A. L. Skubachevskii, Asymptotic formulas for solutions of nonlocal elliptic problems, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 2010, Volume 269, 225–241

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2010, т. 269, с. 225–241

УДК 517.9

Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач[1]

©2010 г. А. Л. Скубачевский[2]

Поступило в ноябре 2009 г.

Рассматриваются нелокальные эллиптические задачи в плоских областях. Получены асимптотические формулы решений в весовых пространствах вблизи точек сопряжения.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматривалось эллиптическое уравнение второго порядка в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с нелокальным краевым условием, связывающим значения неизвестной функции на $(n-1)$-мерном многообразии $M_1 \subset \partial Q$ со значениями на многообразии $\omega_1(M_1) \subset Q$, и с условием Дирихле на $M_2 = \partial Q \setminus M_1$, где $\partial Q \in C^\infty$ — граница области, а ω_1 — C^∞-диффеоморфизм. В случае, когда эллиптический оператор является оператором Лапласа, $Q = (0,2) \times (0,1)$, а нелокальное условие связывает значения неизвестной функции на интервале $M_1 = \{2\} \times (0,1)$ со значениями на интервале $\omega_1(M_1) = \{1\} \times (0,1)$, была доказана однозначная разрешимость нелокальной задачи. Для произвольных областей Q и произвольного подхода носителей нелокальных членов к границе такая задача была сформулирована как нерешенная [2].

В работе [3] показано, что пересечение носителя нелокальных членов с границей может привести к возникновению степенных особенностей у решений. Поэтому нелокальные эллиптические задачи естественно рассматривать в весовых пространствах Кондратьева [4]. Асимптотические формулы для решений нелокальных эллиптических краевых задач в плоских областях вблизи точек сопряжения впервые были получены в [3]. Предполагалось, что преобразование переменных в нелокальных задачах соответствует повороту относительно точек сопряжения. Коэффициенты в асимптотических формулах для решений нелокальных эллиптических задач были вычислены в работе [5]. Асимптотические формулы решений для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, эллиптических по Дуглису–Ниренбергу, с нелокальными условиями были получены в [6] методами теории аналитических функций.

В настоящей работе, опираясь на методы работ [3, 4], мы выведем асимптотические формулы решений нелокальных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Предполагается, что преобразования переменных в нелокальных членах содержат как операторы поворота, так и операторы растяжения–сжатия. В качестве приложения будет показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться вблизи плоской границы для сколь угодно малых коэффициентов в нелокальных членах. С другой стороны, гладкость обобщенных решений может сохраняться вблизи вершины любого угла раствора $0 < \beta < 2\pi$, если коэффициенты в нелокальных членах достаточно большие.

Для удобства читателя при использовании нами различных утверждений, доказанных в [3, 4] и других работах, мы будем ссылаться на монографию [7], содержащую большинство

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00586).

[2]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.
E-mail: skub@lector.ru

необходимых нам вспомогательных результатов. Через c_i и k_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, будут обозначаться положительные константы в неравенствах, не зависящие от функций, входящих в эти неравенства.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}v = \mathbf{A}^0 v + \mathbf{A}^1 v = f_0(y), \qquad y \in \theta, \tag{1.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\mathbf{B}_\rho v = \mathbf{B}_\rho^0 v|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}_\rho^1 v|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}_\rho^2 v|_{\gamma_\rho} = f_\rho(y), \qquad y \in \gamma_\rho, \quad \rho = 1, 2, \tag{1.2}$$

относительно вектор-функции $v = (v_1, \ldots, v_N)$. В этом разделе и далее используются одинаковые обозначения для вектор-столбцов и вектор-строк. Здесь $\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r\}$ — плоский угол; φ, r — полярные координаты точки y; $\gamma_\rho = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon \varphi = d_\rho,\ 0 < r\}$, $\rho = 1, 2$; $f_0 = (f_{01}, \ldots, f_{0N})$ и $f_\rho = (f_{\rho 1}, \ldots, f_{\rho, mN})$; $\mathbf{A}^i = \mathbf{A}^i(y, D_y)$, $i = 0, 1$, и $\mathbf{B}_\rho^j = \mathbf{B}_\rho^j(y, D_y)$, $j = 0, 1, 2$, $\rho = 1, 2$, — матричные операторы порядков $N \times N$ и $mN \times N$ соответственно с элементами, определенными по формулам

$$A_{jk}^0 v_k = A_{jk}^0(y, D_y) v_k(y) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_{jk\alpha}(y) D_y^\alpha v_k(y),$$

$$A_{jk}^1 v_k = A_{jk}^1(y, D_y) v_k(y) = \sum_{|\alpha| < 2m} a_{jk\alpha}(y) D_y^\alpha v_k(y),$$

$$B_{\rho\mu k}^0 v_k = B_{\rho\mu k}^0(y, D_y) v_k(y) = \sum_{|\alpha| = m_{\rho\mu}} b_{\rho\mu k\alpha 0}(y) D_y^\alpha v_k(y),$$

$$B_{\rho\mu k}^1 v_k = B_{\rho\mu k}^1(y, D_y) v_k(y) = \sum_{|\alpha| = m_{\rho\mu}} \sum_{s=1}^{S_{\rho\mu k}} b_{\rho\mu k\alpha s}(y) (D_y^\alpha v_k)(C_{\rho\mu k s} y),$$

$$B_{\rho\mu k}^2 v_k = B_{\rho\mu k}^2(y, D_y) v_k(y) = \sum_{|\alpha| < m_{\rho\mu}} \sum_{s=0}^{S_{\rho\mu k}} b_{\rho\mu k\alpha s}(y) (D_y^\alpha v_k)(C_{\rho\mu k s} y),$$

$j, k = 1, \ldots, N$, $\rho = 1, 2$, $\mu = 1, \ldots, mN$,

$$D_y^\alpha = D_{y_1}^{\alpha_1} D_{y_2}^{\alpha_2}, \qquad D_{y_j}^{\alpha_j} = \left(-i \frac{\partial}{\partial y_j}\right)^{\alpha_j}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Мы предполагаем, что $a_{jk\alpha}, b_{\rho\mu k\alpha s} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Обозначение $(D_y^\alpha v_k)(C_{\rho\mu k s} y)|_{\gamma_\rho}$ означает, что выражение $D_{y'}^\alpha v_k(y')$ берется при значении аргумента $y' = C_{\rho\mu k s} y$, а затем мы рассматриваем след этой функции для $y \in \gamma_\rho$; $C_{\rho\mu k s}$ — оператор вращения на угол $\varphi_{\rho\mu k s}$ и растяжения в $\chi_{\rho\mu k s}$ раз в плоскости $\{y\}$, $d_1 < d_\rho + \varphi_{\rho\mu k s} < d_2$, $0 < \chi_{\rho\mu k s}$, если $s > 0$, и $\varphi_{\rho\mu k 0} = 0$, $\chi_{\rho\mu k 0} = 1$. Для простоты мы будем обозначать $\zeta = (\rho, \mu, k)$. Точку $y = 0$ естественно назвать точкой сопряжения для задачи (1.1), (1.2).

Замечание 1.1. Функции $(D_y^\alpha v_k)(C_{\zeta s} y)$, $s > 0$, определены на множестве $\theta_{\rho\sigma} = \{(\varphi, r) \in \theta \colon |\varphi - d_\rho| < \sigma\}$, где $2\sigma = \min_{\zeta, s} \min\{d_\rho + \varphi_{\zeta s} - d_1, d_2 - d_\rho - \varphi_{\zeta s}\}$.

Предположим, что операторы $\mathbf{A}^0(y, D_y)$ и $\mathbf{B}_\rho^0(y, D_y)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1.1. Оператор $\mathbf{A}^0(y, D_y)$ правильно эллиптический в $\bar{\theta}$.

Условие 1.2. Оператор $\mathbf{B}^0_\rho(y,D_y)$ удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $\mathbf{A}^0(y,D_y)$ на $\bar\gamma_\rho$, $\rho=1,2$.

Введем весовое пространство Кондратьева $H^k_a(\Omega)$ как пополнение множества $C^\infty_0(\overline{\Omega}\setminus\{0\})$ по норме

$$\|u\|_{H^k_a(\Omega)}=\left\{\sum_{|\alpha|\le k}\int\limits_\Omega |y|^{2(a-k+|\alpha|)}|D^\alpha_y u|^2\,dy\right\}^{1/2}, \tag{1.3}$$

где $k\ge 0$ целое, $a\in\mathbb{R}$, $\Omega=\theta$ или $\Omega=\theta\cap B_\varepsilon$, $B_\varepsilon=\{y\in\mathbb{R}^2\colon |y|<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, $C^\infty_0(\overline{\Omega}\setminus\{0\})$ — множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на $\overline{\Omega}\setminus\{0\}$.

Обозначим через $H^{k-1/2}_a(\Gamma)$ ($k\ge 1$ целое) пространство следов на множестве $\Gamma\subset\overline{\Omega}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)}=\inf\|v\|_{H^k_a(\Omega)},\qquad v\in H^k_a(\Omega),\quad v|_\Gamma=\psi, \tag{1.4}$$

где $\Gamma=\gamma=\{y\in\mathbb{R}^2\colon \varphi=d\}$, $d_1\le d\le d_2$, или $\Gamma=\gamma\cap B_\varepsilon$.

Ниже мы будем изучать задачу (1.1), (1.2) относительно решения $v\in H^{l+2m,N}_a(\theta)$, предполагая, что $f=\{f_0,f_\rho\}\in\mathcal{H}^{l,N}_a(\theta,\gamma)$, где

$$H^{l+2m,N}_a(\theta)=\prod_{j=1}^N H^{l+2m}_a(\theta),\qquad \mathcal{H}^{l,N}_a(\theta,\gamma)=\prod_{j=1}^N H^l_a(\theta)\times\prod_{\rho,\mu}H^{l+2m-m_{\rho\mu}-1/2}_a(\gamma_\rho),$$

$l\ge\max_{\rho,\mu}\{-2m+m_{\rho\mu}+1\}$ — неотрицательное целое число.

