D. A. Soshin, The constructive method for synthesis of balanced k-valued algebraic threshold functions,
Comp. nanotechnol., 2015, Issue 4, 31–36

2.2. КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА СБАЛАНСИРОВАННЫХ К-ЗНАЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

Сошин Данил Андреевич, аспирант, технологический факультет ФГУП «НИИ «КВАНТ». E-mail: danil_re@list.ru

Аннотация: Интерес к изучению пороговых функций многозначной логики объясняется простотой их задания и легкой вычислимости, сводящейся к подсчету скалярного произведения, которое, в свою очередь, может быть сравнительно легко реализовано как в традиционной вычислительной среде современных ЭВМ, так и перспективных оптических компьютерах [3]. В работах [6, 5] доказана полнота базиса многозначных пороговых функций, что дает возможность использовать их для реализации любой многозначной системы.

В данной статье класс пороговых многозначных функций расширяется за счет приведения линейной формы по некоторому модулю, образуя новый класс алгебраических пороговых функций (АПФ). Модульная операция сохраняет простоту вычисления пороговых функций, но значительно расширяет их функциональные возможности. Важным результатом статьи является конструктивное доказательство существования сбалансированных функций из класса АПФ, которые не являются пороговыми функциями.

Ключевые слова: многозначная логика, пороговые функции, алгебраические пороговые функции, сбалансированные функции.

THE CONSTRUCTIVE METHOD FOR SYNTHESIS OF BALANCED K-VALUED ALGEBRAIC THRESHOLD FUNCTIONS

Soshin Danil Andreevich, postgraduate, technological faculty, Research Institute KVANT. E-mail: danil_re@list.ru

Abstract: The interest of studying of threshold functions multiple-valued logic exists thanks to simplicity of their tasks and easiness of counting, which consists of the sum of scalar product. This sum can reflect either it traditional counting area of modern PC or in perspective optical computers [3]. The completeness of the basis of the multiple-valued threshold functions is proved in the article [6, 5]. This fact gives an opportunity to use them for realization of any multiple-valued system.

There is a class of multiple-valued threshold functions which expands thanks to taking reduction of linear form according to module. Also this class becomes a new one of algebraical threshold functions (ATF). The modular operation saves the simplicity of counting threshold functions, but also it expands its functional opportunities. The constructive evidence of existing balanced functions from class ATF, which are not threshold functions – is important result of the article.

Index terms: multiple-valued logic, threshold functions, algebraical threshold functions, balanced functions.

В работах [1, 3] было приведено следующее определение *k-значной пороговой функции*.

Определение 1. Дискретная k-значная функция $f\colon \Omega_k^n \to \Omega_k$ называется *пороговой*, если существуют целочисленные наборы $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и $(b_0, b_1, \dots, b_k)$ такие, что для любого $\alpha \in \overline{0, k-1}$ выполняется

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \iff$$
$$\iff b_\alpha \le c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n < b_{\alpha+1}, \qquad (1)$$

где вычисление линейной формы $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ и операции сравнения производится над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Набор $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ назовем *вектором коэффициентов линейной формы*, а $(b_0, b_1, \dots, b_k)$ – *вектором порогов* функции f. Элементы множества $\Omega_k^n = \{0, 1, \dots, k-1\}^n$ $(\Omega_k = \Omega_k^1)$ будем называть *точками* и ассоциировать их с точками в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Алгебраическую пороговую функцию (АПФ) определим следующим образом.

Определение 2. Дискретная k-значная функция $f\colon \Omega_k^n \to \Omega_k$ называется *алгебраической пороговой*, если существуют целочисленные наборы $(c_0, c_1, \dots, c_n)$, $(b_0, b_1, \dots, b_k)$ и модуль m такие, что для любого $\alpha \in \overline{0, k-1}$ выполняется

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \iff$$
$$\iff b_\alpha \le r_m(c_0 + c_1x_1 + +c_2x_2 + \dots + c_nx_n) < b_{\alpha+1}, \quad (2)$$

где вычисление линейной формы $c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ и операции сравнения производится над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, а $r_m(y)$- *функция взятия остатка* при делении целого числа y на модуль m.

Сравнение (2) можно записать следующим образом

$$b_\alpha \le c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + mt < b_{\alpha+1}, \quad (3)$$

где $t \in \mathbb{Z}$ (см. [2], том 1, глава V. §1).

