В. О. Кузнецов, Г. В. Кузьмина, К задаче о максимуме n-го диаметра на гиперболической плоскости,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1980, том 100, 113–130

В.О.Кузнецов, Г.В.Кузьмина

К ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ n-ГО ДИАМЕТРА НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Введение

В качестве модели гиперболической плоскости будем рассматривать круг $U=\{z:|z|<1\}$ с метрикой, определяемой линейным элементом $ds=(1-|z|^2)^{-1}|dz|$. Под гиперболическим псевдорасстоянием между точками z_1, z_2 в круге U, как обычно, понимаем величину

$$\rho_h^*(z_1,z_2)=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|.$$

Тогда

$$\rho_h(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho_h^*(z_1,z_2)}{1-\rho_h^*(z_1,z_2)}$$

– гиперболическое расстояние между точками z_1, z_2 в U. $\rho_h^*(z_1,z_2)$ будем обозначать также через $[\![z_1,z_2]\!]$. Пусть E – некоторый компакт в круге U, $d_n^{(h)}(E)$, $n=2,3,\ldots$, – n-ый гиперболический диаметр E:

$$d_n^{(h)}(E)=\max_{z_k,z_\ell\in E}\left\{\prod_{1\le k<\ell\le n}[\![z_k,z_\ell]\!]\right\}^{2/[n(n-1)]}.$$

Предел

$$d^{(h)}(E)=\lim_{n\to\infty}d_n^{(h)}(E),$$

т.е. гиперболический трансфинитный диаметр E, служит геометрической интерпретацией гиперболической емкости E [1,2]:

$$d^{(h)}(E)=\operatorname{cap}^{(h)}E.$$

Пусть $\Gamma^{(h)}$ – группа дробно-линейных преобразований круга U на себя. $d_n^{(h)}(E)$ и $\operatorname{cap}^{(h)}E$ инвариантны относительно преобразований из этой группы.

В дальнейшем используются следующие результаты в задаче о континуумах наименьшей гиперболической емкости [3,4]. Пусть $c_1,\ldots,c_n$ – точки U, $E^{(h)}(c_1,\ldots,c_n)$ – континуум наименьшей гиперболической емкости, содержащий указанные точки,

$C^{(h)}(c_1,\dots,c_n)=cap^{(h)}E^{(h)}(c_1,\dots,c_n)$. $E^{(h)}(c_1,c_2,c_3)$ представляет собой множество $\overline{\Phi}\cap U$ для квадратичного дифференциала *)

$$Q(z)\,dz^2=-\frac{(z-b)(1-\bar{b}z)}{\prod_{k=1}^{k=3}\left[(z-c_k)(1-\bar{c}_k z)\right]}\,dz^2\,. \tag{I}$$

В работе [4] указаны условия, определяющие нуль $z=b$ дифференциала (I) в круге U и гиперболическую емкость $C^{(h)}(z_1,z_2,z_3)$. Эти условия аналитически выражают тот факт, что множество $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\Phi}$ для дифференциала (I) – кольцевая область для этого дифференциала, причем каждая траектория дифференциала (I) в области $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\Phi}$ – замкнутая жорданова кривая, разделяющая системы точек c_1, c_2, c_3 и $1/\bar{c}_1$, $1/\bar{c}_2$, $1/\bar{c}_3$ и гомотопная окружности $|z|=1$.

Имеет место следующая простая лемма [6].

ЛЕММА I. Пусть $0<R<1$, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$ и пусть $m=2,3,\dots$ Конфигурация $E_{2m}=\{z: z^m\in E^{(h)}(0,Re^{i\alpha}, Re^{-i\alpha})\}$ – континуум наименьшей гиперболической емкости, содержащий точки, являющиеся корнями m-ой степени из $Re^{i\alpha}$ и $Re^{-i\alpha}$, и $cap^{(h)}E_{2m}=\{C^{(h)}(0,Re^{i\alpha}, Re^{-i\alpha})\}^{1/m}$.