Рассмотрим нелокальную задачу с замороженными в нуле коэффициентами, содержащую лишь старшие производные,

$$\mathbf{A}^0(0,D_y)v=f_0(y),\qquad y\in\theta, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B}^0_\rho(0,D_y)v|_{\gamma_\rho}+\mathbf{B}^1_\rho(0,D_y)v|_{\gamma_\rho}=f_\rho(y),\qquad y\in\gamma_\rho,\quad \rho=1,2. \tag{1.6}$$

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathbf{L}\colon H^{l+2m,N}_a(\theta)\to\mathcal{H}^{l,N}_a(\theta,\gamma)$, заданный по формуле

$$\mathbf{L}v=\big\{\mathbf{A}^0(0,D_y)v,\ \mathbf{B}^0_\rho(0,D_y)v|_{\gamma_\rho}+\mathbf{B}^1_\rho(0,D_y)v|_{\gamma_\rho}\big\}. \tag{1.7}$$

Запишем уравнение (1.5) и нелокальные краевые условия (1.6) в полярных координатах

$$r^{-2m}\sum_k\widehat{A}_{jk}(\varphi,D_\varphi,rD_r)v_k(\varphi,r)=f_{0j}(\varphi,r),\qquad d_1<\varphi<d_2,\quad 0<r,\quad j=1,\dots,N, \tag{1.8}$$

$$r^{-m_{\rho\mu}}\sum_k\widehat{B}_\zeta(\varphi,D_\varphi,rD_r)v_k(\varphi,r)|_{\varphi=d_\rho}+\left[(r')^{-m_{\rho\mu}}\sum_{k,s}\widehat{B}_{\zeta s}(\varphi,D_\varphi,r'D_{r'})v_k(\varphi+\varphi_{\zeta s},r')\right]\Bigg|_{\substack{\varphi=d_\rho\\ r'=\chi_{\zeta s}r}}=$$

$$=f_{\rho\mu}(r),\qquad 0<r,\quad \rho=1,2,\quad \mu=1,\dots,mN. \tag{1.9}$$

Здесь

$$\widehat{A}_{jk}(\varphi,D_\varphi,rD_r)=\sum_{|\alpha|\le 2m}\widehat{a}_{jk\alpha}(\varphi)D^{\alpha_1}_\varphi(rD_r)^{\alpha_2},$$

$$\widehat{B}_\zeta(\varphi,D_\varphi,rD_r)=\sum_{|\alpha|\le m_{\rho\mu}}\widehat{b}_{\zeta 0}(\varphi)D^{\alpha_1}_\varphi(rD_r)^{\alpha_2},\qquad \widehat{B}^1_{\zeta s}(\varphi,D_\varphi,rD_r)=\sum_{|\alpha|\le m_{\rho\mu}}\widehat{b}_{\zeta s}(\varphi)D^{\alpha_1}_\varphi(rD_r)^{\alpha_2},$$

$\widehat{a}_{jk\alpha}, \widehat{b}_{\zeta 0}, \widehat{b}_{\zeta s} \in C^{\infty}_{2\pi}[0,2\pi]$; в (1.9) и далее, если не оговорено противное, мы суммируем по $s = 1,\dots,S_\zeta$; $D_\varphi = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $D_r = -i\frac{\partial}{\partial r}$; $C^{\infty}_{2\pi}[0,2\pi]$ — множество 2π-периодических бесконечно дифференцируемых функций.

Введем новую переменную $\tau = \ln r$. Тогда задача (1.8), (1.9) примет вид

$$\sum_k \widehat{A}_{jk}(\varphi, D_\varphi, D_\tau) v_k(\varphi,\tau) = F_{0j}(\varphi,\tau), \qquad d_1 < \varphi < d_2, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad j = 1,\dots,N, \tag{1.10}$$

$$\sum_k \widehat{B}_\zeta(\varphi, D_\varphi, D_\tau) v_k(\varphi,\tau)|_{\varphi=d_\rho} + \sum_{k,s} e^{-m_{\rho\mu}\ln\chi_{\zeta,s}} \widehat{B}^1_{\zeta s}(\varphi, D_\varphi, D_\tau) v_k\big(\varphi+\varphi_{\zeta s}, \tau+\ln\chi_{\zeta s}\big)\big|_{\varphi=d_\rho} = F_{\rho\mu}(\tau), \qquad -\infty < \tau < \infty, \quad \rho = 1,2, \quad \mu = 1,\dots,m, \tag{1.11}$$

где $F_{0j}(\varphi,\tau) = e^{2m\tau} f_{0j}(\varphi,\tau)$, $F_{\rho\mu}(\tau) = e^{m_{\rho\mu}\tau} f_{\rho\mu}(\tau)$.

Используя преобразование Фурье по τ, из (1.10), (1.11) получим

$$\sum_k \widehat{A}_{jk}(\varphi, D_\varphi, \lambda)\widehat{v}_k(\varphi,\lambda) = \widehat{F}_{0j}(\varphi,\lambda), \qquad d_1 < \varphi < d_2, \quad j = 1,\dots,N, \tag{1.12}$$

$$\sum_k \widehat{B}_\zeta(\varphi, D_\varphi, \lambda)\widehat{v}_k(\varphi,\lambda)|_{\varphi=d_\rho} + \sum_{k,s} e^{(i\lambda-m_{\rho\mu})\ln\chi_{\zeta s}} \widehat{B}^1_{\zeta s}(\varphi, D_\varphi, \lambda)\widehat{v}_k(\varphi+\varphi_{\zeta s},\lambda)|_{\varphi=d_\rho} = \widehat{F}_{\rho\mu}(\lambda), \qquad \rho = 1,2, \qquad \mu = 1,\dots,m, \tag{1.13}$$

где $\widehat{v}_k(\varphi,\lambda) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} v_k(\varphi,\tau)\,d\tau$.

Введем пространство вектор-функций $W^{k,N}(d_1,d_2) = \prod_{j=1}^N W^k(d_1,d_2)$. Пусть $\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2] = W^{l,N}(d_1,d_2) \times \mathbb{C}^{mN} \times \mathbb{C}^{mN}$, где $W^k(d_1,d_2)$ — пространство Соболева функций из $L_2(d_1,d_2)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(d_1,d_2)$.

Рассмотрим оператор-функцию $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda) \in \mathcal{B}\big(W^{l+2m,N}(d_1,d_2), \mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2]\big)$, заданную по формуле

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u = \left\{ \sum_k \widehat{A}_{jk}(\varphi, D_\varphi, \lambda) u_k(\varphi), \ \sum_k \widehat{B}_\zeta(\varphi, D_\varphi, \lambda) u_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho} + \sum_{k,s} e^{(i\lambda-m_{\rho\mu})\ln\chi_{\zeta s}} \widehat{B}^1_{\zeta s}(\varphi, D_\varphi, \lambda) u_k(\varphi+\varphi_{\zeta s})|_{\varphi=d_\rho} \right\}, \tag{1.14}$$

где $u = (u_1,\dots,u_N) \in W^{l+2m,N}(d_1,d_2)$, $\mathcal{B}(H_1,H_2)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2. В силу теорем 1.5.1, 1.5.2 из [7] для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, счетного множества собственных значений, оператор $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\widehat{\mathbf{R}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{L}}^{-1}(\lambda)$, а

$$\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda) \in \mathcal{B}\big(\mathcal{W}^{l,N}[d_1,d_2], W^{l+2m,N}(d_1,d_2)\big)$$

— конечно мероморфная оператор-функция на $\mathbb{C}$.

Сформулируем теперь основной результат данной работы. Пусть $l_2 \ge l_1 > 0$ — целые числа, и пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что $h_2 = a_2 + 1 - l_2 - 2m < a_1 + 1 - l_1 - 2m = h_1$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, и пусть $0 < \delta_0 < \varepsilon/(4\chi_{\mathrm{M}})$, где $\chi_{\mathrm{M}} = \max_{\zeta,s}\{\chi_{\zeta s}\}$, $\chi_{\mathrm{m}} = \min_{\zeta,s}\{\chi_{\zeta s}\}$, $s = 0,1,\dots,S_\zeta$, $\rho = 1,2$, $\mu = 1,\dots,mN$, $k = 1,\dots,N$.

Теорема 1.1. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h_2$ *не содержит полюсов оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$. *Предположим также, что* $f \in \mathcal{H}^{l_2,N}_{a_2}(\theta \cap B_\varepsilon, \gamma \cap B_\varepsilon)$, *а вектор-функция* $v \in H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta \cap B_\varepsilon)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1) *в* $\theta \cap B_{2\delta_0}$ *и нелокальным условиям* (1.2) *на* $\gamma_\rho \cap B_{2\delta_0}$, $\rho = 1,2$.

Тогда существует $0 < \delta < \delta_0$ *такое, что*

$$v(y) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{p=0}^{p_j-1} \sum_{q=0}^{Q_j} \alpha_{jpq}\, r^{i\lambda_j} (\ln^p r) P_{jpq}(r \ln^q r) + w(y), \qquad y \in \theta \cap B_\delta, \tag{1.15}$$

где $w \in H^{l_2+2m,N}_{a_2}(\theta \cap B_\delta)$, $\alpha_{jpq} \in \mathbb{C}$ *— постоянные,* λ_j *— полюсы оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$ *кратности* p_j, $j = 1, \dots, J$, *лежащие в полосе* $h_2 < \operatorname{Im} \lambda_j < h_1$, $Q_j \geq 0$ *— целые числа,* P_{jpq} *— вектор-функции, координатами которых являются полиномы степени* $[\operatorname{Im} \lambda_j - h_2]$ *относительно* $r \ln^q r$, *при этом коэффициенты данных полиномов — бесконечно дифференцируемые по* φ *функции на* $[d_1, d_2]$, *не зависящие от* v.

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ МАЛЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ ПОКАЗАТЕЛЯ ВЕСА

Пусть $0 < \varepsilon < 1$, и пусть $0 < \delta < \varepsilon/(4\chi_{\mathrm{M}})$.

Лемма 2.1. *Пусть* $a_1 - 1 \leq a_2 \leq a_1$, *а прямая* $\operatorname{Im} \lambda = h_2 = a_2 + 1 - l_1 - 2m$ *не содержит полюсов оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$. *Предположим также, что* $f \in \mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\theta \cap B_\varepsilon, \gamma \cap B_\varepsilon)$, *а вектор-функция* $v \in H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta \cap B_\varepsilon)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1) *в* $\theta \cap B_{2\delta}$ *и нелокальным условиям* (1.2) *на* $\gamma_\rho \cap B_{2\delta}$, $\rho = 1, 2$.

Тогда

$$v(y) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=0}^{p_j-1} \alpha_{jn}\, r^{i\lambda_j} (\ln^n r) \psi_{jn}(\varphi) + w(y), \qquad y \in \theta \cap B_{\delta_{\mathrm{m}}}, \tag{2.1}$$

при этом $w \in H^{l_1+2m,N}_{a_2}(\theta \cap B_{\delta_{\mathrm{m}}})$ *и*

$$\|w\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_2}(\theta \cap B_{\delta_{\mathrm{m}}})} \leq c\Big(\|f\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\theta \cap B_\varepsilon, \gamma \cap B_\varepsilon)} + \|v\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta \cap B_\varepsilon)} \Big), \tag{2.2}$$

где $\alpha_{jn} \in \mathbb{C}$ *и* $c > 0$ *— постоянные,* λ_j *— полюсы оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$ *кратности* p_j, *лежащие в полосе* $h_2 < \operatorname{Im} \lambda_j < h_1 = a_1 + 1 - l_1 - 2m$, $\psi_{jn} \in C^{\infty,N}[d_1, d_2]$ *— вектор-функции, не зависящие от* v, $C^{\infty,N}[d_1, d_2] = \prod_{j=1}^{N} C^{\infty,j}[d_1, d_2]$, $\delta_{\mathrm{m}} = \delta \chi_{\mathrm{m}}$.

