УДК 514.763.6

ГЕОМЕТРИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

С. Х. Арутюнян

Задача построения геометрии интегралов впервые была поставлена Картаном [38] и в общем виде состояла в изучении дифференциально-геометрических структур, которые могут быть инвариантно присоединены к интегралу на многообразии интегрирования. Важную роль в этой области сыграли работы Кавагути [46], [47], который ввел в рассмотрение впоследствии названные его именем пространства. Несмотря на очень большое число работ, различные аспекты построения геометрической теории кратных интегралов разработаны еще не полностью (см., например, [40]). Обзор по этим исследованиям можно найти в работе В. И. Близникаса [8].

Аналогичная постановка задачи может быть сохранена и в случае кратных интегралов, зависящих от параметров, — исследование дифференциально-геометрических структур, определяемых заданием интеграла, на многообразии переменных интегрирования и параметров. При систематическом изучении таких интегралов, а также определяемых ими интегральных преобразований, возникает необходимость выделять свойства интегралов, не зависящие от выбора координат в многообразии, по которому ведется интегрирование, и в многообразии параметров. Далее, в теории интегральных преобразований представляют интерес свойства интегралов, которые сохраняются при умножении ядра на функцию только от переменных интегрирования или только от параметров:

$$K(x, y) \to f(x) g(y) K(x, y).$$

Задача выделения таких инвариантных свойств и соответствующей классификации интегралов типична для современной теории дифференциально-геометрических структур и может быть решена теми методами современных дифференциально-геометрических исследований, истоки которых восходят к Картану [39] и были распространены в СССР и существенно развиты С. П. Финиковым [32], Г. Ф. Лаптевым [16] и А. М. Васильевым [11], [12].

§ 1. ДВОЙНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И ПОЛУБАЗОВЫЕ ФОРМЫ

Рассмотрим n-кратный интеграл (вещественный)

$$I(y_1,\ldots,y_{n+s})=\int\ldots\int K(x^1,\ldots,x^n,y_1,\ldots,y_{n+s})\,dx^1\ldots dx^n, \qquad (1)$$

зависящий от $n+s$ параметров $y_1,\ldots,y_{n+s}$. Подынтегральной форме можно поставить в соответствие внешнюю дифференциальную форму степени n:

$$\Omega=Kdx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$$

на $(2n+s)$-мерном гладком многообразии переменных интегрирования и параметров M. Это многообразие имеет структуру двойного расслоения: задано два гладких отображения π_1 и π_2 многообразия M на n- и $(n+s)$-мерные гладкие многообразия M_1 и M_2, слои расслоения, т. е. полные прообразы точек из M_1 и M_2 при отображениях π_1 и π_2, являются соответственно $(n+s)$- и n-мерными гладкими многообразиями, и, наконец, касательные пространства к слоям расслоений π_1 и π_2 имеют лишь нулевое пересечение:

$$T_p(\pi_1^{-1}(x))\cap T_p(\pi_2^{-1}(y))=\{p\},\ \pi_1(p)=x,\ \pi_2(p)=y,\ x\in M_1,\ y\in M_2.$$

Таким образом, вместо интеграла (1) можно рассматривать двойное расслоение M и на нем внешнюю дифференциальную форму Ω.

Зафиксируем в касательном пространстве $T_p(M)$ в каждой точке координатной области произвольной карты на M с локальными координатами $x^1,\ldots,x^n$, $y_1,\ldots,y_{n+s}$ натуральный репер $\{p,\ (e_i)_0,\ (e^\alpha)_0\}$ (здесь и далее латинские индексы принимают значения $1,\ldots,n$, а греческие индексы α, β — $1,\ldots$ $\ldots,n+s$). Тогда действуя на базисные векторы этого репера всевозможными элементами соответственно групп $\mathrm{GL}(n,R)$ и $\mathrm{GL}(n+s,R)$, получим совокупность всех касательных реперов в каждой точке $p\in M$:

$$\begin{cases} e_l=\tilde{x}_l^k(e_k)_0, \\ e^\alpha=\tilde{y}_\beta^\alpha(e^\beta)_0, \end{cases}$$

где новые переменные $\tilde{x}_l^k$ и $\tilde{y}_\beta^\alpha$ не зависят от ранее введенных координат и друг от друга, причем $\det(\tilde{x}_l^k)\neq 0$, $\det(\tilde{y}_\beta^\alpha)\neq 0$.

Образуем линейные дифференциальные формы

$$\begin{cases} \omega^l=x_k^l dx^k, \\ \omega_\alpha=y_\alpha^\beta dy_\beta, \end{cases} \qquad (2)$$

где через x_k^l и y_α^β обозначены элементы матриц, обратных соответственно к матрицам $(\tilde{x}_l^k)$ и $(\tilde{y}_\beta^\alpha)$ [10]. Итак, в каждом касательном пространстве к слою первого и второго расслоений имеется базис, который преобразуется элементами полной линейной группы соответствующего порядка. В результате на многообразии M возникает подвижной репер, n векторов которого в каждой точке составляют базис касательного пространства к слою расслоения π_2 в этой точке, а остальные $n+s$ векторов играют аналогичную роль в касательном пространстве слоя расслоения π_1 в этой же точке, и система заданных на многообразии касательных реперов $M^{(1)}$ локальных дифференциальных форм $\omega^1, \ldots, \omega^n, \omega_1, \ldots, \omega_{n+s}$, не зависящих от выбора карты. Отметим, что эти формы можно считать заданными на всем многообразии M [11]. Задание этих главных форм определяет двойное расслоение M следующим образом. Слои расслоения π_1 являются интегральными многообразиями максимальной размерности для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\omega^i=0, \quad i=1, \ldots, n,$$

а слои второго расслоения π_2 находятся в аналогичном отношении с вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа

$$\omega_\alpha=0, \quad \alpha=1, \ldots, n+s.$$

Внешняя дифференциальная форма степени k на многообразии двойного расслоения называется полубазовой формой первого (второго) расслоения, если она обращается в нуль на всех множествах из k векторов, хотя бы один из которых нетривиально разлагается по векторам базиса касательного пространства к слою первого (второго) расслоения. Нетрудно видеть, что внешняя n-форма Ω, которую в силу (2) можно представить в виде

$$\Omega=\lambda\omega^1\wedge\omega^2\wedge\ldots\wedge\omega^n, \quad \text{где } \lambda=K\cdot\det(\tilde{x}_i^k),$$

будет полубазовой n-формой первого расслоения, если потребовать, чтобы она была формой на M. Это означает следующее. Вообще говоря, форма Ω имеет скалярный коэффициент λ. При изменении репера функция λ меняется. Форма же Ω при этом меняться не должна. Нетрудно видеть, что внешняя n-форма Ω определяет гладкую меру (объем) на каждом слое расслоения π_2.

Исходные структурные уравнения многообразия M имеют вид

$$d\omega^i=\omega_k^i\wedge\omega^k,$$

$$d\omega_\alpha=-\tilde{\omega}_\alpha^\beta\wedge\omega_\beta,$$

где вторичные формы ω_k^i, $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ определены на многообразии реперов второго порядка, присоединенных к M. Из условия инвариантности формы Ω вытекает [1]

$$d \ln \lambda + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^i = \lambda_i \omega^i + \lambda^\alpha \omega_\alpha. \qquad (3)$$

Форма $\varphi = \lambda^\alpha \omega_\alpha$ является формой на M; она однозначно определяется следующими условиями: 1) $d\Omega = \varphi \wedge \Omega$, 2) φ обращается в нуль на слоях второго расслоения. Дифференциал φ при условии максимальности ранга приводится к виду

$$d\varphi = \omega^i \wedge \omega_i. \qquad (4)$$

Таким образом, интеграл (1) порождает на многообразии M билинейную форму (4), причем однозначно. Форма (4), в свою очередь, определяет интеграл (1), но не однозначно, а с произволом $\tilde{\lambda} = \lambda P(x^1, \ldots, x^n) Q(y_1, \ldots, y_{n+s})$. Роль интеграла (1) состояла в получении формы (4), дальнейшие рассмотрения существенно используют выражение (4).