Пусть ρ – фиксированное число, $0<\rho<1$. Пусть $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ – семейство всех континуумов в круге U гиперболической емкости ρ. При $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$ обозначим через $R=R(\rho,\alpha)$, $0<R<1$, решение уравнения

$$C^{(h)}(0,\,Re^{i\alpha},\,Re^{-i\alpha})=\rho.$$

$E^{(h)}(0,R(\rho,\alpha)e^{i\alpha},\,R(\rho,\alpha)e^{-i\alpha})$ – элемент семейства $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$. Положим

$$R_1(\rho)=R(\rho,0)$$

и пусть при $n=2,3,\dots$

$$R_n(\rho)=R_1^{1/n}(\rho^n),\qquad R_2(\rho)=R(\rho,\pi/2).$$

$R_n=R_n(\rho)$ – решение уравнения **)

$$\log\frac{1}{\rho}=\frac{\pi}{2n}\,\frac{K'(R_n^n)}{K(R_n^n)}\,. \tag{2}$$

---

*) По поводу соответствующих определений см. монографию Дж. Дженкинса [5].

**) Здесь, как обычно, $K(k)$ – эллиптический интеграл I рода с модулем k, $K'(k)=K(\sqrt{1-k^2})$.

Пусть

$$E_1^*(\rho)=[0,\ R_1(\rho)]$$

и пусть при $n=2,3,\ldots$

$$E_n^*(\rho)=\{z:\ z^n\in E_1^*(\rho^n)\}:\ E_n^*(\rho)=\bigcup_{k=1}^{n}\left[0,\omega_n^{k-1}R_n(\rho)\right],\ \omega_n=exp\{2\pi i/n\}.$$

По лемме I, симметричный континуум $E_n^*(\rho)$ - элемент семейства $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$.

В работе [7] было показано, что максимум $d_3^{(h)}(E)$ в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ при всех $\rho\in(0,1)$ реализуется только континуумами вида $E=\{\sigma(z):\ z\in E_3(\rho)\}$, где σ - преобразование из группы $\Gamma^{(h)}$. В дальнейшем были даны другие доказательства и получены усиления этого результата. Так, было показано [6,9], что максимум каждого из функционалов

$$\max_{z_k,z_\ell\in E}\ \sum_{1\le k<\ell\le 3}\rho_h^*(z_k,z_\ell)\quad \text{и}\quad \max_{z_k,z_\ell\in E}\ \sum_{1\le k<\ell\le 3}\rho_h(z_k,z_\ell)$$

в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ также реализуется только указанными выше конфигурациями. Задача о максимуме $d_n^{(h)}(E)$ в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ при любом $n\geqslant 4$ в настоящее время остается нерешенной. В § I данной работы получен следующий результат негативного характера в этой задаче: при $m=2,3,\ldots$ симметричная конфигурация $E_{2m}^*(\rho)$ не реализует максимума $d_{2m}^{(h)}(E)$ в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ при любом $\rho\in(0,1)$. Отсюда вновь следует известный результат того же характера в задаче о максимуме $2m$-го диаметра в семействе $\mathbb{K}$ всех континуумов на $\mathbb{C}$ единичной емкости [8,I0,II].

§ 2 настоящей работы посвящен задаче о максимуме функционалов

$$\ell_n(E)=\max_{z_k,z_\ell\in E}\frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\le k<\ell\le n}|z_k-z_\ell|\ \text{и}\ d_n(E)=\max_{z_k,z_\ell\in E}\Big\{\prod_{1\le k<\ell\le n}|z_k-z_\ell|\Big\}^{2/[n(n-1)]}$$

в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$. Показывается, что в случае $n=3$ максимум каждого из указанных функционалов реализуется только континуумами вида $E=\{e^{i\alpha}z:\ z\in E_3^*(\rho)\}$, α - вещественное число. Что касается случая произвольного четного $n=2m\geqslant 4$, то показывается, что при достаточно малых ρ симметричный континуум $E_{2m}^*(\rho)$ реализует локальный минимум $d_{2m}(E)$, а при достаточно больших ρ из интервала $(0,1)$ - локальный максимум этого функционала в однопараметрическом семействе континуумов из $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$.

§ I данной работы написан Г.В.Кузьминой, § 2 – В.О.Кузнецовым.