Доказательство. 1. Положим $v^0(y) = \xi(r) v(y)$, где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\xi(t) = 1$ при $|t| < \delta\chi_{\mathrm{m}}$, $\xi(t) = 0$ при $|t| > 3\delta\chi_{\mathrm{m}}/2$. Запишем задачу (1.1), (1.2) в виде

$$\mathbf{A}^0(0, D_y) v^0 = f_0'(y), \qquad y \in \theta, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{B}^0_\rho(0, D_y) v^0|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}^1_\rho(0, D_y) v^0|_{\gamma_\rho} = f_\rho'(y), \qquad y \in \gamma_\rho, \quad \rho = 1, 2, \tag{2.4}$$

где

$$f_0'(y) = \big(\mathbf{A}^0(0, D_y) - \mathbf{A}^0(y, D_y)\big) v^0 + \mathbf{A}^2(y, D_y) v + \xi(r) f_0(y), \qquad y \in \theta \cap B_{3\delta/2},$$

$$f_0'(y) = 0, \qquad y \in \theta \setminus B_{3\delta/2},$$

$$f_\rho'(y) = \big(\mathbf{B}^0_\rho(0, D_y) - \mathbf{B}^0_\rho(y, D_y)\big) v^0|_{\gamma_\rho} + \big(\mathbf{B}^1_\rho(0, D_y) - \mathbf{B}^1_\rho(y, D_y)\big) v^0|_{\gamma_\rho} +$$

$$+ \mathbf{B}^3_\rho(y, D_y) v|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}^4_\rho(y, D_y) v|_{\gamma_\rho} + \xi(r) f_\rho(y), \qquad y \in \gamma_\rho \cap B_{3\delta/2},$$

$$f_\rho'(y) = 0, \qquad y \in \gamma_\rho \setminus B_{3\delta/2},$$

$\mathbf{A}^2(y,D_y)$ и $\mathbf{B}^3_\rho(y,D_y)$ — матричные операторы порядков $N\times N$ и $mN\times N$ соответственно с элементами, которые являются дифференциальными операторами порядка $2m-1$ и функционально-дифференциальными операторами порядка $m_{\rho\mu}-1$ (μ — номер строки) с гладкими коэффициентами, обращающимися в нуль при $r>3\delta/2$; $\mathbf{B}^4_\rho(y,D_y)$ — матричный оператор порядка $mN\times N$ с элементами

$$\mathbf{B}^4_\zeta v_k=\sum_{|\alpha|=2m}\sum_s\big(\xi(\chi_{\zeta s}r)-\xi(r)\big)b_{\zeta\alpha s}(y)(D^\alpha_y v_k)(C_{\zeta s}y). \tag{2.5}$$

Отметим, что в силу вида нелокальных членов и определения функции ξ вектор-функции $\mathbf{B}^j_\rho(y,D_y)v^0$, $j=1,3$, и $\mathbf{B}^4_\rho(y,D_y)v$ определены на множестве $\theta_{\rho\sigma}\cap B_{3\delta/2}$.

2. Оценим норму вектор-функции f_0'.

Очевидно, $|a_{jk\alpha}(0)-a_{jk\alpha}(y)|\le k_1|y|$, $y\in B_\varepsilon$, $j,k=1,\dots,N$, $|\alpha|=2m$, где $k_1>0$ не зависит от y. Следовательно, в силу леммы 3.1.1 из [7] $(\mathbf{A}^0(0,D_y)-\mathbf{A}^0(y,D_y))v^0\in H^{l_1,N}_{a_1-1}(\theta)$, при этом

$$\big\|\big(\mathbf{A}^0(0,D_y)-\mathbf{A}^0(y,D_y)\big)v^0\big\|_{H^{l_1,N}_{a_1-1}(\theta)}\le k_2\|v\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)}.$$

Поскольку $a_1-1\le a_2$, пространство $H^{l_1,N}_{a_1-1}(\theta\cap B_\varepsilon)$ непрерывно вложено в $H^{l_1,N}_{a_2}(\theta\cap B_\varepsilon)$. Таким образом, $(\mathbf{A}^0(0,D_y)-\mathbf{A}^0(y,D_y))v^0\in H^{l_1,N}_{a_2}(\theta)$ и

$$\big\|\big(\mathbf{A}^0(0,D_y)-\mathbf{A}^0(y,D_y)\big)v^0\big\|_{H^{l_1,N}_{a_2}(\theta)}\le k_3\|v\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)}.$$

В силу леммы 3.3.1 из [7] и условия $a_1-1\le a_2$

$$\mathbf{A}^2(y,D_y)v\in H^{l_1+1,N}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)\subset H^{l_1,N}_{a_1-1}(\theta\cap B_\varepsilon)\subset H^{l_1,N}_{a_2}(\theta\cap B_\varepsilon),$$

при этом $\|\mathbf{A}^2(y,D_y)v\|_{H^{l_1,N}_{a_2}(\theta\cap B_\varepsilon)}\le k_4\|v\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)}$.

Следовательно, $f_0'\in H^{l_1,N}_{a_2}(\theta\cap B_\varepsilon)$ и

$$\|f_0'\|_{H^{l_1,N}_{a_2}(\theta\cap B_\varepsilon)}\le k_5\Big(\|f_0\|_{H^{l_1,N}_{a_2}(\theta\cap B_\varepsilon)}+\|v\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)}\Big). \tag{2.6}$$

3. Оценим теперь норму вектор-функции f_s'.

Из определения следа функции аналогично шагу 2 доказательства получим

$$\big\|\big(\mathbf{B}^0_\rho(0,D_y)-\mathbf{B}^0_\rho(y,D_y)\big)v^0|_{\gamma_\rho}\big\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\gamma_\rho\cap B_\varepsilon)}\le k_6\|v\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)}, \tag{2.7}$$

где $\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\gamma_\rho\cap B_\varepsilon)=\prod_\mu H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}-1/2}_{a_2}(\gamma_\rho\cap B_\varepsilon)$.

Обозначим

$$w_{\rho\mu}(y)=\sum_{|\alpha|=m_{\rho\mu}}\sum_{k,s}\big(b_{\zeta\alpha s}(0)-b_{\zeta\alpha s}(y)\big)(D^\alpha_y v^0_k)(C_{\zeta s}y),\qquad k=1,\dots,N,\quad s=1,\dots,S_\zeta.$$

Очевидно, $w_{\rho\mu}\in H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}}_{a_1}(\theta_{\rho\sigma})$ и $\operatorname{supp}w_{\rho\mu}\subset B_{3\delta/2}$.

Из определения следа функции, неравенства $a_1-1\le a_2$ и леммы 3.1.1 в [7] получим

$$\|w_{\rho\mu}|_{\gamma_\rho}\|_{H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}-1/2}_{a_2}(\gamma_\rho)}\le\|w_{\rho\mu}\|_{H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}}_{a_2}(\theta_{\rho\sigma})}\le k_7\|w_{\rho\mu}\|_{H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}}_{a_1-1}(\theta_{\rho\sigma})}\le$$

$$\le k_8\left\|\sum_\alpha\sum_{k,s}(D^\alpha_y v^0_k)(C_{\zeta s}y)\right\|_{H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}}_{a_1}(\theta_{\rho\sigma})}.$$

Отсюда, используя эквивалентность норм в весовых пространствах при невырожденной гладкой замене переменных $y' = C_{\zeta s} y$, мы имеем

$$\|w_{\rho\mu}|_{\gamma_\rho}\|_{H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}-1/2}_{a_2}(\gamma_\rho)} \le k_9 \sum_k \|v_k^0(y')\|_{H^{l_1+2m}_{a_1}(\theta_\sigma)} \le k_{10}\|v\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)}, \tag{2.8}$$

где $\theta_\sigma = \{(\varphi, r)\colon d_1 + \sigma < \varphi < d_2 - \sigma,\, 0 < r\}$.

В силу леммы 3.3.1 из [7] и условия $a_1 - 1 \le a_2$, используя вновь замену переменной $y' = C_{\zeta s} y$, получим

$$\big\|\mathbf{B}^3_\rho(y, D_y)v|_{\gamma_\rho}\big\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\gamma_\rho\cap B_\varepsilon)} \le k_{11}\|v\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)}. \tag{2.9}$$

Наконец, оценим норму функции $\mathbf{B}^4_\zeta v_k$.

По определению функции ξ мы имеем $\operatorname{supp}(\xi(r) - \xi(\chi_{\zeta s} r)) \subset (\delta\chi_{\mathrm{m}}/\chi_{\mathrm{M}}, 3\delta/2)$. Обозначим $\theta^1_{\rho\sigma} = \theta_{\rho\sigma} \cap \{(\varphi, r)\colon \delta\chi_{\mathrm{m}}/\chi_{\mathrm{M}} < r < 3\delta/2\}$. Из определения следа функции, эквивалентности норм в весовых пространствах и пространствах Соболева на множестве $\theta^1_{\rho\sigma}$, а также эквивалентности норм в пространствах Соболева при невырожденной гладкой замене переменных $y' = C_{\zeta s} y$ следует, что

$$\begin{aligned}
\big\|\mathbf{B}^4_\zeta v_k|_{\gamma_\rho}\big\|_{H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}-1/2}_{a_2}(\gamma_\rho\cap B_\varepsilon)} &\le k_{12}\big\|\mathbf{B}^4_\zeta v_k\big\|_{H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}}_{a_2}(\theta_{\rho\sigma})} \le \\
&\le k_{13}\left\|\sum_\alpha \sum_{k,s} (D^\alpha_y v_k)(C_{\zeta s} y)\right\|_{H^{l_1+2m-m_{\rho\mu}}_{a_2}(\theta^1_{\rho\sigma})} \le k_{14}\|v_k(C_{\zeta s} y)\|_{W^{l_1+2m}(\theta^1_{\rho\sigma})} \le \\
&\le k_{15}\|v_k(y')\|_{W^{l_1+2m}(\theta^1_\sigma)} \le k_{16}\|v_k\|_{H^{l_1+2m}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\theta^1_\sigma = \{(r, \varphi)\colon d_1 + \sigma < \varphi < d_2 - \sigma,\, \delta\chi^2_m/\chi_{\mathrm{M}} < r < 3\delta\chi_{\mathrm{M}}/2\}$.

4. Из неравенств (2.6)–(2.10) вытекает, что $f' = \{f'_0, f'_\rho\} \in \mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\theta, \gamma)$, при этом

$$\|f'\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\theta,\gamma)} \le k_{17}\Big(\|f\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\theta\cap B_\varepsilon, \gamma\cap B_\varepsilon)} + \|v\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta\cap B_\varepsilon)}\Big). \tag{2.11}$$

Применяя теперь к нелокальной эллиптической задаче (2.3), (2.4) теорему 4.2.1 из [7] об асимптотическом поведении решений нелокальных задач с постоянными коэффициентами в плоских углах, мы имеем

$$v^0(y) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=0}^{p_j - 1} \alpha_{jn}\, r^{i\lambda_j} (\ln^n r)\psi_{jn}(\varphi) + w(y), \qquad y \in \theta, \tag{2.12}$$

где $w \in H^{l_1+2m,N}_{a_2}(\theta)$ и

$$\|w\|_{H^{l_1+2m,N}_{a_2}(\theta)} \le k_{18}\Big(\|f'\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\theta,\gamma)} + \|f'\|_{\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_1}(\theta,\gamma)}\Big), \tag{2.13}$$

$\psi_{jn} \in C^{\infty,N}[d_1, d_2]$ — вектор-функции, не зависящие от v.