До сих пор s было произвольным. Будем рассматривать три важных случая: $s=0$, $s=1$, $s=\frac{1}{2}\, n(n+1)$.

§ 2. ГЕОМЕТРИЯ n-КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ n ПАРАМЕТРОВ

Случай $s=0$ является основным и наиболее содержательным. Здесь выделяются основные дифференциально-геометрические структуры, связанные с n-кратными интегралами, зависящими от n параметров (вещественными аналогами некоторых классов интегральных преобразований), ставятся некоторые естественные задачи.

Структурные уравнения. Заметим сначала, что форма (4) является невырожденной билинейной формой на $2n$-мерном многообразии M. Ей можно взаимно однозначно сопоставить симметричную невырожденную форму

$$ds^2 = \omega^i \cdot \omega_i,$$

которая задает на M знаконеопределенную метрику и определяет в конечном счете все инвариантные относительно произвольной гладкой замены переменных и параметров свойства класса интегралов $\{f(x) g(y) J\}$.

Структурные уравнения многообразия двойного расслоения переменных и параметров M приводятся к виду [1]

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega_k{}^i \wedge \omega^k, \\ d\omega_i = -\omega_i{}^k \wedge \omega_k, \\ d\omega_k{}^i = \omega_p{}^i \wedge \omega_k{}^p + K_{kp}{}^{ir} \omega^p \wedge \omega_r, \end{cases} \qquad (5)$$

где величины $K_{kp}{}^{ir}$ симметричны по парам верхних и нижних индексов и в совокупности образуют тензор кривизны многообразия M. Вторичные формы $\omega_k{}^i$ заданы на некотором подмногообразии многообразия реперов второго порядка $M^{(2)}$. Особое строение формы $d\varphi$ (первый множитель зависит только от дифференциалов $dx^1, \ldots, dx^n$, а второй сомножитель — от $dy_1, \ldots$ $\ldots, dy_n$) означает, что если форму $d\varphi$ привести к каноническому виду, то число «положительных» и «отрицательных» квадратов будет одинаковым — n. Таким образом, двойное расслоение M является $2n$-мерным псевдоримановым пространством с метрикой нулевой сигнатуры. Структура M определяет структуру касательного пространства к M, которое распадается в прямую сумму двух n-мерных подпространств.

Пространства Широкова — Рашевского. В 1925 г. П. А. Широков [33] и в 1933 г. Кэлер [44] рассмотрели специальный класс четномерных симметрических пространств, впоследствии названных эллиптическими A-пространствами [14].

На $2n$-мерном многообразии M координаты $x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$ таковы, что при всех допустимых преобразованиях координат координаты $x^1, \ldots, x^n$ преобразуются между собой, а $y_1, \ldots, y_n$ — между собой. Рассмотрим некоторую вещественную керн-функцию $U(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n)$ и введем величины

$$g_j^i=\frac{\partial^2 U}{\partial x^j \partial y_i}.$$

Нетрудно проверить, что матрица

$$G=\begin{pmatrix} 0 & g_j^i \\ g_i^j & 0 \end{pmatrix}$$

сохраняет свою структуру при любых допустимых преобразованиях координат. В силу невырожденности матрицы G, ее элементы задают некоторую метрику на M. Она, в свою очередь, задает на M аффинную связность. В эллиптическом случае слои двойного расслоения из разных семейств являются комплексно-сопряженными.

Так называемый гиперболический случай, когда оба семейства слоев являются вещественными, был с несколько иной точки зрения исследован П. К. Рашевским [24]. На многообразии двойного расслоения M (названном расслоённым пространством) рассматривается инвариантное скалярное поле $U=$ $=U(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n)$ с невырожденной матрицей вторых частных производных

$$\det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial y_j}\right)\neq 0$$

и с ее помощью на M задается псевдориманова метрика индекса n и соответствующая псевдориманова связность. Эти пространства обладают следующими свойствами:

1. Скалярное поле $U(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n)$, задающее на многообразии M данную структуру псевдориманова пространства, определяется с точностью до преобразования

$$U(x^i, y_i) \to U(x^i, y_i) + U_1(x^i) + U_2(y_i).$$

2. Через каждую точку многообразия M проходит один и только один слой каждого из двух семейств; слои разных семейств пересекаются не более чем в одной точке.

3. Слои обоих семейств изотропны.

4. Слои каждого семейства обладают свойством абсолютного автопараллелизма: векторы, касательные к слоям данного семейства, остаются к ним касательными при параллельном переносе вдоль любого пути.

Из каждого из двух последних свойств следует полная геодезичность обоих семейств слоев в M.

Промежуточный случай параболических A-пространств был изучен В. В. Вишневским [14].

Все три типа этих пространств стали объектом детального изучения [18], [20], [25], [34]. Отметим работу Б. А. Розенфельда [26], который показал, что эллиптические A-пространства Широкова и гиперболические A-пространства Рашевского являются вещественными реализациями унитарных пространств специального типа соответственно над алгебрами комплексных и двойных чисел. Класс симметрических гиперболических A-пространств был подробно исследован в работах А. С. Феденко [30], [31]. Связность на M под названием полуортогональной инволютивной связности изучал Роска [49]. Различным обобщениям A-пространств посвящены работы [13], [17], [22], [23]. Отметим, наконец, что A-пространства являются специальным случаем пространств декартовой композиции [19]. Будем называть их пространствами Широкова — Рашевского.

Метрика $2n$-мерного пространства Широкова—Рашевского имеет нулевую сигнатуру и тем самым справедлива [1] основная

Теорема 1. Задание n-кратного интеграла, зависящего от n параметров (или, что то же самое, задание на $2n$-мерном многообразии двойного расслоения M внешней n-формы Ω, полубазовой на слоях одного из расслоений), при условии невырожденности билинейной формы (4) определяет на M структуру гиперболического пространства Широкова — Рашевского.

Задача об отыскании интегралов полубазовых n-форм, определяющих на M заданную псевдориманову метрику индекса n, равносильна задаче отыскания скалярного поля $U(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n)$, определяющего ту же метрику.

Обращение интеграла. Основная теорема означает, что с n-кратным интегралом (1) $(s=0)$, зависящим от n параметров, при некотором вполне естественном условии невырожденности связывается вполне определенная дифференциально-геометрическая структура. Рассмотрим следующую задачу.

