vec{\Omega}$ гранях известны из решения предыдущих блок-систем.

4. Аппроксимации уравнения переноса (4) и граничных условий (6) могут быть выполнены различными методами. Наиболее естественно использовать метод баланса [11] и (или) метод Галеркина с сеточными базисными фунциями [12,13].

Положения 1, 2 доказывают эквивалентность краевой задачи (4)-(6) в области G совокупности краевых задач в многогранниках T_k, k=1,2,... K, удовлетворяющих требованиям ППО.

Положения 1–4 определяют в общей форме метод построения блочно-треугольных сеточных схем для уравнения переноса 2-го порядка (4) с краевыми условиями (5),(6), и вместе с АПО [5] — алгоритм решения полной системы сеточных уравнений.

4. Блочно-треугольная схема для уравнения переноса 2-го порядка в характеристической форме

Для уравнения переноса 2-го порядка (4) в характеристической форме:

$$M\varphi(\vec{r}_s + \xi\vec{\Omega}) \equiv \frac{d}{d\xi}\left(\frac{-1}{\sigma(\xi)}\cdot\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{Q(\xi,\vec{\Omega})}{\sigma(\xi)}\right) + \sigma(\xi)\cdot\varphi(\xi) = \frac{1}{4\pi}Q(\xi,\vec{\Omega}),$$

$$0\le\xi\le\hat{\xi}(\vec{\Omega}), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \tag{10}$$

с использованием уравнения 1-го порядка

$$L\varphi(\vec{r}_s+\xi\vec{\Omega}) \equiv \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}+\sigma(\xi)\cdot\varphi(\xi)=\frac{1}{4\pi}Q(\xi,\vec{\Omega}) \tag{11}$$

в качестве граничного условия, предложенный метод позволяет строить положительные и монотонные разностные схемы 2-го порядка точности при условии, что правая часть $Q(\xi,\vec{\Omega})$ на каждом сеточном интервале $\xi_k \le \xi \le \xi_{k+1}$ аппроксимирована положительной прямой линией:

$$Q(\xi,\vec{\Omega})=Q_k^+ + \frac{Q_{k+1}^- - Q_k^+}{\xi_{k+1}-\xi_k}(\xi-\xi_k), \quad Q_k^+ \ge 0, \quad Q_{k+1}^- \ge 0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ \hat{k}-1. \tag{12}$$

В качестве такого примера приведем следующую схему:

$$-\frac{1}{\sigma_{k+1/2}}\cdot\frac{\varphi_{k+1}-2\varphi_{k+1/2}+\varphi_k}{h^2/4}+\sigma_{k+1/2}\varphi_{k+1/2}=$$
$$=\frac{1}{4\pi}Q_{k+1/2}-\frac{1}{4\pi\sigma_{k+1/2}}\cdot\frac{Q_{k+1}^- - Q_k^+}{h}\ , \tag{13}$$

$$\varphi_{k+3/4}=-\frac{1}{\sigma_{k+1/2}}\cdot\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_{k+1/2}}{h/2}+\frac{1}{4\pi\sigma_{k+1/2}}\cdot Q_{k+3/4}, \tag{14}$$

$$\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_{k+3/4}}{h/4}+\sigma_{k+1/2}\varphi_{k+1}=\frac{1}{4\pi}Q_{k+1}^-, \tag{15}$$

$$\sigma_{k+1/2}=\sigma(\xi_{k+1/2}), \quad h=\xi_{k+1}-\xi_k, \quad \xi_{k+1/2}=1/2(\xi_k+\xi_{k+1}),$$
$$Q_{k+1/2}=\frac{1}{2}(Q_k^+ + Q_{k+1}^-), \quad Q_{k+3/4}=\frac{3}{4}Q_{k+1}^- + \frac{1}{4}Q_k^+ . \tag{16}$$

Уравнение (13) есть аппроксимация уравнения 2-го порядка (10), уравнения (14)-(15) – аппроксимация граничного условия (11), а формулы (16) следуют из условия (12). Искомые значения сеточной функции в схеме (12)-(16) суть $\varphi_{k+1/2}$ и φ_{k+1}.

После решения системы уравнений (13)-(16) для всех сеточных направлений $\vec{\Omega}$ (простая итерация) вычисляются новые значения правых частей $Q(\xi,\vec{\Omega})$ для следующей итерации и строятся новые прямые линии (12), исходя из требований:

— наименьшего уклонения в той или иной норме значений Q_k^+, Q_{k+1}^- от значений Q_k, Q_{k+1},

— неотрицательности Q_k^+, Q_{k+1}^-,

— сохранения количества частиц в ячейке $(\xi_k,\ \xi_{k+1})$.