Из равенства $v^0(y) = v(y)$, $y \in \theta \cap B_{\delta_{\mathrm{m}}}$, непрерывности вложения $\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\theta \cap B_\varepsilon, \gamma \cap B_\varepsilon)$ в $\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_1}(\theta \cap B_\varepsilon, \gamma \cap B_\varepsilon)$ и соотношений (2.11)–(2.13) следует утверждение леммы. $\square$

3. ПОДНЯТИЕ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $0<\varepsilon<1$, и пусть $0<\delta_0<\varepsilon/(4\chi_{\mathrm{M}})$.

Лемма 3.1. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит полюсов операторфункции* $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$. *Предположим также, что* $f\in\mathcal{H}^{l+1,N}_{a+1}(\theta\cap B_\varepsilon,\gamma\cap B_\varepsilon)$, *а вектор-функция* $v\in H^{l+2m,N}_a(\theta\cap B_\varepsilon)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1) *в* $\theta\cap B_{2\delta_0}$ *и нелокальным краевым условиям* (1.2) *на* $\gamma_\rho\cap B_{2\delta_0}$.

Тогда существует $0<\delta<\delta_0$ *такое, что* $v\in H^{l+2m+1,N}_{a+1}(\theta\cap B_{\delta_{\mathrm{m}}})$ *и*

$$\|v\|_{H^{l+2m+1}_{a+1}(\theta\cap B_{\delta_{\mathrm{m}}})}\le c\Big(\|f\|_{\mathcal{H}^{l+1,N}_{a+1}(\theta\cap B_\varepsilon,\gamma\cap B_\varepsilon)}+\|v\|_{H^{l+2m,N}_a(\theta\cap B_\varepsilon)}\Big),\tag{3.1}$$

где $\delta_{\mathrm{m}}=\delta\chi_{\mathrm{m}}$.

Доказательство. Для каждого $0<\delta<\delta_0$ определим функцию $\psi_0\in\dot C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\psi_0(t)=1$ для $|t|\le 3\delta/2$, $\operatorname{supp}\psi_0\subset(-2\delta,2\delta)$ и

$$|\psi_0^{(j)}(t)|\le k_1\delta^{-j},\qquad t\in\mathbb{R},\quad j\in\mathbb{R},$$

где $k_1>0$ не зависит от δ.

Пусть $\psi(y)=\psi_0(|y|)$. Введем линейный ограниченный оператор $\mathbf{L}''\colon H^{l+2m,N}_a(\theta)\to\mathcal{H}^{l,N}_a(\theta,\gamma)$ по формуле $\mathbf{L}''v=\mathbf{L}v+\psi(\mathbf{L}'-\mathbf{L})$, где $\mathbf{L}'v=\{\mathbf{A}^0v,\mathbf{B}^0_\rho v|_{\gamma_\rho}+\mathbf{B}^1_\rho v|_{\gamma_\rho}\}$.

Положим $v^0(y)=\xi(r)v(y)$, где функция $\xi(r)$ определена в доказательстве леммы 2.1. Очевидно, $\mathbf{L}'v^0=\mathbf{L}''v^0$, при этом функция v^0 является решением уравнения

$$\mathbf{L}''v^0=f',\tag{3.2}$$

где $f'=\{f'_0,f'_\rho\}$, $f'_0(y)=\xi(r)f_0(y)+\mathbf{A}'(y,D_y)v$ при $y\in\theta\cap B_{3\delta/2}$, $f'_0(y)=0$ при $y\in\theta\setminus B_{3\delta/2}$, $f'_\rho(y)=\xi(r)f_\rho(y)+\mathbf{B}'_\rho(y,D_y)v|_{\gamma_\rho}+\mathbf{B}''_\rho(y,D_y)v|_{\gamma_\rho}$ при $y\in\gamma_\rho\cap B_{3\delta/2}$, $f'_\rho(y)=0$ при $y\in\gamma_\rho\setminus B_{3\delta/2}$, $\mathbf{A}'(y,D_y)$ и $\mathbf{B}'_\rho(y,D_y)$ — матричные операторы порядков $N\times N$ и $mN\times N$ соответственно с элементами, которые являются дифференциальными операторами порядка $2m-1$ и функционально-дифференциальными операторами порядка $m_{\rho\mu}-1$ (μ — номер строки) с гладкими коэффициентами, обращающимися в нуль при $r>3\delta/2$; $\mathbf{B}''_\rho(y,D_y)$ — матричные функционально-дифференциальные операторы порядка $mN\times N$ с элементами

$$B''_\zeta v_k=\sum_{|\alpha|=2m}\sum_s\big(\xi(\chi_{\zeta s}r)-\xi(r)\big)b_{\zeta\alpha s}(y)(D^\alpha_y v_k)(C_{\zeta s}y).\tag{3.3}$$

Очевидно,

$$\big\|\{\mathbf{A}'(y,D_y)v,\mathbf{B}'_\rho(y,D_y)v|_{\gamma_\rho}\}\big\|_{\mathcal{H}^{l+1,N}_{a+1}(\theta,\gamma)}\le k_1\|v\|_{H^{l+2m,N}_a(\theta\cap B_\varepsilon)}.\tag{3.4}$$

Оценим теперь норму функции $B''_\zeta v_k$. Из определения функции ξ следует, что

$$\operatorname{supp}\big(\xi(\chi_{\zeta s}r)-\xi(r)\big)\subset\big[\delta\chi_{\mathrm{m}}/\chi_{\mathrm{M}},3\delta/2\big],\tag{3.5}$$

$$|C_{\zeta s}y|\in\big[\delta\chi_m^2/\chi_{\mathrm{M}},3\delta\chi_{\mathrm{M}}/2\big]\qquad\text{при}\quad r\in\big[\delta\chi_{\mathrm{m}}/\chi_{\mathrm{M}},3\delta/2\big].\tag{3.6}$$

Используя определение следа в весовом пространстве и соотношения (3.5), (3.6), получим

$$\big\|\mathbf{B}''_\zeta v_k|_{\gamma_\rho}\big\|_{H^{l+2m-m_{\rho\mu}+1/2}_{a+1}(\gamma_\rho)}\le\big\|\mathbf{B}''_\zeta v_k\big\|_{H^{l+2m-m_{\rho\mu}+1}_{a+1}(\theta^1_{\rho\sigma})}\le k_2\|v\|_{H^{l+1+2m,N}_{a+1}(\theta^1_\sigma)}.\tag{3.7}$$

Здесь

$$\theta^1_{\rho\sigma}=\theta\cap\big\{(\varphi,r)\in\theta\colon\ |\varphi-d_\rho|<\sigma,\ \delta\chi_{\mathrm{m}}/\chi_{\mathrm{M}}<r<3\delta/2\big\},$$

$$\theta^1_\sigma=\big\{(\varphi,r)\colon\ d_1+\sigma<\varphi<d_2-\sigma,\ \delta\chi_m^2/\chi_{\mathrm{M}}<r<3\delta\chi_{\mathrm{M}}/2\big\}.$$

В силу эквивалентности норм в весовых пространствах и пространствах Соболева в ограниченных подобластях угла θ, не пересекающихся с нулем, и теоремы 15.3 из [8] об априорных оценках решений эллиптических уравнений во внутренних подобластях мы имеем

$$\|v\|_{H_{a+1}^{l+1+2m,N}(\theta_\sigma^1)} \le k_3\|v\|_{W^{l+1+2m,N}(\theta_\sigma^1)} \le k_4\big(\|f_0\|_{W^{l+1,N}(\theta_\sigma^2)} + \|v\|_{L_2(\theta_\sigma^2)}\big) \le$$
$$\le k_5\Big(\|f_0\|_{H_{a+1}^{l+1,N}(\theta\cap B_\varepsilon)} + \|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\theta\cap B_\varepsilon)}\Big), \tag{3.8}$$

где $\theta_\sigma^2 = \{(\varphi, r)\colon d_1 + \sigma/2 < \varphi < d_2 - \sigma/2,\ \delta\chi_m^2/2\chi_{\mathrm{M}} < r < 2\delta\chi_{\mathrm{M}}\}$.

Из (3.4), (3.7), (3.8) следует, что $f' = \{f_0', f_\rho'\} \in \mathcal{H}_{a+1}^{l+1,N}(\theta,\gamma)$.

Оператор $\psi(\mathbf{L}' - \mathbf{L})$ является ограниченным из $H_a^{l+2m,N}(\theta)$ в $\mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ и из $H_{a+1}^{l+1+2m,N}(\theta)$ в $\mathcal{H}_{a+1}^{l+1,N}(\theta)$. Из лемм 3.1.1, 3.1.4 в [7] следует, что $\|\psi(\mathbf{L}' - \mathbf{L})\| \to 0$ при $\delta \to 0$. С другой стороны, поскольку прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не содержит полюсов оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$, то по теореме 4.1.1 из [7] оператор $\mathbf{L}\colon H_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ $\big(H_{a+1}^{l+1+2m,N}(\theta) \to \mathcal{H}_{a+1}^{l+1,N}(\theta,\gamma)\big)$ имеет ограниченный обратный $\mathbf{L}^{-1}\colon \mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to H_a^{l+2m,N}(\theta)$ $\big(\mathcal{H}_{a+1}^{l+1,N}(\theta,\gamma) \to H_{a+1}^{l+1+2m,N}(\theta)\big)$.

Следовательно, оператор $\mathbf{L}''\colon H_a^{l+2m,N}(\theta) \to \mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma)$ $\big(H_{a+1}^{l+1+2m,N}(\theta) \to \mathcal{H}_{a+1}^{l+1,N}(\theta,\gamma)\big)$ имеет ограниченный обратный $(\mathbf{L}'')^{-1}\colon \mathcal{H}_a^{l,N}(\theta,\gamma) \to H_a^{l+2m,N}(\theta)$ $\big(\mathcal{H}_{a+1}^{l+1,N}(\theta,\gamma) \to H_{a+1}^{l+1+2m,N}(\theta)\big)$. Поэтому уравнение (3.2) имеет единственное решение в $H_a^{l+2m,N}(\theta)$ и в $H_{a+1}^{l+1+2m,N}(\theta)$. Таким образом, $v^0 \in H_{a+1}^{l+1+2m,N}(\theta)$. Отсюда и из оценок (3.4), (3.7), (3.8) получим

$$\|v^0\|_{H_{a+1}^{l+1+2m,N}(\theta)} \le k_6\Big(\|f\|_{\mathcal{H}_{a+1}^{l+1,N}(\theta\cap B_\varepsilon,\gamma\cap B_\varepsilon)} + \|v\|_{H_a^{l+2m,N}(\theta\cap B_\varepsilon)}\Big). \tag{3.9}$$

Из определения функции ξ и оценки (3.9) следует утверждение леммы. $\square$

4. РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Вначале мы рассмотрим нелокальные эллиптические задачи с постоянными коэффициентами и правыми частями специального вида.

Определение 4.1. Функции $f_1(r,\varphi) = \sum_{n=0}^M r^\omega(\ln^n r)\psi_1^n(\varphi)$ и $f_2(r) = \sum_{n=0}^M r^\omega(\ln^n r)\psi_2^n$ ($\psi_1^n \in C^\infty[d_1,d_2]$, $\psi_2^n \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{C}$, $M \ge 0$ целое) назовем функциями специального вида с показателем ω.