Пусть на $2n$-мерном многообразии двойного расслоения M задана полубазовая n-форма первого расслоения Ω_1 с соответствующей невырожденной билинейной формой $d\varphi_1$. Форма объема на пространстве Широкова — Рашевского имеет вид

$$\tilde{\Omega}=\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^n\wedge\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_n.$$

Выделим среди множества внешних форм вида $\mu\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_n$ полубазовую n-форму Ω_2 второго расслоения π_2 с соответствующей невырожденной билинейной формой $d\varphi_2$ таким образом, чтобы

$$\tilde{\Omega}=\Omega_1\wedge\Omega_2 \qquad (6)$$

и найдем условия, при которых формы Ω_1 и Ω_2 порождают на M структуру одного и того же пространства Широкова — Рашевского. Иными словами, для задающей интеграл полубазовой n-формы Ω_1 ищется форма Ω_2 такого же типа, но с заменой многообразия переменных на многообразие параметров, определяющая на M ту же псевдориманову метрику, что и Ω_1, причем $\tilde{\Omega}=\Omega_1\wedge\Omega_2$ — форма объема этой метрики. Справедлива [1]

Теорема 2. Пусть на многообразии двойного расслоения M полубазовые n-формы Ω_1 и Ω_2 первого и второго расслоений определяют одну и ту же псевдориманову метрику индекса n, в которой форма объема имеет вид (6). Тогда пространство Широкова — Рашевского является пространством Эйнштейна. Обратно, на пространстве Широкова — Рашевского, удовлетворяющем уравнению Эйнштейна

$$G_{ij}=KR_{ij}, \qquad K=\text{const},$$

где R_{ij} — тензор Риччи, существуют формы Ω_1 и Ω_2 с вышеуказанными свойствами.

Геометрии пространств Эйнштейна, т. е. римановых пространств, тензор Риччи которых пропорционален (с постоянным коэффициентом) метрическому тензору, посвящено большое число работ. Здесь следует отметить работу А. З. Петрова [21], в которой приводится классификация пространств Эйнштейна. Интенсивные исследования двух последних десятилетий достаточно полно отражены в монографии Бессе [37]. Особый интерес представляют работы по геометрии четномерных пространств Эйнштейна с метрикой половинного индекса, а также пространств с нулевым тензором Риччи (Риччи-плоские пространства). Здесь полезны работа [47], в которой построена классификация тензора Риччи, аналогичная классификации А. З. Петрова для тензора Вейля [48] и работа [36], в которой рассматриваются необходимые и достаточные условия того, чтобы риманово многообразие, рассматриваемое в заданном классе функций C^k, было пространством Эйнштейна, причем полученный критерий носит локальный характер, не зависит от сигнатуры метрики, но предполагает замкнутость многообразия. Локальная классификация пространств Эйнштейна с нулевым тензором Риччи с точки зрения алгебраической структуры тензора кривизны построена в [43]. В двух работах Эйзенхарта [41], [42] рассматривается случай нулевого скаляра Риччи ($R_{ii}=0$), который связан с так называемым случаем симметрических гравитационных волновых решений уравнений эйнштейновых полей.

Обратная задача. Канонический интеграл. Из теорем 1 и 2 следует, что задание некоторых классов обратимых n-кратных интегралов, зависящих от n параметров, порождает на $2n$-мерном многообразии двойного расслоения переменных интегрирования и параметров M структуру пространства Эйнштейна с метрикой индекса n. Сам по себе напрашивается вопрос о структуре этих интегралов. Иными словами, естественно поставить задачу о выделении классов n-кратных интегралов, зависящих от n параметров, которые порождают на M структуру данного пространства Эйнштейна допустимого типа.

Проиллюстрируем решение этой задачи в простейшем случае $2n$-мерного псевдоевклидова пространства $E_{2n}{}^{n}$. Тогда тензор кривизны нулевой и структурные уравнения многообразия M принимают вид

$$d\omega^i=\omega_k{}^i\wedge\omega^k,\quad d\omega_i=-\omega_i{}^k\wedge\omega_k,\quad d\omega_k{}^i=\omega_p{}^i\wedge\omega_k{}^p. \qquad (5')$$

Из этих уравнений видно, что система дифференциальных уравнений $\omega_k{}^i=0$, $i, k=1, \ldots, n$, вполне интегрируема. Она выделяет подмногообразие параллельных реперов на M. Тогда из условий $d\omega^i=0$, $d\omega_i=0$, $i=1, \ldots, n$, получаем, что формы ω^i, ω_i являются соответственно дифференциалами переменных и параметров:

$$\omega^i=dx^i, \qquad \omega_i=dy_i.$$

Уравнение (3) приводится к виду

$$d\ln\lambda=\lambda_i\omega^i+\lambda^i\omega_i, \qquad (3')$$

причем в данном случае с использованием выражений дифференциалов коэффициентов λ^i и λ_i можно доказать, что

$$\lambda^i=A^i(y_1, \ldots, y_n)+x^i,$$
$$\lambda_i=A_i(x^1, \ldots, x^n)+y_i,$$

где A^i и A_i суть некоторые гладкие функции на слоях первого и второго расслоений π_1 и π_2. Подставляя эти выражения в (3') и интегрируя, получаем

$$\Omega_1=P(x)\,Q(y)\exp(x^iy_i)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n, \qquad (7)$$

где $P(x)=P(x^1, \ldots, x^n)$ и $Q(y)=Q(y_1, \ldots, y_n)$ являются экспонентами интегралов линейных дифференциальных форм $A_i(x^1, \ldots, x^n)dx^i$ и $A^i(y_1, \ldots, y_n)dy_i$. При этом

$$\Omega_2=\frac{1}{P(x)\,Q(y)}\exp(-x^iy_i)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n. \qquad (7')$$

Таким образом, имеет место

Теорема 3. Всякий n-кратный интеграл (1), зависящий от n параметров, который порождает на многообразии переменных интегрирования и параметров M структуру $2n$-мерного псевдориманова пространства Широкова — Рашевского, может быть приведен к интегралу от формы вида (7).

Этим выяснен внутренний геометрический смысл интегралов типа Лапласа — Фурье. Интегралы, приводящие к метрикам Эйнштейна, следует считать естественным обобщением интегралов такого типа. Установленную теоремой 3 связь между вещественным аналогом интеграла Фурье и структурой псевдоевклидова пространства можно закрепить следующим образом.

Определение. n-кратный интеграл, зависящий от параметров, называется каноническим интегралом данной дифференциально-геометрической структуры, если он порождает эту структуру на многообразии двойного расслоения переменных интегрирования и параметров.

В теории интегральных преобразований Фурье одной из интересных считается задача о расширении области, на которой может быть изложена теория интеграла Фурье. Теорема 2 указывает на точную границу этих обобщений — пространства Эйнштейна указанного типа.

§ 3. КАНОНИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Теоремы 1 и 3 в сочетании с произволом, с которым дифференциально-геометрическая структура присоединяется к интегралу (1) ($s=0$), показывают, что интегралы от форм вида (7) являются простейшими представителями некоторого достаточно обширного семейства n-кратных интегралов, зависящих от n параметров, и занимают в этом семействе место, соответствующее положению псевдоевклидова пространства $E_{2n}{}^{n}$ в семействе псевдоримановых пространств с метрикой нулевой сигнатуры. Поэтому весьма заманчиво попытаться выделить канонические интегралы некоторых псевдоримановых пространств рассматриваемого типа с ненулевым тензором кривизны.

Проще всего эту задачу рассмотреть на примере некоторых пространств постоянной кривизны, например, симметрических пространств нуль-пар n-мерного вещественного проективного пространства и пар точек n-мерного конформного пространства. Отметим, что симметрические пространства рассматриваемого типа с простыми группами движений найдены А. С. Феденко [31].

Канонический интеграл пространства нуль-пар RP^n. Одним из преимуществ этого пространства пар точек и гиперплоскостей в RP^n является то, что в отличие от обычного проективного пространства оно является метрическим. Более того, в пространства нуль-пар можно ввести проективно-инвариантную метрику, относительно которой они являются симметрическими пространствами. Подробное изучение геометрии этих пространств было проведено Б. А. Розенфельдом [27].