Положительность и монотонность схемы (12)-(16). Вводя обозначения

$$\hbar=\sigma\cdot h, \quad P=\frac{1}{4\pi\sigma}Q,$$

получаем из системы (13)-(16) и условия (12), что

$$\varphi_{k+1/2}=\frac{A}{B}\cdot\varphi_k+\frac{1}{B}\left(\frac{3\hbar}{8}+\frac{\hbar^2}{4}+\frac{3\hbar^3}{32}+\frac{\hbar^4}{64}\right)\cdot P_k^+ + \frac{1}{B}\left(\frac{\hbar}{8}+\frac{\hbar^2}{8}+\frac{\hbar^3}{32}+\frac{\hbar^4}{64}\right)\cdot P_{k+1}^-, \tag{17}$$

$$\varphi_{k+1} = \frac{1}{B}\cdot\varphi_k + \frac{1}{B}\left(\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar^2}{8}+\frac{\hbar^3}{32}\right)\cdot P_k^+ + \frac{1}{B}\left(\frac{\hbar}{2}+\frac{3\hbar^2}{8}+\frac{3\hbar^3}{32}+\frac{\hbar^4}{32}\right)\cdot P_{k+1}^-, \tag{18}$$

где

$$A = 1+\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar^2}{8}, \quad B = 1+\hbar+\frac{\hbar^2}{2}+\frac{\hbar^3}{8}+\frac{\hbar^4}{32}.$$

Из равенств (17), (18), с учетом условия (12), следует, что $\varphi_{k+1/2}\geq 0$, $\varphi_{k+1}\geq 0$, т.е. схема (12)-(16) положительна. Если $P(\xi,\vec{\Omega})\equiv 0$, то $\varphi_k>\varphi_{k+1/2}>\varphi_{k+1}$, т.е. схема (12)-(16) монотонна.

Консервативность схемы (12)-(16). Введем обозначение

$$\varphi_{k+1/4} = -\frac{1}{\sigma_{k+1/2}}\frac{\varphi_{k+1/2}-\varphi_k}{h/2} + \frac{1}{4\pi\sigma_{k+1/2}}Q_{k+1/4}. \tag{19}$$

Учитывая, что по условию (12)

$$\frac{Q_{k+1}^- - Q_k^+}{h} = \frac{Q_{k+3/4}-Q_{k+1/4}}{h/2},$$

получаем из уравнений (19), (13), (14) равенство:

$$\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{h} + \sigma_{k+1/2}\frac{\varphi_{k+1/4}+\varphi_{k+3/4}}{2} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q_{k+1/4}+Q_{k+3/4}}{2}, \tag{20}$$

которое есть уравнение баланса частиц в ячейке (ξ_k, ξ_{k+1}). В этом уравнении баланса потоки частиц на границах ячейки суть φ_k и φ_{k+1}, а количество поглощенных частиц в ячейке равно

$$\sigma_{k+1/2}\frac{\varphi_{k+1/4}+\varphi_{k+3/4}}{2}h. \tag{21}$$

Из уравнения баланса (20) следует, что схема (12)-(16) дивергентна относительно закона сохранения количества частиц при их переносе, и консервативна относительно закона сохранения вторичных частиц, если интеграл столкновений в источнике Q (см. (1)) рассчитывается согласованно с количеством столкновений (21).

Второй порядок аппроксимации и точности следует из формул (17), (18), в которых коэффициенты A и B суть аппроксимации экспонент:

$$e^{\hbar/2} = A + O(\hbar^3), \quad e^{\hbar} = B + O(\hbar^3).$$

Схема (12)-(16) тестировалась для уравнения переноса в плоско-параллельной геометрии. Расчеты показали её высокие практические свойства по точности и экономичности, в частности, по сравнению с монотонными схемами для уравнения 1-го порядка из [14,23].

5. Заключение

Предварительный анализ простейших разностных схем, получаемых предложенным методом для одномерных и двумерных уравнений переноса на четырехугольных сетках, показывает перспективность подхода и возможности построения качественно новых разностных схем. Использование метода Галеркина для аппроксимации задачи (4)-(6) автоматически обеспечивает положительность и самосопряженность сеточных операторов $O^h_{k\Omega}$ [12], а получаемое сеточное решение дает минимум квадратичному функционалу, отвечающему задаче (4)-(6) в каждом многограннике T_k.

Метод БТС 1-4 можно комбинировать с методом дополнительных интерполяционных соотношений [4,7,8] и особенно с методом искусственных ячеек [14].