Покажем, что если координаты правых частей уравнения (1.5) и нелокальные краевые условия (1.6) — функции специального вида с показателями λ_0 и $\lambda_0 + 2m - m_{\rho\mu}$ соответственно, то существует решение краевой задачи (1.5), (1.6), координаты которого являются специальными функциями с показателем $\lambda_0 + 2m$.

Лемма 4.1. *Пусть* $f_{0j}(r,\varphi) = \sum_{n=0}^M r^{\lambda_0}(\ln^n r)\psi_{0j}^n(\varphi)$, $f_{\rho\mu}(r) = \sum_{n=0}^M r^{\lambda_0+2m-m_{\rho\mu}}(\ln^n r)\psi_{\rho\mu}^n$, *где* $M \ge 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\psi_{0j}^n \in C^\infty[d_1,d_2]$, $\psi_{\rho\mu}^n \in \mathbb{C}$, $j = 1,\dots,N$, $\rho = 1,2$, $\mu = 1,\dots,mN$.

Тогда существует решение краевой задачи (1.5), (1.6) *вида*

$$v(y) = \sum_{n=0}^{p+M} r^{\lambda_0+2m}(\ln^n r)\Phi^n(\varphi), \tag{4.1}$$

где p — *кратность полюса* $\lambda = i(\lambda_0 + 2m)$ *оператор-функции* $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$, $\Phi^n \in C^{\infty,N}[d_1,d_2]$.

Замечание 4.1. Если точка $\lambda = i(\lambda_0 + 2m)$ не является полюсом оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$, мы полагаем $p = 0$.

Доказательство леммы 4.1. Сведем задачу (1.5), (1.6) к задаче (1.10), (1.11). В силу условий леммы правые части уравнения (1.10) и нелокальных краевых условий (1.11) примут вид $F_{0j}(\varphi,\tau)=e^{(\lambda_0+2m)\tau}\sum_{n=0}^{M}\tau^n\psi_{0j}^n(\varphi)$ и $F_{\rho\mu}(\tau)=e^{(\lambda_0+2m)\tau}\sum_{n=0}^{M}\tau^M\psi_{\rho\mu}^n$ соответственно. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\lambda_0+2m=0$. Общий случай сводится к этому заменой $v=e^{(\lambda_0+2m)\tau}V$, при этом вместо полюса $\lambda=i(\lambda_0+2m)$ кратности p оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$ мы получим полюс $\lambda=0$ оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{R}}(\lambda+i(\lambda_0+2m))$. Итак, пусть $\lambda_0+2m=0$, т.е. нуль является полюсом оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$. Тогда разложение Лорана оператор-функции $\lambda\mapsto\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$ имеет вид

$$\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)=\sum_{h=0}^{\infty}\mathbf{A}_h\lambda^{h-p}. \tag{4.2}$$

Обозначим через $\mathbf{L}_{\varphi,\tau}$ оператор, определенный по формуле

$$\mathbf{L}_{\varphi,\tau}v=\biggl\{\sum_k\widehat{A}_{jk}(\varphi,D_\varphi,D_\tau)v_k(\varphi,\tau),\,\sum_k\widehat{B}_\zeta(\varphi,D_\varphi,D_\tau)v_k(\varphi,\tau)|_{\varphi=d_\rho}+\\ +\sum_{k,s}e^{-m_{\rho\mu}\ln\chi_{\zeta s}}\widehat{B}^1_{\zeta s}(\varphi,D_\varphi,D_\tau)v_k\bigl(\varphi+\varphi_{\zeta s},\tau+\ln\chi_{\zeta s}\bigr)\bigr|_{\varphi=d_\rho}\biggr\}, \tag{4.3}$$

соответствующий задаче (1.10), (1.11).

Представим оператор $\mathbf{L}_{\varphi,\tau}$ в виде

$$\mathbf{L}_{\varphi,\tau}v=\sum_{q=0}^{\gamma}(-i)^q\frac{\partial^q}{\partial\tau^q}\biggl\{\sum_k\mathcal{A}^q_{jk}v_k(\varphi,\tau)v_k(\varphi,\tau),\,\sum_k\mathcal{B}^q_\zeta v_k(\varphi,\tau)|_{\varphi=d_\rho},\,\sum_{k,s}T^\tau_{\zeta s}T^\varphi_{\zeta s}\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}v_k(\varphi,\tau)|_{\varphi=d_\rho}\biggr\}, \tag{4.4}$$

где $\gamma=\max_{\rho,\mu}\max\{2m,m_{\rho\mu}\}$, $T^\varphi_{\zeta s}u(\varphi,\tau)=u(\varphi+\varphi_{\zeta s},\tau)$, $T^\tau_{\zeta s}u(\varphi,\tau)=u(\varphi,\tau+\ln\chi_{\zeta s})$, $\mathcal{A}^q_{jk}=\mathcal{A}^q_{jk}(\varphi,D_\varphi)$ и $\mathcal{B}^q_\zeta=\mathcal{B}^q_\zeta(\varphi,D_\varphi)$, $\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}=\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}(\varphi,D_\varphi)$ — дифференциальные операторы порядков $2m-q$ и $m_{\rho\mu}-q$ соответственно с переменными коэффициентами класса $C^\infty[d_1,d_2]$. Если $2m-q<0$ ($m_{\rho\mu}-q<0$), мы полагаем $\mathcal{A}^q_{jk}=0$ ($\mathcal{B}^q_\zeta=0$, $\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}=0$).

Функция $T^\varphi_{\zeta s}u(\varphi,\cdot)=u(\varphi+\varphi_{\zeta s},\cdot)$ переменной φ определена на интервале $(d_1-\varphi_{\zeta s},d_2-\varphi_{\zeta s})$, который не совпадает с интервалом (d_1,d_2). Поэтому для определения следа функции $T^\varphi_{\zeta s}u(\varphi,\tau)$ на полупрямой $\{\varphi=d_\rho,\,\tau\in\mathbb{R}\}$ можно рассматривать данную функцию на множестве $\{(\varphi,\tau)\colon |\varphi-d_\rho|<\sigma,\,d_1<\varphi<d_2\}$ (ср. замечание 1.1).

В силу (4.4) оператор $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, определенный по формуле (1.14), можно записать в виде

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u=\sum_{q=0}^{\gamma}\lambda^q\biggl\{\sum_k\mathcal{A}^q_{jk}u_k(\varphi),\,\sum_k\mathcal{B}^q_\zeta u_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho}+\sum_{k,s}e^{i\lambda\ln\chi_{\zeta s}}T^\varphi_{\zeta s}\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}u_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho}\biggr\}. \tag{4.5}$$

Поскольку оператор $\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$ является обратным к оператору $\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, используя (4.5) и (4.2) и вводя новый индекс $t=q+h$, мы получим

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)g=\sum_{q=0}^{\gamma}\sum_{h=0}^{\infty}\lambda^{q+h-p}M_{qh}(\lambda)g=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{t=q}^{\infty}\lambda^{t-p}M_{q,t-q}(\lambda)g=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{t}\lambda^{t-p}M_{q,t-q}(\lambda)g=g, \tag{4.6}$$

где

$$M_{qh}(\lambda)g=\biggl\{\sum_k\mathcal{A}^q_{jk}(\mathbf{A}_hg)_k(\varphi),\,\sum_k\mathcal{B}^q_\zeta(\mathbf{A}_hg)_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho}+\sum_{k,s}e^{i\lambda\ln\chi_{\zeta s}}T^\varphi_{\zeta s}\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}(\mathbf{A}_hg)_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho}\biggr\},$$

если $q\le\gamma$, и $M_{qh}(\lambda)=0$, если $q>\gamma$.

Поскольку множество всех чисел $\{\chi_{\zeta s}\}$ конечно, то мы можем обозначить различные числа этого множества через χ_c ($c = 0, 1, \dots, N_0$, $\chi_0 = 1$, если $1 \in \{\chi_{\zeta s}\}$, и $c = 1, \dots, N_0$, если $1 \notin \{\chi_{\zeta s}\}$), где $s = 1, \dots, S_\zeta$. Функции λ^{t-p}, $\lambda^{t-p} e^{i\lambda \ln \chi_c}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, $c = 1, \dots, N_0$, линейно независимы. Поэтому из (4.6) мы получим

$$\sum_{q=0}^{t} \left\{ \sum_k \mathcal{A}^q_{jk}(\mathbf{A}_{t-q}g)_k(\varphi),\ \sum_k \mathcal{B}^q_\zeta(\mathbf{A}_{t-q}g)_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho} + \sum_{k,s:\ \chi_{\zeta s}=1} T^\varphi_{\zeta s}\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}(\mathbf{A}_{t-q}g)_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho} \right\} = \delta_{tp} g, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.7}$$

$$\sum_{q=0}^{t} \left\{ 0,\ \sum_{k,s:\ \chi_{\zeta s}=\chi_c} T^\varphi_{\zeta s}\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}(\mathbf{A}_{t-q}g)_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho} \right\} = 0, \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \quad c = 1, \dots, N_0,$$

где δ_{tp} — символ Кронекера.

Определим функцию v_0 по формуле

$$v_0(\tau, \varphi) = \sum_{n=0}^{p} \frac{i^n M!}{(n+M)!} \tau^{n+M} (\mathbf{A}_{p-n}\psi^M)(\varphi),$$

где $\psi^M = \{\psi^M_{01}, \dots, \psi^M_{0N}, \psi^M_{\rho 1}, \dots, \psi^M_{\rho N}\}$. По условию $\psi^M_{0j} \in C^\infty[d_1, d_2]$, $j = 1, \dots, N$.

Подставляя функцию $v = v_0$ в выражение (4.4) и полагая $t = p - n + q$, получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\varphi,\tau} v_0 = {} & \sum_{(q,n)\in I_1} \frac{i^{n-q} M!}{(n+M-q)!} \left\{ \sum_k \tau^{n+M-q} \mathcal{A}^q_{jk}(\mathbf{A}_{p-n}\psi^M)_k(\varphi), \right. \\
& \left. \sum_k \tau^{n+M-q} \mathcal{B}^q_\zeta(\mathbf{A}_{p-n}\psi^M)_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho} + \sum_{k,s} (\tau + \ln \chi_{\zeta s})^{n+M-q} T^\varphi_{\zeta s}\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}(\mathbf{A}_{p-n}\psi^M)_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho} \right\} = \\
= {} & \sum_{(q,t)\in I_2} \frac{i^{p-t} M!}{(p+M-t)!} \left\{ \sum_k \tau^{p+M-t} \mathcal{A}^q_{jk}(\mathbf{A}_{t-q}\psi^M)_k(\varphi), \right. \\
& \left. \sum_k \tau^{p+M-t} \mathcal{B}^q_\zeta(\mathbf{A}_{t-q}\psi^M)_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho} + \sum_{k,s} (\tau + \ln \chi_{\zeta s})^{p+M-t} T^\varphi_{\zeta s}\mathcal{B}^{q1}_{\zeta s}(\mathbf{A}_{t-q}\psi^M)_k(\varphi)|_{\varphi=d_\rho} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь I_1 — множество пар целых чисел (q, n), принадлежащих замкнутому множеству, ограниченному прямыми $n = 0$, $n = p$, $q = 0$, $n = q - M$; I_2 — множество пар целых чисел (q, t), принадлежащих замкнутому множеству, ограниченному прямыми $t = p + q$, $t = q$, $q = 0$, $t = p + M$.