Если в структурных уравнениях пространства Широкова — Рашевского положить

$$K_{ml}^{ir} = K\left(\delta_m^i \delta_l^r + \delta_l^i \delta_m^r\right),$$

где при $n>1$ $K=\mathrm{const}$, то устанавливается эйнштейновость этого пространства (см. также [29]) и его изоморфность пространству нуль-пар в RP^n. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты λ^i и λ_i из (3), приводятся к виду

$$\begin{cases} d\lambda^i - \lambda^k \omega_k^i = p\omega^i - \dfrac{K}{p} \lambda^l \lambda^k \omega_k, \\ d\lambda_i + \lambda_k \omega_i^k = -\dfrac{K}{q} \lambda_i \lambda_k \omega^k + q\omega_i, \end{cases} \tag{8}$$

где постоянные величины p, q связаны с K соотношением

$$p-q=K(n+1). \tag{9}$$

Если теперь зафиксировать в RP^n некоторую точку

$$e=x^i e_i + x^0 e_0$$

и гиперплоскость

$$u_i x^i + u_0 x^0 = 0,$$

где $u_1, \ldots, u_n, u_0$ — тангенциальные координаты этой гиперплоскости, то в результате будет установлена

Теорема 4 ([5]). Каждое решение системы дифференциальных уравнений (8) задает интеграл, определяющий геометрию многообразия нуль-пар n-мерного проективного пространства RP^n. При данных p, q, удовлетворяющих условию (9), множество решений системы (8) находится во взаимно однозначном соответствии с парами «точка — гиперплоскость» в RP^n. В частности, условие

$$\lambda^i \lambda_i = \frac{pq}{K}$$

выделяет решение, которому соответствуют пары инцидентных точек и гиперплоскостей.

При $n>1$ имеет место.

Теорема 5 ([5]). Геометрия пространства нуль-пар (точка и гиперплоскость инцидентны) порождается на многообразии двойного расслоения M интегралом формы

$$\Omega_1 = \frac{c\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n}{(x^0 y_0 + x^1 y_1 + \ldots + x^n y_n)^\gamma},$$

где $\gamma = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$, причем $x^0 = 1$, $y_n = 1$.

При $n=1$ (см. также [12]) геометрия пар совпадающих точек проективной прямой определяется интегралом формы вида

$$\Omega = \frac{dx}{(x-y)^\gamma}, \quad \gamma = \mathrm{const}.$$

Канонический интеграл пространства пар точек конформного пространства. Перейдем теперь к случаю, когда

$$K^{lr}_{ml} = K\left(\delta^l_m \delta^r_l + \delta^l_l \delta^r_m - \delta^{lr}\delta_{ml}\right),$$

где K — некоторая постоянная. Структурные уравнения принимают вид

$$\begin{cases} d\omega^l = \omega^l_k \wedge \omega^k, \\ d\omega_l = -\omega^k_l \wedge \omega_k, \\ d\omega^l_k = \omega^l_p \wedge \omega^p_k + K\omega^l \wedge \omega_k + K\delta^l_k \omega^m \wedge \omega_m - K\omega^k \wedge \omega_l. \end{cases} \quad (5'')$$

Многообразие M изоморфно n-мерному конформному пространству C^n [15]. В этом случае многообразие M реализуется в виде пространства пар точек C^n, причем в отличие от предыдущего случая имеет одинаково устроенные слои: типовым слоем как первого, так и второго расслоения является n-мерное конформное пространство с фиксированной точкой.

Если в конформном пространстве C^n зафиксировать две точки [4]

$$\tilde{e}_1 = e_0 + A^l e_l + A^{n+1} e_{n+1},$$

$$\tilde{e}_2 = A_{n+1} e_0 + A_l e_l + e_{n+1},$$

то аналогично теореме 4 может быть доказана

Теорема 6 ([4]). Каждое решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} d\lambda^l - \lambda^k \omega^l_k = p\omega^l - \dfrac{K}{p}\lambda^l \lambda^m \omega_m + H\omega_l, \\ d\lambda_l + \lambda_k \omega^k_l = -\dfrac{K}{q}\lambda_l \lambda_m \omega^m + P\omega^l + q\omega_l, \end{cases} \quad (10)$$

где величины H и P удовлетворяют уравнениям

$$dH+\frac{H}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^i-K\lambda^i\omega^i=-\frac{KH}{p}\lambda^i\omega_i-\frac{H}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^i,$$
$$dP-\frac{P}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^i-K\lambda_i\omega_i=-\frac{KP}{q}\lambda_i\omega^i+\frac{P}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^i, \tag{11}$$

задает интеграл, определяющий на M геометрию многообразия пар точек n-мерного конформного пространства C^n. При заданных p и q, удовлетворяющих условию

$$p-q=nK,$$

множество решений системы (10)—(11) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством пар точек пространства C^n. В частности, при $A^{n+1}=A_{n+1}=1$, $A^i=A_i$, $i=1, \ldots, n$, получаются интегралы, соответствующие парам совпадающих точек.

Следующая теорема аналогична теореме 5

Теорема 7 ([4]). Геометрия пар совпадающих точек n-мерного конформного пространства порождается на многообразии двойного расслоения M интегралом формы вида

$$\Omega=\frac{c\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n}{[(x^1-y_1)^2+\ldots+(x^n-y_n)^2]^\gamma},$$

где c и γ суть некоторые постоянные.

О геометрии пространства p-пар RP^n. Аналогичная программа может быть реализована и для пространства p-пар n-мерного проективного пространства RP^n.

Нетрудно проверить, что уравнения

$$\begin{cases} d\omega_\alpha^\lambda=\omega_\mu^\lambda\wedge\omega_\alpha^\mu+\omega_\beta^\lambda\wedge\omega_\alpha^\beta,\\ d\omega_\lambda^\alpha=\omega_\mu^\alpha\wedge\omega_\lambda^\mu+\omega_\beta^\alpha\wedge\omega_\lambda^\beta,\\ d\omega_\mu^\lambda=\omega_\nu^\lambda\wedge\omega_\mu^\nu+\omega_\beta^\lambda\wedge\omega_\mu^\beta,\\ d\omega_\beta^\alpha=\omega_\mu^\alpha\wedge\omega_\beta^\mu+\omega_\gamma^\alpha\wedge\omega_\beta^\gamma \end{cases} \tag{12}$$

являются частным случаем уравнений (5) со следующей заменой обозначений:

$$\omega^i\to\omega_\alpha^\lambda,\quad \omega_i\to\omega_\lambda^\alpha,\quad \omega_k^i\to\delta_\beta^\alpha\omega_\mu^\lambda-\delta_\mu^\lambda\omega_\beta^\alpha,$$
$$K_{pq}^{ir}\to K\left(\delta_\nu^\lambda\delta_\mu^\rho\delta_\varepsilon^\gamma\delta_\beta^\alpha+\delta_\varepsilon^\alpha\delta_\nu^\rho\delta_\beta^\gamma\delta_\mu^\lambda\right),$$

где индексы λ, μ, ν, ρ принимают значения $1, \ldots, p+1$, $p<$ $<n-1$, а индексы α, β, γ, ε меняются в пределах значений от $p+2$ до $n+1$.

Система (12) соответствует геометрии пар элементов RP^n: первым элементом p-пары является p-плоскость, а вторым элементом — $(n-p-1)$-плоскость [27].