§ I. О максимуме $d_{2m}^{(h)}(E)$ в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$

I°. Покажем, что симметричная конфигурация

$$E_{2m}^{*}(\rho)=\bigcup_{k=1}^{2m}\left[0,\omega_{2m}^{k-1}R^{1/m}(\rho^m,\pi/2)\right],\quad \omega_{2m}=\exp\{\pi i/m\},$$

не реализует максимума $2m$-го гиперболического диаметра в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ при $m=2,3,\dots$ и при любом ρ, $0<\rho<1$. Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство континуумов из $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$, содержащее конфигурацию $\tilde{E}_{2m}^{*}(\rho)=\{e^{i\pi/(2m)}z: z\in E_{2m}^{*}(\rho)\}$, и покажем, что $\tilde{E}_{2m}^{*}(\rho)$ не реализует максимума $d_{2m}^{(h)}(E)$ в этом семействе. Именно, пусть при $0<\rho<1$

$$\mathfrak{E}_{2m}(\rho)=\{\mathcal{E}_{2m}(\rho,\alpha):\ 0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2\},$$

где

$$\mathcal{E}_{2m}(\rho,\alpha)=\{z:\ z^m\in E^{(h)}(0,R(\rho^m,\alpha)e^{i\alpha},\ R(\rho^m,\alpha)e^{-i\alpha})\}.$$

По лемме I введения, $\mathcal{E}_{2m}(\rho,\alpha)$ – континуум наименьшей гиперболической емкости, содержащий точки $c_1,\dots,c_{2m}$, где $c_1,\dots,c_m$ и $c_{m+1},\dots,c_{2m}$ являются корнями m-ой степени соответственно из $R(\rho^m,\alpha)e^{i\alpha}$ и $R(\rho^m,\alpha)e^{-i\alpha}$, и $\mathcal{E}_{2m}(\rho,\alpha)$ – элемент $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ при $0<\rho<1$, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$. Следовательно,

$$\mathfrak{E}_{2m}(\rho)\subset\mathbb{K}^{(h)}(\rho).$$

Очевидно,

$$\mathcal{E}_{2m}(\rho,\pi/2)=\tilde{E}_{2m}^{*}(\rho).$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА I.I. При $m=2,3,\dots$ и любом ρ, $0<\rho<1$, симметричный континуум $\mathcal{E}_{2m}(\rho,\pi/2)$ реализует локальный минимум функционала $d_{2m}^{(h)}(E)$ в семействе $\mathfrak{E}_{2m}(\rho)$.

2°. При доказательстве этой теоремы используются два предложения технического характера. Первое из них дает выражение для функции $H^{(h)}(R,\alpha)=\operatorname{cap}^{(h)}E^{(h)}(0,Re^{i\alpha},Re^{-i\alpha})$ при α, близких к $\pi/2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. При $0<R<1$, $\varepsilon>0$ имеем равенство

$$H^{(h)}(R,\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon)=e^{-\frac{\pi}{4}K'(R^2)/K(R^2)}\{1-A_1(R^2)\,\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\},$$

где

$$A_1(r)=\frac{\pi}{4(1+r)^2}\left\{\left[2E'\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+r}},r\right)-(1-r)\right]\frac{1}{K(r)}-\left[1-\frac{E(r)}{K(r)}\right]\frac{K'(r)}{K(r)}\right\}.$$

Предложение I.I получается прямым вычислением из аналитического выражения для $H^{(h)}(R,\alpha)$, установленного теоремой 2 работы [4] (см. доказательство предложения I работы [6])*).

Учитывая дифференциальные свойства $H^{(h)}(R,\alpha)$, как функции от R и α, из предложения I.I получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. При $0<\rho<1$, $\varepsilon>0$ имеем равенство

$$R\left(\rho,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=R\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)\left\{1+\left[1-R^4\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)\right]A_2\left(R^2\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)\right)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right\},$$

где

$$A_2(r)=\frac{4}{\pi^2}K^2(r)A_1(r).$$

Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА I.I. Пусть $E=\{z: z^m\in E^{(h)}(0,Re^{i\alpha},Re^{-i\alpha})\}$, где $0<R<1$, $0<\alpha<\pi/2$. Тогда

$$\left\{d_{2m}^{(h)}(E)\right\}^{m(2m-1)}\geqslant\frac{(2m)^m R^{2m-1}(1-R^{2/m})\sin^m\alpha}{(1-R^2)^m\{(1+R^2)^2-4R^2\cos^2\alpha\}^{m/2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из введения к данной работе следует, что E - множество $\overline{\Phi}^{(h)}=\overline{\Phi}\cap U$ для квадратичного дифференциала

$$Q_{2m}(z)dz^2=-\frac{z^{2m-2}[z^m-b(R,\alpha)][1-b(R,\alpha)z^m]}{P_1(z^m)\cdot P_2(z^m)},$$