Заметим, что в определении пороговой функции все числа, задающие пороги $b_0, b_1, \dots, b_k$, строго упорядочены и часть из них может быть отрицательной. Для того, чтобы введенная функция была определена в любой точке, необходимо чтобы выполнялись условия $b_0 \le 0$ и $b_k \ge m$.

Пример 1. Зададим 3-значную алгебраическую пороговую функцию $f(x_1, x_2)$, в обозначениях определения 2, вектором коэффициентов линейной формы

$$(c_0, c_1, c_2) = (0{,}2{,}3),$$

и вектором порогов

$$(b_0, b_1, b_2, b_3) = (0{,}3{,}6{,}9),$$

а модуль m, положим равным $b_3 = 9$. Выпишем неравенства задающие значения функции:

$$f(x_1, x_2) = 0 \iff 0 \le r_9(2x_1 + 3x_2) < 3;$$
$$f(x_1, x_2) = 1 \iff 3 \le r_9(2x_1 + 3x_2) < 6;$$
$$f(x_1, x_2) = 2 \iff 6 \le r_9(2x_1 + 3x_2) < 9.$$

Представим полученную алгебраическую пороговую функцию $f(x_1, x_2)$ в табличном виде (см. Табл.1),

Табл.1.

Табличное задание функции $f(x_1, x_2)$ в примере 1.

x_1 / x_2	**0**	**1**	**2**
0	0	0	1
1	1	1	2
2	2	2	0

где первая строчка и первый столбец задают значения переменных x_1 и x_2 соответственно, а в пересечении строк и столбцов стоит значение функции $f(x_1, x_2)$ в данной точке.

Введем обозначения:

T_n^k – *класс* всех k-значных *пороговых функций* от n переменных;

AT_n^k- *класс* всех k-значных *алгебраических пороговых функций* от n переменных.

Пример 1 иллюстрирует функцию $f(x_1, x_2)$ принадлежащую классу AT_2^3, но не принадлежащую классу T_2^3. Действительно, рассмотрим точки множества Ω_3^2, в которых функция $f(x_1, x_2)$ принимает значение 0. Из Рис.1. видно, что указанные точки невозможно отделить от остальных, заключив их между двумя прямыми. Предположим, что такое отделение возможно. Тогда весь отрезок в 2-мерном вещественном пространстве с концами в точках $a = (0{,}0)$ и $b = (2, 2)$, в которых функция $f(x_1, x_2)$ принимает значение 0, заключен между отделяющими прямыми. Но этот отрезок содержит точку $(1{,}1)$, в которой функция принимает значение 1, что противоречит предположению.

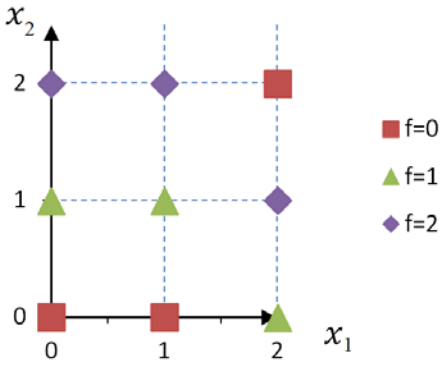


Рис.1. Графическое представление функции f из примера 1.

Другой способ показать, что данная функция не пороговая – доказать, что она не полностью монотонна, в то время как любая пороговая функция является полностью монотонной (см. [5]). В частности при фиксациях $x_1 = 1$ и $x_1 = 2$ нарушается условие 1-монотонности. Напомним определение полной монотонности.

Определение 3. Функцию k-значной логики $f_n^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ назовем t-монотонной, если для любого $s \le t$, любого подмножества переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$ и любых двух фиксаций этих переменных $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}\right) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s)$, $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}\right) = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)$ соответствующие этим фиксациям подфункции

$$f_\varepsilon = f_n^k\left(x_1, x_2, \dots, x_n \middle| \left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}\right) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s)\right),$$

$$f_\delta = f_n^k\left(x_1, x_2, \dots, x_n \middle| \left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}\right) = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)\right)$$

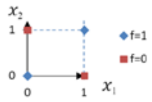
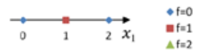
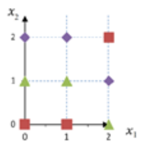
удовлетворяют одному из условий: либо $f_\varepsilon \ge f_\delta$, либо $f_\delta \ge f_\varepsilon$.