Если на многообразии p-плоскостей RP^n, где зафиксирована дополнительная $(n-p-1)$-плоскость (расслоение π_1) рассмотреть полубазовую форму

$$\Omega = a\omega_1^{p+2} \wedge \ldots \wedge \omega_{p+1}^{p+2} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{n+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{p+1}^{n+1},$$

то для нее уравнение (3) примет вид

$$d \ln a + (p+1) \sum_{\alpha=p+2}^{n+1} \omega_\alpha^\alpha - (n-p-1) \sum_{\nu=1}^{p+1} \omega_\nu^\nu = a_\alpha^\lambda \omega_\lambda^\alpha + a_\lambda^\alpha \omega_\alpha^\lambda.$$

Если в RP^n рассмотреть две пары плоскостей $\{e_\lambda, e_\alpha\}$, $\{P_\lambda, P_\alpha\}$, где

$$P_\lambda = e_\lambda + A_\lambda^\alpha e_\alpha, \quad P_\alpha = e_\alpha + A_\alpha^\lambda e_\lambda,$$

и зафиксировать вторую пару, то будет справедлива

Теорема 8. Каждое решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} da_\alpha^\lambda + a_\beta^\lambda \omega_\alpha^\beta - a_\alpha^\nu \omega_\nu^\lambda = -\dfrac{K}{p} a_\beta^\lambda a_\alpha^\nu \omega_\nu^\beta + p\omega_\alpha^\lambda, \\ da_\lambda^\alpha + a_\nu^\alpha \omega_\lambda^\nu - a_\lambda^\beta \omega_\beta^\alpha = q\omega_\lambda^\alpha - \dfrac{K}{q} a_\nu^\alpha a_\lambda^\beta \omega_\beta^\nu \end{cases} \tag{13}$$

задает интеграл, определяющий геометрию пространства p-пар n-мерного проективного пространства над R. При данных постоянных p, q, удовлетворяющих условию

$$p - q = -nK,$$

множество решений системы (13) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством пар «p-плоскость — $(n-p-1)$-плоскость» в RP^n. В частности, эти плоскости могут пересекаться.

§ 4. ГЕОМЕТРИЯ n-КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ $n+s$ ПАРАМЕТРОВ ($s=\frac{1}{2}n(n+1)$)

Как уже отмечалось, задача выделения канонических интегралов рассмотренных симметрических пространств Широкова — Рашевского была вызвана необходимостью выхода из пределов соответствующего псевдоевклидова пространства и нахождения соответствующих более общих ядер. Несмотря на то, что при этом были обнаружены представляющие несомненный интерес вещественные аналоги ядер Коши — Гильберта, основная цель не может считаться достигнутой. Для получения прямых обобщений ядра $\exp(x^i y_i)$ необходимо рассмотреть более общий случай, когда в интеграле число переменных не равно числу параметров.

Рассмотрим случай n-кратного интеграла, зависящего от $n+\frac{1}{2}n(n+1)$ параметров [2]. В этом случае, как и при $s=0$, внешняя n-форма $\Omega_1=\lambda\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^n$ задает гладкую меру (объем) на каждом слое второго расслоения π_2 и обращается в нуль на всех множествах из n векторов, хотя бы один из которых лежит в касательном пространстве к $(n+\frac{1}{2}n(n+1))$-мерному слою первого расслоения π_1, т. е. является полубазовой n-формой первого расслоения. Внешний дифференциал линейной формы $\varphi=\lambda^\alpha\omega_\alpha$ приводится опять-таки к виду (4), но здесь вместо невырожденности приходится говорить об условии максимальности ранга $d\varphi$: на M форма $d\varphi$ вырожденна.

Структурные уравнения $(2n+\frac{1}{2}n(n+1))$-мерного многообразия двойного расслоения M приводятся к виду

$$\begin{cases} d\omega^i=\omega^i_k\wedge\omega^k, \\ d\omega_i=-\omega^k_i\wedge\omega_k+\omega_{ik}\wedge\omega^k, \\ d\omega_{ik}=\omega_{ip}\wedge\omega^p_k+\omega_{pk}\wedge\omega^p_i+A^{rs}_{ikp}\omega_{rs}\wedge\omega^p-C^p_{ikr}\omega^r\wedge\omega_p- \\ -C^{prs}_{ik}\omega_{rs}\wedge\omega_p-C^{[pr]}_{ik}\omega_r\wedge\omega_p, \\ d\omega^i_k=\omega^i_p\wedge\omega^p_k+C^i_{k[pr]}\omega^r\wedge\omega^p+C^{ir}_{kp}\omega_r\wedge\omega^p+C^{irs}_{kp}\omega_{rs}\wedge\omega^p, \end{cases} \tag{14}$$

где коэффициенты A^{rs}_{ikp} симметричны по верхним и нижним индексам и удовлетворяют условиям $A^{rp}_{ikp}=0$. Здесь слои расслоения π_2 задаются системой уравнений $\omega_i=0$, $\omega_{ik}=0$, $i, k=1, \ldots, n$, так что главные формы ω_{ik}, где $\omega_{ik}=\omega_{ki}$, входят в базис главных форм на M. Имеет место [2]

Теорема 9. Пусть n-кратный интеграл, зависящий от $\frac{1}{2}n(n+3)$ параметров, порождает на многообразии двойного расслоения переменных интегрирования и параметров M билинейную форму максимального ранга (4). Тогда на M существует инвариантно присоединенная к интегралу аффинная связность, определяемая формами ω^i, ω_i, ω_{ik}, $\omega_k{}^i$ $(i, k=1, \ldots, n)$, заданными на некотором подрасслоении расслоения касательных реперов на M и удовлетворяющими структурным уравнениям (14). Относительно этой связности расслоения π_1 и π_2 обладают свойством абсолютного автопараллелизма: векторы, касательные к слоям, остаются касательными и после параллельного переноса вдоль любого гладкого пути.

Можно доказать [2], что если величины A^{rs}_{ikp} равны нулю, то все коэффициенты C^i_{kpr}, C^{ir}_{kp}, C^{irs}_{kp} обращаются в нуль. Геометрически условие обращения в нуль тензорных величин A^{rs}_{ikp} выделяет случай аффинной связности с нулевой кривизной (кручение же этой связности, как следует из структурных уравнений форм ω_i, отлично от нулевого). Но в то же время геометрический смысл величин A_{ikp}^{rs} не сводится к обобщенной кривизне многообразия M: обращение в нуль величин C_{kpr}^{i}, C_{kp}^{ir}, C_{kp}^{irs}, в совокупности образующих тензор кривизны, не влечет условия $A_{ikp}^{rs}=0$.

В случае $A_{ikp}^{rs}=0$ параллелизуемость многообразия касательных реперов, присоединенных к M, дает возможность выделить канонический интеграл соответствующей дифференциально-геометрической структуры. Имеет место

Теорема 10. Если n-кратный интеграл, зависящий от $\frac{1}{2}n(n+3)$ параметров, порождает на многообразии двойного расслоения переменных интегрирования и параметров M билинейную форму максимального ранга (4), причем $A_{ikp}^{rs}=0$, то он приводится к интегралу от полубазовой формы вида

$$\Omega=P(x)\,Q(y,u)\exp\left(x^i y_i-\frac{1}{2}x^i x^k u_{ik}\right)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n. \quad (15)$$

Можно догадаться, что дополнительная (по сравнению с формулой (6)) часть в экспоненте связана с наличием кручения связности.