где

$$P_1(t)=t^2-2Rt\cos\alpha+R^2,\qquad P_2(t)=R^2t^2-2Rt\cos\alpha+1.$$

Пусть c_k, $k=1,\dots,2m$, - нули полинома $P_1(z^m)$, $c_{2m+k}=\dfrac{1}{\bar c_k}$, $k=1,\dots,2m$, - нули полинома $P_2(z^m)$:

$$|c_k|=R^{1/m},\quad |c_{2m+k}|=R^{-1/m},\qquad k=1,\dots,2m.$$

Имеем

---

*) При доказательстве предложения I работы [6] при вычислении одного из эллиптических интегралов допущена ошибка и потому приведенное в [6] выражение для $H^{(h)}(R,\pi/2-\varepsilon)$ является неверным. Вследствие этого оказалось ошибочным и утверждение работы [6] относительно вида экстремальных конфигураций задачи о максимуме $d_{2m}^{(h)}(E)$ в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ при достаточно больших $\rho\in(0,1)$.

$$\left\{ d_{2m}^{(h)}(E) \right\}^{m(2m-1)} \geqslant \prod_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2m} \left| \frac{c_k - c_\ell}{1-\bar{c}_k c_\ell} \right| = R^{-2m+1} \frac{\Pi_1}{\Pi_2}, \qquad (4)$$

где

$$\Pi_1 = \prod_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2m} |c_k - c_\ell|, \quad \Pi_2 = \prod_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2m} \left| \frac{1}{c_\ell} - \bar{c}_k \right| = \prod_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2m} |c_k - c_{2m+\ell}|.$$

Π_1 выражается через дискриминант $\mathcal{D}(P_1(z^m))$ полинома $P_1(z^m)$:

$$\Pi_1 = \left| \mathcal{D}(P_1(z^m)) \right|^{1/2} = m^m R^{m-1} \left| \mathcal{D}(P_1(z)) \right|^{m/2}.$$

Π_2 выражается через Π_1 и дискриминант $\mathcal{D}(P_1(z^m)\cdot P_2(z^m))$. Действительно,

$$\left| \mathcal{D}(P_1(z^m)\cdot P_2(z^m)) \right|^{1/2} = R^{8m-2}\,\Pi_0, \qquad (5)$$

где

$$\Pi_0 = \prod_{1\leqslant k<\ell\leqslant 4m} |c_k - c_\ell|.$$

Имеем

$$\Pi_0 = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \Pi_5,$$

где

$$\Pi_3 = \prod_{1\leqslant k\leqslant 2m} |c_k - c_{2m+k}|, \quad \Pi_4 = \prod_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2m} |c_\ell - c_{2m+k}|, \quad \Pi_5 = \prod_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2m} |c_{2m+k} - c_{2m+\ell}|.$$

Используя условия (3), находим

$$\Pi_3 = \prod_{1\leqslant k\leqslant 2m} \left| c_k - \frac{1}{\bar{c}_k} \right| = \left\{ \frac{1-R^{2/m}}{R^{1/m}} \right\}^{2m}.$$

Далее, при $1\leqslant k<\ell\leqslant 2m$

$$|c_\ell - c_{2m+k}| = \left| c_\ell - \frac{1}{\bar{c}_k} \right| = \left| c_k - \frac{1}{\bar{c}_\ell} \right| = |c_k - c_{2m+\ell}|,$$

$$|c_{2m+k} - c_{2m+\ell}| = \left| \frac{1}{\bar{c}_k} - \frac{1}{\bar{c}_\ell} \right| = R^{-2/m} |c_k - c_\ell|$$

и потому

$$\Pi_4 = \Pi_2, \qquad \Pi_5 = R^{-4(2m-1)} \Pi_1.$$

Следовательно,

$$\Pi_0 = R^{-4m}(1-R^{2/m})^{2m}\Pi_1^2\Pi_2^2 .$$

Из (5) теперь находим

$$|\mathcal{D}(P_1(z^m)\cdot P_2(z^m))|^{1/2} = R^{4m-2}(1-R^{2/m})^{2m}\Pi_1^2\Pi_2^2 ,$$