Если $M = 0$, то в силу (4.7) мы можем записать равенство (4.8) в виде

$$\mathbf{L}_{\varphi,\tau} v_0 = \sum_{t=0}^{p} \sum_{q=0}^{t} \frac{i^{p-t}}{(p-t)!} \{\dots\} = \psi^0. \tag{4.9}$$

Так как коэффициенты ряда (4.2) $\mathbf{A}_h \colon \mathcal{W}^{l,N}[d_1, d_2] \to W^{l+2m,N}(d_1, d_2)$ — ограниченные операторы при любом $l \geq 0$ в силу теоремы 1.5.2 из [7], а $\psi^M_{0j} \in C^\infty[d_1, d_2]$, то $\mathbf{A}_h\psi^M \in C^{\infty,N}[d_1, d_2]$. Таким образом, если $M > 0$, то

$$\mathbf{L}_{\varphi,\tau} v_0 = \sum_{t=0}^{p+M} \sum_{q=0}^{t} \frac{i^{p-t} M!}{(p+M-t)!} \{\dots\} - \sum_{t=p+1}^{p+M} \sum_{q=0}^{t-p-1} \frac{i^{p-t} M!}{(p+M-t)!} \{\dots\} = \tau^M \psi^M + \sum_{n=0}^{M-1} \tau^n \widetilde{\psi}^n, \tag{4.10}$$

где $\widetilde{\psi}^n = \{\widetilde{\psi}^n_{01}(\varphi), \dots, \widetilde{\psi}^n_{0N}(\varphi), \widetilde{\psi}^n_{\rho 1}, \dots, \widetilde{\psi}^n_{\rho,mN}\}$, $\widetilde{\psi}^n_{0j} \in C^\infty[d_1, d_2]$, $j = 1, \dots, N$, $\widetilde{\psi}^n_{\rho,mN} \in \mathbb{C}$, $\rho = 1, 2$, $\mu = 1, \dots, mN$.

Итак, если $M = 0$, справедливость леммы следует из формулы (4.8). Пусть теперь $M > 0$. В этом случае сделаем замену $v_1 = v - v_0$. Тогда в силу (4.9) функция v_1 удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{L}_{\varphi,\tau} v_1 = \sum_{n=0}^{M-1} \tau^n (\psi^n - \widetilde{\psi}^n),$$

правая часть которого является полиномом степени $M-1$ по τ. Понижая далее степень полинома в правой части, за $M-1$ шагов мы придем к рассмотренной задаче с $M = 0$. $\square$

Рассмотрим теперь решения специального вида нелокальных эллиптических задач с переменными коэффициентами.

Лемма 4.2. *Пусть $f_{0j}(\varphi, r)$, $j = 1, \dots, N$, и $f_{\rho\mu}(r)$, $\rho = 1, 2$, $\mu = 1, \dots, mN$, — функции специального вида с показателями ω и $\omega + 2m - m_{\rho\mu}$ соответственно. Тогда для любых $b \in \mathbb{R}$ и $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$, существует вектор-функция $v = (v_1, \dots, v_N)$, координаты которой являются суммами функций специального вида с показателями $\omega + 2m + s$, $0 \leq s \leq [l - b - \operatorname{Re}\omega - 1]$, такая, что*

$$\mathbf{A}v - f_0 \in H^{l,N}_b(\theta \cap B_1), \qquad \mathbf{B}_\rho v - f_\rho \in \mathcal{H}^{l,N}_b(\gamma_\rho \cap B_1),$$

где $f_0 = (f_{01}, \dots, f_{0N})$, $f_\rho = (f_{\rho 1}, \dots, f_{\rho,mN})$.

Доказательство. 1. Пусть $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Разложим эту функцию по формуле Тейлора

$$a(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left[\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^k a(x) \right] \Big|_{x=0} + a_{n+1}(y), \qquad y \in B_1.$$

Переходя к полярным координатам r, φ, мы можем переписать эту формулу в виде

$$a(y) = \widetilde{a}(y) + \widetilde{\widetilde{a}}(y), \qquad y \in B_1, \tag{4.11}$$

где $\widetilde{a}(y) = \sum_{k=0}^n r^k \omega_k(\varphi)$, $\widetilde{\widetilde{a}}(y) = a_{n+1}(y)$.

Очевидно, $\widetilde{\widetilde{a}}(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $D^\alpha_y \widetilde{\widetilde{a}}(y)|_{y=0} = 0$ при $|\alpha| \leq n$, $\left| r^{|\alpha|-n-1} D^\alpha_y \widetilde{\widetilde{a}}(y) \right| \leq c_\alpha$ при $y \in B_1$.

Представим коэффициенты операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_\rho$ в виде

$$a_{jk\alpha}(y) = \widetilde{a}_{jk\alpha}(y) + \widetilde{\widetilde{a}}_{jk\alpha}(y), \qquad b_{\zeta\alpha s}(y) = \widetilde{b}_{\zeta\alpha s}(y) + \widetilde{\widetilde{b}}_{\zeta\alpha s}(y).$$

Матричные операторы с соответствующими коэффициентами будем обозначать добавлением волн, например $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}} + \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}$, $\mathbf{B}_\rho = \widetilde{\mathbf{B}}_\rho + \widetilde{\widetilde{\mathbf{B}}}_\rho$ и т.д. Указанные разложения зависят от числа n, которое будет выбрано ниже.

2. Покажем, что при любом целом H существует вектор-функция $v^H(y)$, являющаяся суммой вектор-функций специального вида с показателями, равными $\omega + 2m + s$, $0 \leq s \leq H$, такая, что $\widetilde{\mathbf{A}} v^H - f_0$ есть сумма вектор-функций специального вида с показателями, равными $\omega + H + i$, $i > 0$, а каждая из функций $(\widetilde{\mathbf{B}}_\rho v^H - f_\rho)_\mu$ есть сумма функций специального вида с показателями, равными $\omega + 2m - m_{\rho\mu} + H + i$, $i > 0$. Докажем это индукцией по H.

2.1. Пусть $H = 0$. В качестве вектор-функции v^0 возьмем вектор-функцию специального вида с показателем, равным $\omega + 2m$, которая является решением задачи

$$\mathbf{A}^0(0, D_y) v^0 = f_0(y), \qquad y \in \theta,$$

$$\mathbf{B}^0_\rho(0, D_y) v^0|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}^1_\rho(0, D_y) v^0|_{\gamma_\rho} = f_\rho(y), \qquad y \in \gamma_\rho, \quad \rho = 1, 2.$$

Такое решение существует в силу леммы 4.1.

Тогда вектор-функция

$$\widetilde{\mathbf{A}}v^0 - f_0 = \big(\widetilde{\mathbf{A}}^0(y, D_y) - \mathbf{A}^0(0, D_y)\big)v^0 + \widetilde{\mathbf{A}}^1(y, D_y)v^0$$

есть сумма специальных функций с показателями, равными $\omega + 2m - 2m + i$, $i > 0$.

Аналогично функция

$$\big(\widetilde{\mathbf{B}}_\rho v^0 - f_\rho\big)_\mu = \Big(\big(\widetilde{\mathbf{B}}^0_\rho(y, D_y) - \mathbf{B}^0_\rho(0, D_y)\big)v^0\Big)_\mu\Big|_{\gamma_\rho} + \Big(\big(\widetilde{\mathbf{B}}^1_\rho(y, D_y) - \mathbf{B}^1_\rho(0, D_y)\big)v^0\Big)_\mu\Big|_{\gamma_\rho} + \\ + \big(\widetilde{\mathbf{B}}^3_\rho(y, D_y)v^0\big)_\mu\big|_{\gamma_\rho}$$

есть сумма специальных функций с показателями $\omega + 2m - m_{\rho\mu} + i$, $i > 0$.

2.2. Пусть теперь существует вектор-функция v^{H-1}, являющаяся суммой вектор-функций специального вида с показателями $\omega + 2m + s$, $0 \le s \le H - 1$, такая, что вектор-функция $\widetilde{\mathbf{A}}v^{H-1} - f_0$ есть сумма вектор-функций специального вида с показателями, равными $\omega + i + H - 1$, $i > 0$, а $(\widetilde{\mathbf{B}}_\rho v^{H-1} - f_\rho)_\mu$ — сумма специальных функций с показателями $\omega + 2m - m_{\rho\mu} + i + H - 1$, $i > 0$.

Обозначим через $[\widetilde{\mathbf{A}}v^{H-1} - f_0]_H$ сумму членов, входящих в $\widetilde{\mathbf{A}}v^{H-1} - f_0$ и имеющих показатель $\omega + H$, через $[(\widetilde{\mathbf{B}}_\rho v^{H-1} - f_\rho)_\mu]_H$ сумму членов, входящих в $(\widetilde{\mathbf{B}}_\rho v^{H-1} - f_\rho)_\mu$ и имеющих показатель $\omega + 2m - m_{\rho\mu} + H$, а через $[\widetilde{\mathbf{B}}_\rho v^{H-1} - f_\rho]_H$ обозначим вектор-функцию с соответствующими координатами.

Рассмотрим решение задачи

$$\mathbf{A}^0(0, D_y)w = -\big[\widetilde{\mathbf{A}}v^{H-1} - f_0\big]_H,$$

$$\mathbf{B}^0_\rho(0, D_y)w|_{\gamma_\rho} + \mathbf{B}^1_\rho(0, D_y)w|_{\gamma_\rho} = -\big[\widetilde{\mathbf{B}}_\rho v^{H-1} - f_\rho\big]_H,$$

которое является суммой вектор-функций специального вида с показателями $\omega + 2m + H$. Такое решение существует в силу леммы 4.1.

Положим $v^H = v^{H-1} + w$. Докажем, что $\widetilde{\mathbf{A}}v^H - f_0$ есть сумма вектор-функций специального вида с показателями $\omega + H + i$, $i > 0$. Действительно,

$$\widetilde{\mathbf{A}}v^H - f_0 = \widetilde{\mathbf{A}}v^{H-1} + \widetilde{\mathbf{A}}w - f_0 = \big(\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^0(0, D_y)\big)w + \mathbf{A}^0(0, D_y)w + \widetilde{\mathbf{A}}v^{H-1} - f_0 = \\ = \big(\widetilde{\mathbf{A}}^0(y, D_y) - \mathbf{A}^0(0, D_y)\big)w + \widetilde{\mathbf{A}}^1(y, D_y)w - \big[\widetilde{\mathbf{A}}v^{H-1} - f_0\big]_H + \widetilde{\mathbf{A}}v^{H-1} - f_0.$$

Из вида правой части этого соотношения следует утверждение об искомом представлении вектор-функции $\widetilde{\mathbf{A}}v^H - f_0$.

Аналогично можно показать, что $(\widetilde{\mathbf{B}}_\rho v^H - f_\rho)_\mu$ есть сумма функций специального вида с показателями $\omega + 2m - m_{\rho\mu} + H + i$, $i > 0$.