Ранее при обсуждении условий теоремы 2 наряду с полубазовой n-формой первого расслоения Ω_1, построенной на переменных, рассматривалась и полубазовая n-форма второго расслоения Ω_2, построенная на параметрах, такая, что подходящим образом выбранная форма объема всего многообразия двойного расслоения имела вид $\Omega_1\wedge\Omega_2$, причем Ω_1 и Ω_2 определяли одну и ту же геометрию на M (пространство Эйнштейна). Аналогичное построение может быть сделано и в общем случае. Имеет место

Теорема 11 ([6]). Если n-кратный интеграл, зависящий от $n+s$ параметров, порождает на многообразии двойного расслоения переменных интегрирования и параметров M некоторую геометрию, то для того чтобы форма объема многообразия M могла быть представлена в виде $\Omega_1\wedge\Omega_2$, где Ω_2 — некоторая полубазовая $(n+s)$-форма второго расслоения, порождающая на M ту же самую геометрию, необходимо и достаточно, чтобы форма $\omega_1^1+\omega_2^2+\ldots+\omega_n^n$ была замкнутой.

В данном случае $\left(s=\frac{1}{2}n(n+1)\right)$ условие замкнутости формы ω_i^i равносильно соотношениям [6]

$$C_{i[kp]}^{i}=C_{ip}^{irs}=C_{ip}^{ir}=0.$$

§ 5. ГЕОМЕТРИЯ n-КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ $n+1$ ПАРАМЕТРОВ

На первый взгляд рассмотрение случая $s=1$ не должно существенно отличаться от предыдущего. На самом же деле единым оказывается лишь метод исследования, результаты же, особенно в геометрической части, существенно различны.

При получении структурных уравнений $(2n+1)$-мерного многообразия M вводится [3] несколько новых обозначений:

$$\omega=\omega_{n+1}, \quad \omega_0^0=\tilde{\omega}_{n+1}^{n+1}, \quad \omega_0^i=\omega_{n+1}^i, \quad \tilde{\omega}_i^0=\tilde{\omega}_i^{n+1}.$$

и доказывается, что например, формы $\tilde{\omega}_i{}^0$ являются главными:

$$\tilde{\omega}_i{}^0=a_{ik}\omega^k+a_i{}^k\omega_k+a_i{}^0\omega, \qquad a_{ik}=a_{ki}.$$

Далее устанавливается

Теорема 12. Пусть n-кратный интеграл, зависящий от $n+$ $+1$ параметров, порождает на многообразии двойного расслоения переменных интегрирования и параметров M билинейную форму максимального ранга $d\varphi=\omega^i\wedge\omega_i$ и невырожденный относительный инвариант (a_{ik}). Тогда в M существует инвариантно присоединенная к интегралу аффинная связность Γ, определяемая формами ω^i, ω, ω_i, $\omega_k{}^i$, $\omega_0{}^0$ $(i, k=1, \ldots, n)$, заданными на некотором подрасслоении расслоения присоединенных к M касательных реперов и удовлетворяющими следующим структурным уравнениям:

$$\begin{cases} d\omega^i=\omega_k^i\wedge\omega^k, \\ d\omega_i=-\omega_i^k\wedge\omega_k+a_{ik}\omega\wedge\omega^k, \\ d\omega=-\omega_0^0\wedge\omega-\omega_0^k\wedge\omega_k, \\ d\omega_k^i=\omega_p^i\wedge\omega_k^p+a_{kp}\omega_0^i\wedge\omega^p+b_{kp}^i\omega\wedge\omega^p+C_{kp}^{ir}\omega_r\wedge\omega^p, \\ d\omega_0^0=A_0^{kp}\omega_p\wedge\omega_k+A_p^k\omega_k\wedge\omega^p+A_k^0\omega\wedge\omega^k+A_0^k\omega\wedge\omega_k, \\ \nabla a_{ik}=a_{ik}\omega_0^0+b_{ik}^p\omega_p+b_{ik}\omega+a_{ikp}\omega^p, \end{cases} \tag{16}$$

причем имеют место условия аполярности

$$a^{ik}a_{ikp}=0, \qquad a^{ik}b_{ik}=0$$

и свертка $b_{ik}{}^k$ равна нулю. Относительно связности Γ расслоения π_1 и π_2 обладают свойством абсолютного автопараллелизма.

Коэффициенты, входящие в (16), образуют систему тензоров, обращение в нуль которых имеет инвариантный геометрический смысл. В случае связности Γ условие замкнутости формы $\omega_i{}^i$ (теорема 11) приводится к соотношениям [7]

$$C_{ip}{}^{ir}+a_{ir}a_0{}^{ip}=0, \qquad a_0{}^i=0.$$

Наиболее интересным здесь оказывается случай, когда $d\omega_0{}^0=0$: многообразие M допускает интересную геометрическую интерпретацию. Именно, имеет место $(\omega_0{}^i=a\omega^i)$

Теорема 13. Многообразие двойного расслоения M с заданной билинейной формой максимального ранга (4) при условиях

$$d\omega_0{}^0=0, \; b_{kp}{}^i=b_{ik}=C_{kp}{}^{ir}=0, \; a\neq 0$$

реализуется в виде многообразия пар элементов пространства Минковского [9] с аффинной гиперсферой в качестве индикатрисы. Пары эти имеют вид: единичный в смысле метрики Минковского вектор — точка $(n+1)$-мерного аффинного пространства. Слой первого расслоения π_1 получается, когда точка фиксирована, а единичный вектор (первый элемент пары) пробегает индикатрису. Слой расслоения π_2 характеризуется фиксированным единичным вектором и переменной точкой, описывающей все $(n+1)$-мерное аффинное пространство.

Отметим, что совокупность форм ω^i, $\omega_k{}^i$ и функций a_{ik}, $a_{ikp}, \ldots$ $(i, k, p=1, \ldots, n)$ образует самостоятельную подсистему системы форм и функций со структурными уравнениями (16). Эта подсистема характеризует векторное пространство, соответствующее аффинному пространству и индикатрису в нем.

Класс пространств с геометрией Минковского весьма широк и в общих чертах характеризуется тем замечательным свойством, что всякое финслерово пространство локально ведет себя как пространство Минковского. Иначе говоря, по отношению к финслеровым пространствам пространство Минковского ведет себя так же, как обычное евклидово пространство по отношению к римановым пространствам.

В данном случае, когда роль индикатрисы в пространстве Минковского играет аффинная сфера, приобретают естественный геометрический смысл величины a_{ikp}. Именно, совокупность этих величин можно интерпретировать как тензор Дарбу [35] в центроаффинной геометрии. Через этот тензор наглядно выражается и геометрический смысл условия аполярности $(n=3)$: если тензор Дарбу имеет три различных нулевых направления, то для каждого из них направление, гармонически разделяющее его с двумя другими, сопряжено этому направлению. Наконец, обращение в нуль этого тензора имеет внутренний геометрический смысл и характеризует поверхности второго порядка (квадрики). В данном случае условие $a_{ikp}=0$ превращает аффинную сферу в обычную невырожденную центральную гиперповерхность второго порядка.

Перейдем к выделению канонических интегралов дифференциально-геометрической структуры (16) и рассмотрим два возможных случая $a\neq 0$ и $a=0$ (можно доказать, что $a=\mathrm{const}$).

Пусть сперва $a\neq 0$, $a_{ikp}\neq 0$. Без ограничения общности можно полагать $a=-1$, тогда $d\omega=d\varphi$. Для простоты будем считать, что $\omega=\varphi$.