Схемы типа (12)-(16) с успехом могут заменить разностно-аналитические схемы, применявшиеся в методах характеристик [3,4,15,16]. Такие схемы применимы также для решения уравнений метода сферических гармоник, если их преобразовать в уравнения гауссовых ординат [17].

Предложенный в данной работе общий подход для построения блочно-треугольных схем можно обобщить и на уравнение переноса 2-го порядка в форме Владимирова [2], если это уравнение рассматривать вместе с тем или иным вариантом уравнений дифференциальной прогонки вдоль направлений $\vec{\Omega}$, а также при определенных условиях — и на систему уравнений квазидиффузионного метода [18]. Однако конкретные реализации таких обобщений достаточно сложны и поэтому требуют отдельного рассмотрения.

Метод простой итерации (1″), (2′) для уравнений переноса 1-го порядка обычно комбинируется с алгоритмами ускорения сходимости простых итераций [3,4,19-22]. Этот подход является наиболее эффективным и при решении уравнений переноса 2-го порядка по блочно-треугольным схемам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Девисон Б.* Теория переноса нейтронов. - М.: Атомиздат, 1960, 520 с.
2. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Тр. Математического института АН СССР. - М.: Изд. АН СССР, 1961, 158 с.
3. *Марчук Г.И.* Методы расчета ядерных реакторов. - М.: Госатомиздат, 1961, 667 с.
4. *Басс Л.П., Волощенко А.М., Гермогенова Т.А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. ИПМ АН СССР. - М.: 1986, 231 с.
5. *Трощиев В.Е.* О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, №3, с.793-797.
6. *Софронов И.Д., Урм В.Я., Харитонов А.В.* О решении уравнения $\partial u/\partial t+\vec{\Omega}\cdot\mathrm{grad}\,u=0$ методом конечных разностей на нерегулярных сетках. Инф. бюлл.: "Численные методы механики сплошной среды." - Новосибирск: Наука, 1974, т.5, №2. с.116-135.
7. *Трощиев В.Е., Шумилин В.А.* Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1986, т.26, №2, с.230-241.
8. *Плетенева Н.П., Шагалиев Р.М.* Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном. // Вопр. атомн. науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1989, Вып.3, с.34-41.
9. *Серов С.Б.* Численное решение трехмерного кинетического уравнения в системах координат сферического и цилиндрического типов. // Вопр. атомн. науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1990, Вып.3, с.18-21.
10. *Алексеев А.В., Евдокимов В.В., Шагалиев Р.М.* Методика численного решения нестационарного трехмерного уравнения переноса частиц в комплексе Сатурн. // Вопр. атомн. науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1993, Вып.3, с.3-8.
11. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989, 616с.
12. *Стрэнг Г., Фикс Дж.* Теория методов конечных элементов. - М.: Мир, 1977, 349 с.
13. *Трощиев В.Е., Шагалиев Р.М.* Консервативные узловые схемы методов конечных разностей и конечных элементов для двумерного уравнения теплопроводности. // В сб.: Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1984, т.15, N4. с.131-157.

14. *Troshchiev V.E.* Difference schemes with traingular matrices on oblique-angled grids for two-dimensional transport equations. Methods of monotonization of schemes. // Intern. Sympozium " Numerical Transport Theory", Moscow, 1992, p. 248-251.
15. *Владимиров В.С.* Численное решение кинетического уравнения для сферы. // Вычислительная математика, 1958, №3, с.3-33.
16. *Никифорова А.В., Тарасов В.А., Трощиев В.Е.* О решении кинетических уравнений дивергентным методом характеристик. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1972, т.12, №4, с.1041-1048.
17. *Рихтмайер Р. Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. - М.: Мир, 1972, 418с.
18. *Гольдин В. Я.* Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения. // Журнал выч. мат. и мат. физ., 1964, т.4, №6, с.1078-1087.
19. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978, 590с.
20. *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. - М.: Атомиздат, 1981, 496с.
21. *Федотова Л.П., Шагалиев Р.М.* Конечно-разностный КМ-метод для двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении. // Математическое моделирование, 1991, т. 3, № 6, с.29-41.
22. *Елесин В.А., Трощиев В.Е., Юдинцев В.Ф.* Численное решение спектральных задач переноса теплового излучения итерационными методами поправок. В кн.: "Вопросы математического моделирования, вычислительной математики и информатики." - Сб. научных трудов к 90-летию со дня рождения академика Ю. Б. Харитона. - Москва - Арзамас-16: Минатом, 1994, с.206-228.
23. *Трощиев В. Е.* Эквивалентные аппроксимации для уравнений переноса 1-го и 2-го порядков. Препринт ТРИНИТИ №0029-А, 1996, 10с.

Поступила в редакцию 12.05.97.