Функция является полностью монотонной, если она t-монотонна при $t = n$.

В Табл.2 приведены примеры алгебраических пороговых функций, не принадлежащих классу T_n^k, при некоторых минимальных параметрах $k \ge 2$ и $n \ge 1$. Случай $n = 1$ и $k = 2$ не рассматривается, поскольку все такие функции пороговые.

Табл.2.

Примеры не пороговых, но алгебраических пороговых функций при минимальных параметрах $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ с заданием параметров соответствующей функции.

		n	
		1	2
k	2	Все функции этого случая принадлежат классу T_1^2	 $(c_0, c_1, c_2) = (1,1,1)$, $(b_0, b_1, b_2) = (0,1,2)$, $m = 2$.
	3	 $(c_0, c_1) = (0,1)$, $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (0,1,2,3)$, $m = 2$.	Пример 1. 

Заметим, что варианты, представленные в таблице 2, распространяются на бóльшие значения n и k. Тем самым установлена следующая взаимосвязь рассматриваемых классов

$$AT_n^k \backslash T_n^k \ne \emptyset, \qquad (4)$$

для любых значений $k \ge 2$, $n \ge 1$, за исключением случая $k = 2, n = 1$.

Утверждение 1. Классы пороговых k-значных функций, $k \ge 2$ от $n \ge 1$ переменных T_n^k и алгебраических пороговых функций AT_n^k связаны включением

$$T_n^k \subseteq AT_n^k, \qquad (5)$$

При этом равенство достигается только в случае $k = 2, n = 1$.

Доказательство. Пусть пороговая функция f из класса T_n^k задана вектором коэффициентов $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и вектором порогов $(b_0, b_1, \dots, b_k)$. Построим эквивалентную ей алгебраическую функцию f' из класса AT_n^k. Положим значение v равным модулю минимального значения, которое принимает линейная форма $L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$$v = \left|\min_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega_k^n} \{c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_na_n\}\right|,$$

а значение V равным соответствующему максимуму линейной формы

$$V = \max_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega_k^n} \{c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_na_n\}.$$

Зададим вектор коэффициентов $(c'_0, c'_1, \dots, c'_n)$, вектор порогов $(b'_0, b'_1, \dots, b'_k)$ и модуль m соответствующей алгебраической пороговой функции f' следующим образом

$$(c_0', c_1', \dots, c_n') = (v, c_1, c_2, \dots, c_n),$$
$$b_i' = v + b_i, i = \overline{0, k}, \quad (6)$$
$$m = v + V + 1.$$

Линейная форма L' алгебраической пороговой функции

$$L' = c_0' + c_1'x_1 + c_2'x_2 + \dots + c_n'x_n = v + L$$

принимает минимальное значение равное 0, а максимальное $v + V$. Из последнего и того, что модуль m взят большим, чем значение $v + V$ следует, что в условиях определения 2 функцию взятия остатка $r_m(y)$ можно опустить. Условие (2), при задании (6) перепишется следующим образом

$$f'(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v + b_\alpha \leq v + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n < v + b_{\alpha+1},$$

что соответствует обычному сдвигу на значение v условия (1) для функции f в определении 1

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b_\alpha \leq c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n < b_{\alpha+1}.$$

В итоге для пороговой функции задана эквивалентная ей алгебраическая пороговая функция. Данные рассуждения и свойство (4) приводят к доказательству утверждения.■

Помимо включения $T_n^k \subseteq AT_n^k$, верно включение $L_n^k \subseteq AT_n^k$, где L_n^k множество линейных функций k-значной логики от n переменных. Для доказательства достаточно в качестве модуля m взять значение k, вектор порогов равным вектору $(0, 1, \dots, k)$, а вектор коэффициентов линейной формы совпадающим с вектором коэффициентов соответствующей линейной функции.

Класс AT_n^k сохраняет простоту реализации функций, основная сложность которой сводится к подсчету скалярного произведения, как и для пороговых функций.

Введение такого обобщения позволяет строить сбалансированные k-значные функции. Следующее утверждение описывает некоторый подкласс BAT_n^k класса AT_n^k сбалансированных k-значных функций [4], представляющих практический интерес.