Рассмотрим на многообразии двойного расслоения M натуральный репер $\{p, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, \vec{e}_0, \vec{e}^1, \ldots, \vec{e}^n\}$. При бесконечно малом перемещении этого репера

$$\begin{cases} d\vec{e}_i = -\theta_i^0\vec{e}_0 - \theta_i^k\vec{e}_k, \\ d\vec{e}_0 = -\theta_0^0\vec{e}_0 - \theta_0^k\vec{e}_k, \end{cases}$$

где $\theta_i^0=\omega_i$, $\theta_i^k=\omega_i^k$, $\theta_0^0=0$, $\theta_0^k=a\omega^k$. Обозначим через $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$, ε^0 двойственные ковекторы, соответствующие векторам $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, \vec{e}_0$. Уравнения бесконечно малого перемещения для них имеют вид

$$\begin{cases} d\varepsilon^i=\theta_k^i\varepsilon^k+\theta_0^i\varepsilon^0, \\ d\varepsilon^0=\theta_k^0\varepsilon^k+\theta_0^0\varepsilon^0. \end{cases}$$

Дифференциал такого перемещения переменного ковектора R на слое π_1 относительно корепера $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$, ε^0 можно записать в виде

$$dR=\omega_i\varepsilon^i+\omega\varepsilon^0.$$

Теорема 14. Среди множества n-кратных интегралов, зависящих от $n+1$ параметров, порождающих на многообразии M билинейную форму максимального ранга (4) и дифференциально-геометрическую структуру, определяемую системой структурных уравнений (16) при $a\neq 0$, существует такой, что его можно привести к интегралу от формы вида

$$\Omega_1=\exp\langle R, \vec{e}_0\rangle\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_n,$$

где через $\langle, \rangle$ обозначена операция скалярного умножения ковектора и вектора.

В случае $a\neq 0$, $a_{ikp}=0$ из структурных уравнений (16) следует, что величины a_{ik} в совокупности образуют на многообразии M поле ковариантно постоянного симметрического тензора. Устанавливается, что слои расслоения π_2 являются единичными сферами и доказывается

Теорема 15. Если n-кратный интеграл, зависящий от $n+1$ параметров, порождает на многообразии M билинейную форму максимального ранга (4), причем

$$b_{kp}{}^i=b_{kp}=C_{kp}{}^{ir}=a_{ikp}=0,\ d\omega_0{}^0=0,\ a\neq 0,$$

то он приводится к интегралу от формы

$$\Omega=\exp(R, \vec{e}_0)\,\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_n,$$

где $\vec{R}$—радиус-вектор переменного начала репера $\{R, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, которое находится в центре рассматриваемой сферы и зафиксировано, $(\ ,\ )$—скалярное умножение.

Если зафиксировать репер, т. е. взять постоянный ортонормированный базис евклидова пространства, то форма Ω запишется в виде

$$\Omega=\exp(x^iy_i{}^0+x^0y_0{}^0)\,\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_n,$$

где через x^i, x^0 и y_i^0, y_0^0 обозначены координаты векторов $\vec{R}$ и $\vec{e}_0$

относительно этого базиса, причем

$$(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2+(x^0)^2=1.$$

Перейдем теперь к случаю $a=0$. Здесь типовым слоем одного из расслоений является n-мерное аффинное пространство, а в слое другого выделена гиперплоскость. С использованием подмногообразия параллельных реперов на M может быть доказана

Теорема 16. Если n-кратный интеграл, зависящий от $n+1$ параметров, порождает на многообразии M дифференциально-геометрическую структуру (16), то при выполнении условий

$$b_{kp}{}^i=b_{kp}=C_{kp}{}^{ir}=a=0,\ d\omega_0{}^0=0,\ \det(a_{ik})\neq 0$$

он приводится к интегралу от формы вида

$$\Omega=P(x,u)Q(y)\exp[x^iy_i+s(y)u]\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_n, \tag{17}$$

где $s(y_1,\ldots,y_n)$ — гладкая функция, вторые частные производные которой образуют матрицу (a_{ik}), а $P(x^1,\ldots,x^n,u)$ и $Q(y_1,\ldots,y_n)$ — экспоненты некоторых гладких функций.

В случае, когда относительный инвариант a_{ikp} равен нулю, величины a_{ik} образуют симметричный тензор, а функция $s(y_1,\ldots,y_n)$ выражается через $y_1,\ldots,y_n$ следующим образом:

$$s(y_1,\ldots,y_n)=-\frac{1}{2}a^{ik}y_iy_k,\ a^{ik}=\mathrm{const}.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 17. Если в условиях предыдущей теоремы дополнительно потребовать, чтобы $a_{ikp}=0$, то интеграл приведется к интегралу от формы

$$\Omega=P(x,u)Q(y)\exp\left(x^iy_i-\frac{1}{2}a^{ik}y_iy_ku\right)dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n. \tag{18}$$

§ 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было уже отмечено, одной из важнейших при построении геометрии кратных интегралов, зависящих от параметров, является задача выделения канонических интегралов допустимых дифференциально-геометрических структур на многообразии переменных интегрирования и параметров M. Для этого полезно провести небольшой анализ некоторых из полученных ядер.

В силу теоремы 3 структура псевдоевклидова пространства с метрикой нулевой сигнатуры порождается на $2(n+s)$-мерном многообразии M интегралом с ядром $\exp(x^iy_i+x^\xi y_\xi)$, где $\xi=n+1,\ldots,n+s$. В то же время геометрия $(2n+s)$-мерного многообразия M (теорема 10, $s=\frac{1}{2}n(n+1)$) порождается интегралом с ядром $\exp\left(x^i y_i - \frac{1}{2} x^i x^k u_{ik}\right)$, а геометрия $(2n+1)$-мерного многообразия переменных и параметров (теорема 16) — интегралом с ядром $\exp[x^i y_i + s(y) u]$. В последнем ядре гладкая функция $s(y_1, \ldots, y_n)$ такова, что ее вторые частные производные образуют невырожденную матрицу, которая входит в тензор кручения соответствующей связности. Аналогичное замечание верно и в случае $s = \frac{1}{2} n(n+1)$. Таким образом, дополнительные части $\exp\left(-\frac{1}{2} x^i x^k u_{ik}\right)$ и $\exp(s(y)u)$ в канонических ядрах $\left(s = \frac{1}{2} n(n+1),\ s=1\right)$ связаны с обобщенным тензором кривизны и кручения, причем в рассмотренных примерах наличие кручения связности приводит к появлению в экспоненте дополнительных членов третьей степени. Для получения более глубоких результатов необходимо обратиться к другой особенности рассматриваемых ядер, состоящей в том, что первая группа слагаемых в экспоненте во всех трех случаях одна и та же — $x^i y_i$. Естественно возникает предположение, что дополнительные слагаемые во втором и третьем случаях получаются из $x^\xi y_\xi$. Тогда следующий шаг состоит в изучении подмногообразий псевдоевклидова пространства E^n_{2n} и выделении канонических интегралов соответствующих допустимых дифференциально-геометрических структур. Недавние результаты автора, в частности, выделяют роль тензора кривизны в каноническом интеграле, а полученные в явном виде вещественные аналоги ядер прямо указывают на естественные пути обобщения ядра Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян С. Х.* Геометрия n-кратного интеграла, зависящего от n параметров // Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР.— 1975.— *61*, № 1.— С. 7—14 (РЖМат, 1976, 6А656)
2. — Геометрия n-кратных интегралов, зависящих от $n+s$ параметров // Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР.— 1976.— *62*, № 1.— С. 15—22 (РЖМат, 1976, 12А788)
3. — Геометрия n-кратного интеграла, зависящего от $n+1$ параметров // Дифференц. геометрия.— Калинин, 1977.— С. 23—34 (РЖМат, 1977, 12А773)
4. — О геометрии симметрического пространства пар точек n-мерного конформного пространства // Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР.— 1980.— *71*, № 2.— С. 69—75 (РЖМат, 1981, 6А702)
5. — О геометрии симметрического пространства нуль-пар проективного пространства RP^n // Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР.— 1981.— *72*, № 4.— С. 203—210 (РЖМат, 1982, 2А796)
6. — Геометрия $(n+s)$-кратного интеграла, зависящего от n параметров // Изв. вузов. Мат.— 1984.— № 11.— С. 3—10 (РЖМат, 1985, 5А628)
7. Геометрия $(n+1)$-кратного интеграла, зависящего от n параметров // Изв. вузов. Мат.— 1987.— № 3.— С. 6—13 (РЖМат, 1987, 8А646)