3. Пусть $n > l - 2 - b - \operatorname{Re}\omega$. Тогда в силу лемм 3.3.3, 3.3.4, 3.3.10, 3.3.11 из [7] $\widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}v^H \in \in H^{l,N}_b(\theta \cap B_1)$ и $\widetilde{\widetilde{\mathbf{B}}}_\rho v^H \in \mathcal{H}^{l,N}_b(\gamma_\rho \cap B_1)$.

Выберем теперь $H > l - 2 - b - \operatorname{Re}\omega$. Тогда в силу доказанного в п. 2 и лемм 3.3.10, 3.3.11 из [7] $\widetilde{\mathbf{A}}v^H - f_0 \in H^{l,N}_b(\theta \cap B_1)$ и $\widetilde{\mathbf{B}}_\rho v^H - f_\rho \in \mathcal{H}^{l,N}_b(\gamma_\rho \cap B_1)$.

Следовательно, $\mathbf{A}v^H - f_0 \in H^{l,N}_b(\theta \cap B_1)$, $\mathbf{B}_\rho v^H - f_\rho \in \mathcal{H}^{l,N}_b(\gamma_\rho \cap B_1)$. $\square$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Доказательство. 1. Рассмотрим вначале случай $l_2 = l_1$, $a_1 - 1 \le a_2 < a_1$. Тогда утверждение теоремы следует из леммы 2.1.

2. Пусть теперь $l_2 = l_1$, $a_1 - 2 < a_2 \le a_1 - 1$. Выберем число a_2' так, что $a_2' \in (a_1 - 1, a_1)$, $a_2 \in (a_2' - 1, a_2')$ и на прямой $\operatorname{Im}\lambda = h_2' = a_2' + 1 - l_1 - 2m$ нет полюсов оператор-функции

$\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$. Из неравенства $a_2 < a_2'$ следует, что $\mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\theta \cap B_\varepsilon, \gamma \cap B_\varepsilon) \subset \mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2'}(\theta \cap B_\varepsilon, \gamma \cap B_\varepsilon)$. Используя теперь лемму 2.1 с a_2' вместо a_2, получим

$$v(y) = v^1(y) + w^1(y), \qquad y \in \theta \cap B_\delta, \tag{5.1}$$

где

$$v^1(y) = \sum_{h_2' < \operatorname{Im}\lambda_j < h_1} \sum_{p=0}^{p_j-1} \alpha^1_{jp}\, r^{i\lambda_j} (\ln^p r) \psi^1_{jp}(\varphi), \qquad y \in \theta \cap B_{\delta_1},$$

$w^1 \in H^{l_1+2m,N}_{a_2'}(\theta \cap B_{\delta_1})$, $\psi^1_{jp} \in C^{\infty,N}[d_1, d_2]$ — вектор-функции, не зависящие от v, $\alpha^1_{jp} \in \mathbb{C}$, $\delta_1 = \delta_0 \chi_{\mathrm{m}}$.

Применим к левой и правой частям равенства (5.1) оператор $\mathbf{A}$, представленный в виде $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}} + \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}$ с $n = 1$ (см. доказательство леммы 4.2). Из равенства $\mathbf{A}^0(0, D_y)v^1(y) = 0$, $y \in \theta \cap$ $\cap B_{\delta_1}$, мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}w^1 &= \mathbf{A}v - \big(\widetilde{\mathbf{A}}^0(y, D_y) - \widetilde{\mathbf{A}}^0(0, D_y) + \widetilde{\mathbf{A}}^1(y, D_y)\big)v^1 - \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}v^1 = \\ &= \sum_{j,p} \sum_{l=0}^{2m-1} \alpha_{0jpl} r^{i\lambda_j - l} (\ln^p r) \psi^1_{0jpl}(\varphi) + f_0 - \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}v^1, \qquad y \in \theta \cap B_{\delta_1}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\psi^1_{0jpl} \in C^{\infty,N}[d_1, d_2]$ — вектор-функции, не зависящие от v, $\alpha_{0jpl} \in \mathbb{C}$.

Поскольку $\operatorname{Im}\lambda_j < h_1$, в силу леммы 3.3.10 из [7] $v^1 \in H^{l_1+2m,N}_{a_1}(\theta \cap B_{\delta_1})$. Отсюда, а также из леммы 3.3.3 в [7], условия $n = 1$ в разложении $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}} + \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}$, неравенства $a_2 > a_1 - 2$ и неравенства (4.11) следует, что $\widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}v^1 \in H^{l_1,N}_{a_2}(\theta \cap B_{\delta_1})$. Итак,

$$f_0 - \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}v^1 \in H^{l_1,N}_{a_2}(\theta \cap B_{\delta_1}). \tag{5.3}$$

Применим теперь к левой и правой частям равенства (5.1) оператор $\mathbf{B}_\rho$, представленный в виде $\mathbf{B}_\rho = \widetilde{\mathbf{B}}_\rho + \widetilde{\widetilde{\mathbf{B}}}_\rho$ с $n = 1$. Из равенства $\big(\mathbf{B}^0_\rho(0, D_y) + \mathbf{B}^1_\rho(0, D_y)\big)v^1|_{\gamma_\rho} = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_\rho w^1)_\mu &= (\mathbf{B}_\rho v)_\mu - \Big[\Big(\big(\widetilde{\mathbf{B}}^0_\rho(y, D_y) - \mathbf{B}^0_\rho(0, D_y)\big)v^1\Big)_\mu\Big|_{\gamma_\rho} + \\ &\quad + \Big(\big(\widetilde{\mathbf{B}}^1_\rho(y, D_y) - \mathbf{B}^1_\rho(0, D_y)\big)v^1\Big)_\mu\Big|_{\gamma_\rho} + \big(\widetilde{\mathbf{B}}^2_\rho(y, D_y)v^1\big)_\mu|_{\gamma_\rho}\Big] - \big(\widetilde{\widetilde{\mathbf{B}}}_\rho v^1\big)_\mu = \\ &= \sum_{j,p} \sum_{l=0}^{m_{\rho\mu}-1} \alpha_{\rho\mu jpl}\, r^{i\lambda_j - l} \ln^p r + f_\rho - \big(\widetilde{\widetilde{\mathbf{B}}}_\rho v^1\big)_\mu, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\alpha_{\rho\mu jpl} \in \mathbb{C}$.

Используя лемму 3.3.4 из [7], аналогично случаю вектор-функции $\widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}v^1$ получим $\widetilde{\widetilde{\mathbf{B}}}_\rho v^1 \in$ $\in \mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\gamma_\rho \cap B_{\delta_1})$. Таким образом,

$$f_\rho - \widetilde{\widetilde{\mathbf{B}}}_\rho v^1 \in \mathcal{H}^{l_1,N}_{a_2}(\gamma_\rho \cap B_{\delta_1}). \tag{5.5}$$

В силу (5.2)–(5.5) и леммы 4.2 существует вектор-функция

$$v^2(y) = \sum_{h_2 < \operatorname{Im}\lambda_j < h_2'} \sum_{1 \le s \le [\operatorname{Im}\lambda_j - h_2]} \sum_{0 \le q \le Q_{j1}} \alpha_{jsq}\, r^{i\lambda_j + s} (\ln^q r) \psi^2_{jsq}(\varphi) \tag{5.6}$$

такая, что

$$\mathbf{A}(v^2 - w^1) \in H_{a_2}^{l_1,N}(\theta \cap B_{\delta_1}), \tag{5.7}$$

$$\mathbf{B}_\rho(v^2 - w^1) \in \mathcal{H}_{a_2}^{l_1,N}(\gamma_\rho \cap B_{\delta_1}), \tag{5.8}$$

где $\psi_{jsq}^2 \in C^{\infty,N}[d_1, d_2]$ — вектор-функции, не зависящие от v, $\alpha_{jsq} \in \mathbb{C}$.

Следовательно, вектор-функция $w^2 = w^1 - v^2$ удовлетворяет уравнению (1.1) с нелокальными краевыми условиями (1.2), имеющими правые части из $H_{a_2}^{l_1,N}(\theta \cap B_{\delta_1})$ и $\mathcal{H}_{a_2}^{l_1,N}(\gamma_\rho \cap B_{\delta_1})$ соответственно. По построению $w^1 \in H_{a_2'}^{l_1+2m,N}(\theta \cap B_{\delta_1})$. А из формулы (5.6) и леммы 3.3.10 из [7] следует, что $v^2 \in H_{a_2'}^{l_1+2m,N}(\theta \cap B_{\delta_1})$. Таким образом, $w^2 \in H_{a_2'}^{l_1+2m,N}(\theta \cap B_{\delta_1})$. Применяя лемму 2.1 с a_2' вместо a_1 к задаче (5.7), (5.8), в силу неравенства $a_2' - 1 < a_2 < a_2'$ получим для функции w^2 представление вида

$$w^2(y) = \sum_{h_2 < \lambda_j < h_2'} \sum_{p=0}^{p_j - 1} \alpha_{jp}^2 r^{i\lambda_j} (\ln^p r) \psi_{jp}^2(\varphi) + w^3(y), \qquad y \in \theta \cap B_{\delta_2}, \tag{5.9}$$

где $\alpha_{jp}^2 \in \mathbb{C}$, $\psi_{jp}^2 \in C^{\infty,N}[d_1, d_2]$ — вектор-функции, не зависящие от w^2, $w^3 \in H_{a_2}^{l_1+2m,N}(\theta \cap B_{\delta_2})$, $\delta_2 > 0$ достаточно мало.

Таким образом, в случае $a_1 - 2 < a_2 \leq a_1 - 1$ из равенств (5.1), (5.6), (5.9) мы получим представление (1.15) с $\delta = \delta_2$.

3. Пусть по-прежнему $l_2 = l_1$. Предположим, что утверждение леммы справедливо для любых a_1, a_2 таких, что $a_1 - (j-1) < a_2 < a_1$, $j > 2$. Докажем его при $a_1 - j < a_2 \leq a_1 - (j-1)$. Для этого обозначим $\widetilde{a}_1 = a_1 - (j-2)$. Тогда остается доказать лемму для $\widetilde{a}_1 - 2 < a_2 \leq \widetilde{a}_1 - 1$ при условии, что она справедлива для $\widetilde{a}_1 - 1 < a_2 < \widetilde{a}_1$. Последнее утверждение доказывается аналогично п. 2.

4. Пусть теперь $l_2 > l_1$. Тогда $f \in \mathcal{H}_{a_2-(l_2-l_1)}^{l_1,N}(\theta \cap B_\varepsilon)$. Согласно доказанному в п. 3 мы получаем представление (1.15), где $w \in H_{a_2-(l_2-l_1)}^{l_1+2m,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$, $\delta_3 \in (0, \delta_2)$ — некоторое число. Если $\mathbf{A}w \in H_{a_2}^{l_2,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$, $\mathbf{B}_\rho w \in \mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\gamma \cap B_{\delta_3})$, применяя $l_2 - l_1$ раз лемму 3.1, мы получим $w \in H_{a_2}^{l_2+2m,N}(\theta \cap B_\delta)$, где $\delta \in (0, \delta_3)$ — некоторое число.