Теорема 1. Пусть в условиях определения 2, вектор коэффициентов линейной формы $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ – не нулевой и среди них коэффициент $c_i \neq 0$, $i \in \overline{1, n}$, тогда, задав вектор порогов

$$(b_0, b_1, \dots, b_k) = (0, c_i, 2c_i, \dots, kc_i) \quad (7)$$

и модуль $m = kc_i$, получим сбалансированную функцию принадлежащую классу AT_n^k.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданную условиями (7). Для множества всех точек $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из множества Ω_k^n таких, что $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha$ введем обозначение: A_α^f. Очевидным является следующее разложение

$$\Omega_k^n = \bigcup_{\alpha=0}^{k-1} A_\alpha^f, A_i^f \cap A_j^f = \emptyset \text{ при } i \neq j. \quad (8)$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить равномощность всех A_α^f. Зафиксируем произвольное значение $d \in \overline{0, k-2}$. Построим отображение

$$\varphi: A_d^f \to A_{d+1}^f \quad (9)$$

по следующему правилу. Для каждой точки $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_d^f$

$$(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \overset{\varphi}{\to}$$
$$\overset{\varphi}{\to} (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i \oplus 1, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad (10)$$
$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) =$$
$$= (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i \oplus 1, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

где $\oplus$ – сложение по модулю k. Покажем корректность задания отображения φ. Запишем сравнения (3) для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, используя задание (7)

$$\alpha c_i \leq c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + kc_it < (\alpha + 1)c_i, \quad (11)$$

где $kc_i = m$, $\alpha c_i = b_\alpha$, $(\alpha + 1)c_i = b_{\alpha+1}$.

Для точки $\bar{a} \in A_d^f$ преобразуем сравнение (11), подставив вместо значения α значение d

$$dc_i \leq c_0 + c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_na_n + kc_it < (d + 1)c_i. \quad (12)$$

Ко всем частям двойного неравенства прибавим c_i

$$(c_i + dc_i) \leq c_0 + c_1a_1 + \dots + (c_ia_i + c_i) + \dots$$
$$+ c_na_n + kc_it < (c_i + (d + 1)c_i).$$

Преобразовав последнее получим

$$(d + 1)c_i \leq c_0 + c_1a_1 + \dots + c_i(a_i + 1) + \dots$$
$$+ c_na_n + kc_it < (d + 2)c_i. \quad (13)$$

Сравнение (13) задает пределы, в которых лежит значение линейной формы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точках $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i \oplus 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$, при $a_i \in \overline{0, k-2}$. Если же значение a_i равно $k - 1$, то (13) примет вид

$$(d+1)c_i \le c_0 + c_1a_1 + \dots + c_i0 + \dots$$
$$+c_na_n + kc_it' < (d+2)c_i, \qquad (14)$$

где значение t' равно $t+1 \in \mathbb{Z}$. Объединяя (13) и (14) в свернутом виде получим для любого $a_i \in \overline{0,k-1}$

$$(d+1)c_i \le r_{kc_i}(c_0 + c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_i(a_i \oplus 1) + \dots$$
$$+ c_na_n) < (d+2)c_i,$$

то есть

$$b_{d+1} \le r_m(c_0 + c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_i(a_i \oplus 1) + \dots$$
$$+ c_na_n) < b_{d+2}.$$

Из последнего видно, что для указанных значений d выполняется

$$f\big(\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = d+1,$$

откуда получаем, что вектор $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ лежит в A^f_{d+1}.

Докажем, что отображение φ биективное. Для этого построим обратное отображение $\varphi^{-1}: A^f_{d+1} \to A^f_d$ положив для каждой точки $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, принадлежащей множеству A^f_{d+1},

$$\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) =$$
$$= (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \boldsymbol{a_i} \ominus \mathbf{1}, a_{i+1}, \dots, a_n), \qquad (15)$$

где $\ominus$ – вычитание по модулю k. Из заданий (10) и (15) получим, что

$$\varphi^{-1}\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) =$$
$$= \varphi\varphi^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

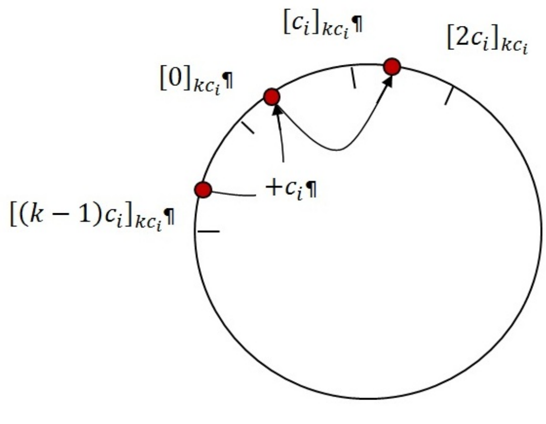


Рис. 2. Иллюстрация изменения значения функции $\boldsymbol{f}$ при действии преобразования $\boldsymbol{\varphi}$.