8. *Близникас В. И.* Пространства Финслера и их обобщения // Алгебра. Топология. Геометрия.— 1967 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР).— 1969.— С. 73—125 (РЖМат, 1970, 2А634)
9. *Буземан Г.* Геометрия геодезических.— М.: Физматгиз, 1962.— 503 с. (РЖМат, 1962, 12А319К)
10. *Васильев А. М.* Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория) // Мат. сб.— 1966.— *70*, № 4.— С. 457—480 (РЖМат, 1967, 5А525)
11. — Дифференциальная алгебра как аппарат дифференциальной геометрии // Тр. Геометр. семинара, Ин-т информ. АН СССР.— М.: 1966.— *1*.— С. 33—61 (РЖМат, 1967, 6А337)
12. — Теория дифференциально-геометрических структур.— Изд-во МГУ, 1987.— 190 с. (РЖМат, 1988, 2А764К)
13. *Вишневский В. В.* Об одном обобщении пространств Широкова—Рашевского // Уч. зап. Казанск. ун-т.— 1965.— *125*, № 1.— С. 60—73 (РЖМат, 1966, 4А363)
14. — О параболическом аналоге *А*-пространств // Изв. вузов. Мат.— 1968.— № 1.— С. 29—38 (РЖМат, 1968, 6А683)
15. *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности. — Казань: Казанск. ун-т, 1962.— 210 с. (РЖМат, 1965, 2А618К)
16. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1953.— № 2.— С. 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
17. *Мулин И. Г.* О пространствах типа Широкова // Глобал. и риман. геометрия.— Л., 1983.— С. 62—66 (РЖМат, 1984, 6А696)
18. *Норден А. П.* Об одном классе четырехмерных *А*-пространств // Изв. вузов. Мат.— 1960.— № 4.— С. 145—157 (РЖМат, 1961, 4А394)
19. — Пространства декартовой композиции // Изв. вузов. Мат.— 1963.— № 4.— С. 117—128 (РЖМат, 1964, 3А367)
20. — О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства // Изв. вузов. Мат.— 1972.— № 12.— С. 84—94 (РЖМат, 1973, 5А675)
21. *Петров А. З.* Пространства Эйнштейна.— М.: Физматгиз, 1966.— 496 с.
22. *Петров Ю. Г.* Некоторые обобщения пространств Широкова—Рашевского // Уч. зап. Чувашск. гос. пед. ин-т.— 1969.— Вып. 29.— С. 50—77 (РЖМат, 1969, 11А612)
23. — О реализации комплексных пространств Вейля // Изв. вузов. Мат.— 1977.— № 6.— С. 112—118 (РЖМат, 1978, 3А486)
24. *Рашевский П. К.* Скалярное поле в расслоенном пространстве // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу.— Вып. 6.— 1948
25. — О паре связностей на *n*-мерных поверхностях в 2*n*-мерном расслоенном пространстве // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу.— Вып. 8.— 1950
26. *Розенфельд Б. А.* Об унитарных и расслоенных пространствах // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу.— Вып. 7.— 1949
27. — Проективно-дифференциальная геометрия семейств пар $P_m + P_{n-m-1}$ в P_n // Мат. сб.— 24(66) : 3.— 1949
28. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии.— М.: Мир, 1970.— 412 с. (РЖМат, 1971, 7А754К)
29. *Туулметс Л.* О геометрии однородного пространства *m*-пар и его многообразии // Tastu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартус. ун-та.— 1978.— № 464/22.— С. 98—115 (РЖМат, 1978, 12А1059)
30. *Феденко А. С.* Предельные пространства / Успехи матем. наук.— 1957.— *12*, № 3.— С. 235—240 (РЖМат, 1958, 6143)
31. — Пространства с симметриями.— Минск: Белорус. ун-т, 1977.— 168 с. (РЖМат, 1977, 11А595К)
32. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций.— М.: Гостехиздат, 1950.— 528 с.

33. *Широков П. А.* Постоянные поля векторов и тензоров в римановых пространствах // Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва.— 1925.— Сер. 2.— *25*.— С. 86—114
34. — Об одном типе симметрических пространств // Мат. сб.— 1957.— *41*, № 3.— С. 361—372 (РЖМат, 1959, 1955)
35. —, *Широков А. П.* Аффинная дифференциальная геометрия.— М.: Физматгиз, 1959.— 319 с. (РЖМат, 1961, 9А567К)
36. *Avez A.* Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété soit un espace d'Einstein // C. r. Acad. sci.— 1959.— *248*, № 8.— С. 1113—1115 (РЖМат, 1960, 6925)
37. *Besse A. L.* Einstein manifolds.— Berlin e. a.: Springer, 1987.— 510 с. (РЖМат, 1987, 5А733К)
38. *Cartan E.* Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire.— Paris, 1933
39. — La geometrie de l'intégrale $\int F(r, y, y', y'')dx$ // Oeuvres complètes, P. III, 1941, *2*
40. *Dedecker P.* On the generalization of simplectic geometry to multiple integrals in the calculus of variations // Lect. Notes Math.— 1977.— *570*.— С. 395—456 (РЖМат, 1977, 11А629)
41. *Eisenhart L. P.* Spaces for which the Ricci scalar R is equal to zero // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1958.— *44*, № 7.— С. 695—698 (РЖМат, 1959, 11527)
42. — Spaces for which the Ricci scalar R is equal to zero. // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1959.— *45*, № 2.— С. 226—229 (РЖМат, 1960, 13235)
43. *Géhéniau J.* Une classification des espaces einsteiniens // C. r. Acad. sci.— 1957.— *244*, № 6.— С. 723—724 (РЖМат, 1958, 2398)
44. *Kawaguchi A.* Theory of connections in the generalized Finsler manifold // Proc. Imp. Acad. Tokyo.— 1937.— *7*.— С. 211—214
45. — Geometry in an n-dimensional space with lenght $s = \int (A_i(x, x')x''^i + B(x, x')^{\frac{1}{p}} dt$ // Trans. Amer. Math. Soc.— 1938.— *44*.— С. 153—167
46. *Kähler E.* Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik // Abhandl. Math. Seminar Hamburg. Univ., B. 9, 1933
47. *Ludwig G., Scanlan G.* Classification of the Ricci tensor // Communs Math. Phys.— 1971.— *20*, № 4.— С. 291—300 (РЖМат, 1971, 12А831)
48. *Petrov A. Z.* Perspectives in geometry and relativity.— Indiana. University Press, 1966
49. *Rosca R.* Variétés pseudo-riemanniennes $V^{n,n}$ de signature (n, n) et à connexion self-orthogonale involutive // C. r. Acad. sci.— 1973.— *277*, № 19.— С. A959—A961 (РЖМат, 1974, 5А744)