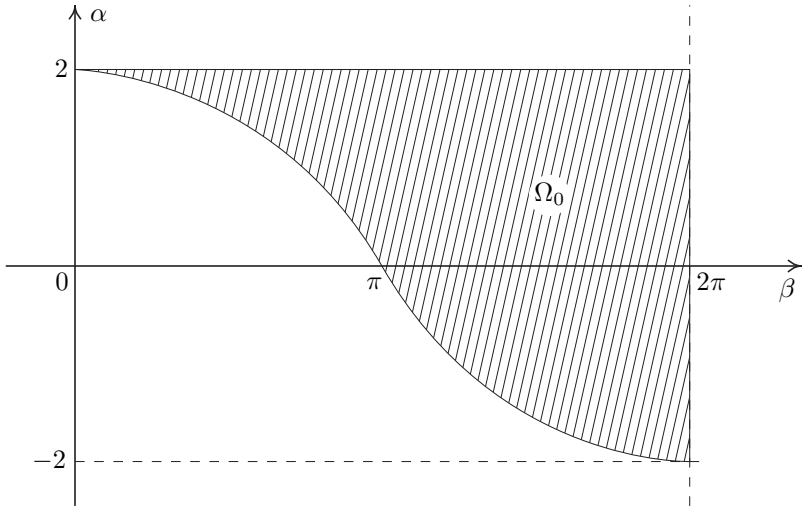
Осталось доказать, что $\mathbf{A}w \in H_{a_2}^{l_2,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$, $\mathbf{B}_\rho w \in \mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\gamma \cap B_{\delta_3})$. Докажем, например, что $\mathbf{A}w \in H_{a_2}^{l_2,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$. Представим оператор $\mathbf{A}$ в виде $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}} + \widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}$. Координаты вектор-функции $v^0 = v - w$ являются суммой функций специального вида. Поэтому мы можем выбрать число n в разложении оператора $\mathbf{A}$ настолько большим, что $\widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}}v^0 \in H_{a_2}^{l_2,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$. Следовательно, $\widetilde{\mathbf{A}}v^0 \in H_{a_2-(l_2-l_1)}^{l_1,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$. Поскольку $f_0 = \mathbf{A}v \in H_{a_2}^{l_2,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$ и $w \in H_{a_2-(l_2-l_1)}^{l_1+2m,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$, то $\mathbf{A}v \in H_{a_2-(l_2-l_1)}^{l_1,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$ и $\mathbf{A}w \in H_{a_2-(l_2-l_1)}^{l_1,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$. Поэтому $\widetilde{\mathbf{A}}v^0 \in H_{a_2-(l_2-l_1)}^{l_1,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$. Координаты этой вектор-функции являются функциями специального вида. Следовательно, в силу леммы 3.3.10 из [7] $\widetilde{\mathbf{A}}v^0 \in H_{a_2}^{l_2,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$, т.е. $\mathbf{A}v^0 \in H_{a_2}^{l_2,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{A}w = \mathbf{A}v - \mathbf{A}v^0 \in H_{a_2}^{l_2,N}(\theta \cap B_{\delta_3})$. $\square$

Замечание 5.1. Из лемм 2.1, 3.1 и доказательств лемм 4.1, 4.2 и теоремы 1.1 следует, что для функции w из равенства (1.15) справедлива оценка

$$\|w\|_{H_{a_2}^{l_2+2m,N}(\theta \cap B_\delta)} \leq c\Big(\|f\|_{\mathcal{H}_{a_2}^{l_2,N}(\theta \cap B_\varepsilon, \gamma \cap B_\varepsilon)} + \|v\|_{H_{a_1}^{l_1+2m,N}(\theta \cap B_\varepsilon)}\Big). \tag{5.10}$$

6. ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

В этом разделе на конкретном примере мы изучим применение асимптотических формул к исследованию гладкости обобщенных решений нелокальных эллиптических задач вблизи точки сопряжения.



Рассмотрим нелокальную задачу

$$-\Delta v(y) = f_0(y), \qquad y \in \theta, \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} v(\varphi, r)|_{\gamma_1} - \alpha v(\varphi + \beta/2, r)|_{\gamma_1} &= 0, \qquad y \in \gamma_1, \\ v(\varphi, r)|_{\gamma_2} &= 0, \qquad y \in \gamma_2, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $\theta = \{y\colon 0 < \varphi < \beta, 0 < r\}$, $\gamma_1 = \{y\colon \varphi = 0, 0 < r\}$, $\gamma_2 = \{y\colon \varphi = \beta, 0 < r\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 2\pi$, $f_0 \in L_2(\theta)$.

Введем неограниченный линейный оператор $\mathcal{A}_\alpha\colon D(\mathcal{A}_\alpha) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве обобщенных функций $D'(\theta)$ по формуле $\mathcal{A}_\alpha v = -\Delta v$, $v \in D(\mathcal{A}_\alpha) = \{v \in W^1_\alpha(\theta)\colon \mathcal{A}_\alpha v \in L_2(\theta)\}$, $W^1_\alpha(\theta) = \{w \in W^1_2(\theta)\colon w(\varphi, r)|_{\gamma_1} - \alpha w(\varphi + \beta/2, r)|_{\gamma_1} = 0,\ w(\varphi, r)|_{\gamma_2} = 0\}$, $W^k(\theta)$ — пространство Соболева функций из $L_2(\theta)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(\theta)$.

Определение 6.1. Функцию $v \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ мы будем называть обобщенным решением задачи (6.1), (6.2), если $\mathcal{A}_\alpha v = f_0$.

Легко показать, что если v — обобщенное решение задачи (6.1), (6.2), то $v \in W^2(\theta \cap (B_r \setminus B_\varepsilon))$ для любых R, ε, $0 < \varepsilon < R$ (см. пример 4.3.2 из [7]).

Определение 6.2. Будем говорить, что гладкость обобщенных решений задачи (6.1), (6.2) сохраняется вблизи точки сопряжения, если для любой функции $v \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ имеем $v \in \in W^2(\theta \cap B_1)$. Если же существует функция $v_0 \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ такая, что $v_0 \notin W^2(\theta \cap B_1)$, мы будем говорить, что гладкость обобщенных решений нарушается вблизи точки сопряжения.

Покажем, что гладкость обобщенных решений задачи (6.1), (6.2) сохраняется тогда и только тогда, когда $(\beta, \alpha) \in \Omega \setminus \Omega_0$, где $\Omega = \{(\beta, \alpha)\colon -\infty < \alpha < \infty, 0 < \beta < 2\pi\}$, $\Omega_0 = \{(\beta, \alpha)\colon 2\cos\frac{\beta}{2} < \alpha < 2, 0 < \beta < 2\pi\}$ (см. рисунок).

Оператор-функция $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda) \in \mathcal{B}(W^2(0, \beta), \mathcal{W}[0, \beta])$, определенная по формуле (1.14) и соответствующая задаче (6.1), (6.2), имеет вид

$$\widehat{\mathbf{L}}(\lambda)u = \bigl(-u_{\varphi\varphi} + \lambda^2 u,\ u|_{\varphi=0} - \alpha u|_{\varphi=\beta/2},\ u|_{\varphi=\beta}\bigr),$$

где $\mathcal{W}[0, \beta] = L_2(0, \beta) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

1. Пусть $(\beta, \alpha) \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$, и пусть $v \in D(\mathcal{A}_\alpha)$. Тогда в силу примера 4.2.2 из [7] полоса $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon -1 \le \operatorname{Im}\lambda < 0\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$.

С другой стороны, в примере 4.3.2 из [7] показано, что из включения $v \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ следует, что $v \in H^2_1(\theta \cap B_1)$. Применим теперь теорему 1.1 в случае $l_1 = l_2 = 0$, $m = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, т.е. $h_1 = 0$, $h_2 = -1$. Тогда мы получим $v \in H^2_0(\theta \cap B_1) \subset W^2(\theta \cap B_1)$. Таким образом, при $(\beta, \alpha) \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$ гладкость обобщенных решений сохраняется.

2. Пусть теперь $(\beta, \alpha) \in \Omega_0$. Тогда в силу примера 4.2.2 из [7] существует собственное значение $\lambda = -i\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$, оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$. Обозначим через $\psi(\varphi) \in C^\infty[0, \beta]$ соответствующую собственную функцию. Положим $v = r^\varkappa \psi(\varphi)\xi_0(r)$, где $\xi_0 \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \xi_0(t) \le 1$, $\xi_0(t) = 1$ при $|t| \le 1$, $\xi_0(t) = 0$ при $|t| \ge 2$. По построению $v \in W^1_\alpha(\theta)$. Кроме того, в силу формулы Лейбница $\Delta v = 2\nabla(r^\varkappa \psi(\varphi))\nabla\xi_0(r) + r^\varkappa \psi(\varphi)\Delta\xi(r) \in L_2(\theta)$, т.е. $v \in D(\mathcal{A}_\alpha)$. Однако поскольку $0 < \varkappa < 1$, то $v \notin W^2(\theta \cap B_1)$. Таким образом, при $(\beta, \alpha) \in \Omega_0$ гладкость обобщенных решений нарушается.

3. Пусть, наконец, $\alpha = 2\cos\frac{\beta}{2}$, $0 < \beta < 2\pi$. Тогда в силу примеров 4.2.1, 4.2.2 из [7] полоса $-1 < \operatorname{Im}\lambda < 0$ не содержит собственных значений оператор-функции $\lambda \mapsto \widehat{\mathbf{L}}(\lambda)$, а прямая $\operatorname{Im}\lambda = -1$ содержит ровно одно простое собственное значение $\lambda = -i$, при этом $r\psi(\varphi) = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где $\psi(\varphi)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda = -i$. Таким образом, собственное значение $\lambda = -i$ является правильным и по теореме 4.1 из [9] $v \in W^2(\theta \cap B_1)$, где $v \in D(\mathcal{A}_\alpha)$. Таким образом, в случае $\alpha = 2\cos\frac{\beta}{2}$, $0 < \beta < 2\pi$, гладкость обобщенных решений сохраняется.

Замечание 6.1. Отметим, что в задаче (6.1), (6.2) гладкость обобщенных решений может нарушаться вблизи плоской границы для сколь угодно малых коэффициентов в нелокальных членах. С другой стороны, если коэффициенты в нелокальных членах достаточно велики, то гладкость обобщенных решений сохраняется для любых углов. Вопрос о том, можно ли доказать аналогичные в некотором смысле утверждения для произвольных нелокальных эллиптических задач вида (1.1), (1.2), является открытым.

Автор благодарит П.Л. Гуревича за обсуждение работы и ряд советов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
2. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
3. *Скубачевский А.Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Мат. сб. 1986. Т. 129, № 2. С. 279–302.
4. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
5. *Гуревич П.Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2003. Т. 23. С. 93–126.
6. *Солдатов А.П.* Задача Бицадзе–Самарского для функций, аналитических по Дуглису // Диф. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 396–407.
7. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I, II. М.: Рос. ун-т дружбы народов, 2007, 2009. (Совр. математика. Фунд. напр.; Т. 26, 33).
8. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial dufferential equations satisfying general boundary conditions. I // Commun. Pure and Appl. Math. 1959. V. 12. P. 623–727.
9. *Gurevich P.* Smoothness of generalized solutions for higher-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions // J. Diff. Equat. 2008. V. 245, N 5. P. 1323–1355.