Из последнего следует биективность φ и равномощность множеств A^f_α, $\alpha \in \overline{0,k-1}$. ■

Наглядно данная ситуация изображена на Рис.2. где черточками обозначены классы вычетов $[tc_i]_{kc_i}$ по модулю kc_i с представителем tc_i, $t \in \overline{0,k}$, красная точка – движение от значения $f(\bar{a})$ к $f\big(\varphi(\bar{a})\big)$. Между соседними классами вычетов функция f принимает соответствующее значение.

Заметим, что построенная в примере 1 функция принадлежит классу BAT^k_n, описанному в теореме.

В заключении отметим результаты статьи.

1. Введен в рассмотрение в определении 2 новый класс алгебраических пороговых функций AT^k_n.

2. В утверждение 1 обосновано включение класса пороговых функций T^k_n в класс алгебраических пороговых функций AT^k_n, А пример 1 и таблица 2 обосновывают не пустоту множества $AT^k_n \backslash T^k_n$.

3. В Теореме 1 описан некоторый подкласс BAT^k_n класса AT^k_n сбалансированных k-значных алгебраических пороговых функций.

Список литературы:

1. Вальцев В.Б., Григорьев В.Р., Никонов В.Г. Некоторые структурные принципы организации высших функций мозга. – В кн.: Нейрокомпьютер как основа мыслящих ЭВМ, РАН, отд. физиологии. М.: Наука. 1993. С. 38-46.
2. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра, тт 1,2. – М.: Гелиос АВР, 2003.
3. Морага К. Многозначная пороговая логика. – В кн.: Оптические вычисления, под ред. Р. Арратуна, М.: Мир. 1993. с. 162-182.
4. Никонов В.Г., Сошин Д.А. Геометрический метод построения сбалансированных k-значных пороговых функций и синтез подстановок на их основе. – Образовательные ресурсы и технологии. 2014. №2(5). С.76-80.
5. Никонов В.Г., Никонов Н.В. Особенности пороговых представлений k-значных функций. – Труды по дискретной математике, М.: Физматлит. 2008, Том 11, выпуск 1, с. 60-85.
6. Fujita, Y., Kitahashi, T., and Tanaka, K. (1970). The functional completeness of many-valued threshold function, Trans. I.E.C.E. Japan, 53-C, (5): 341-342.

РЕЦЕНЗИЯ

на статью Сошина Данила Андреевича «Конструктивный метод синтеза сбалансированных k-значных алгебраических пороговых функций»

В статье вводится в рассмотрение новый интересный класс k-значных функций – класс так называемых алгебраических пороговых функций (АПФ), отличающихся от класса традиционных пороговых функций (ПФ) приведением определяющего значение функции скалярного произведения по некоторому целочисленному модулю. Такое определение, с одной стороны, сохраняет простоту реализации функции из класса АПФ, в том числе на перспективной элементарной базе, а с другой стороны – значительно расширяет множество пороговых функций. Характеризация класса АПФ оказалась сложнее чем класса ПФ, в частности, достаточное условие того, что функция не принадлежит АПФ в общем случае нельзя свести к локальному обнаружению нарушения некоторого свойства, аналогичного свойству полной монотонности, как для ПФ. Тем не менее, автору удалось для класса АПФ конструктивно доказать важное утверждение о строении сбалансированных функций, представляющих интерес для синтеза узлов переработки информации, в частности – биективных преобразований[4]. Оригинальный способ построения биективных отображений предполагается предложить к изданию в последующей статье автора.

По мнению рецензента, статья может быть опубликована в журнале «Computational nanotechnology».

Член редакционной коллегии
журнала «Computational nanotechnology»
доктор технических наук,
член президиума РАЕН,
народный художник

В.Г. Никонов