откуда

$$\Pi_2 = R^{-2m+1}(1-R^{2/m})^{-m}\Pi_1^{-1}|\mathcal{D}(P_1(z^m)\cdot P_2(z^m))|^{1/4} =$$

$$= m^m R^{-m}(1-R^{2/m})^{-m}\Pi_1^{-1}|\mathcal{D}(P_1(z)P_2(z))|^{m/4} .$$

Используя полученные выражения для Π_1 и Π_2, из (4) получаем

$$\{d_{2m}^{(h)}(E)\}^{m(2m-1)} \geqslant m^m R^{m-1}(1-R^{2/m})^m|\mathcal{D}(P_1(z))|^m|\mathcal{D}(P_1(z)\cdot P_2(z))|^{-m/4} .$$

Остается найти $\mathcal{D}(P_1(z))$ и $\mathcal{D}(P_1(z)\cdot P_2(z))$. Имеем

$$\mathcal{D}(P_1(z)) = \mathcal{D}(P_2(z)) = -4R^2\sin^2\alpha ,$$

$$\mathcal{D}(P_1(z)\cdot P_2(z)) = \mathcal{D}(P_1(z))\,\mathcal{D}(P_2(z))\,\mathcal{R}^2(P_1(z), P_2(z)) ,$$

где $\mathcal{R}(P_1, P_2)$ – результант полиномов P_1 и P_2 :

$$\mathcal{R}(P_1(z), P_2(z)) = (1-R^2)^2\{(1+R^2)^2-4R^2\cos^2\alpha\} .$$

Отсюда получаем неравенство для $d_{2m}^{(h)}(E)$, указанное в формулировке леммы I.I.

3°. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.I. Пусть $0<\rho<1$, $\varepsilon>0$. Из леммы I.I и предложения I.2 получаем

$$\{d_{2m}^{(h)}(\mathcal{E}_{2m}(\rho, \tfrac{\pi}{2}-\varepsilon))\}^{m(2m-1)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(2m)^m R^{2m-1}(1-R^{2/m})^m}{(1-R^4)^m}\{1+B_m(R^2)\varepsilon^2+O(\varepsilon^2)\},\quad R = R(\rho^m, \tfrac{\pi}{2}),$$

где

$$B_m(r) = \left[2m+1+(2m-1)r^2-\frac{2(1-r^2)}{1-r^{1/m}}\right]A_2(r) - \frac{m}{2}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 .$$

Так как $A_2(r) \longrightarrow \frac{1}{2}$ при $r\to 0$, $A_2(r) \longrightarrow \frac{1}{8}$ при $r\to 1$, то $B_m(r) \longrightarrow \frac{1}{2}(m-1)$ при $r \to 0$. Далее, при $R = 1-\delta$, $\delta > 0$, $B_m(r) = \frac{m^2-1}{6m}\delta^2 + O(\delta^2)$, следовательно, $B_m(r) > 0$ при r, близких к I. Можно показать, что $B_m(r) > 0$ и при всех $r \in (0,1)$. Этим теорема I.I доказана.

§ 2. О максимуме функционалов $l_n(E)$ и $d_n(E)$ в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$

I°. Рассмотрим следующие две задачи. Пусть n – фиксированное натуральное число, $n \geqslant 2$. Найти $\sup d_n(E)$ в семействе $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ и найти $\sup l_n(E)$ в указанном семействе. Эти задачи будем называть соответственно задачей 2.I и задачей 2.2.

Из теории нормальных семейств легко следует, что обе указанные точные верхние границы реализуются: существуют элементы E_0 и E^0 семейства $\mathbb{K}^{(h)}(\rho)$ такие, что

$$d_n(E_0) = \sup_{E \in \mathbb{K}^{(h)}(\rho)} d_n(E), \quad l_n(E^0) = \sup_{E \in \mathbb{K}^{(h)}(\rho)} l_n(E).$$

Доказательство этого утверждения для задачи 2.I в случае $n=2$ приводится в совместной работе П.Дьюрена и М.Шиффера [I2], в остальных случаях доказательство вполне аналогично.

В случае $n=2$ задача 2.I, а потому и задача 2.2, была впервые решена Г.Гретшем [I2]. Искомый максимум реализуется только в том случае, когда $E = \{e^{i\alpha} z : z \in E_2^*(\rho)\}$, α – вещественное число. Позднее П.Дьюрен и М.Шиффер [I3] получили этот же результат в качестве иллюстрации использования предложенного ими метода граничных вариаций в классе $\mathcal{F}$ функций $z = f(\zeta)$, регулярных и однолистных в круговом кольце $\mathcal{B}(\rho) = \{\zeta : \rho < |\zeta| < 1\}$ и отображающих его на области, лежащие в круге U, таким образом, что окружности $|\zeta| = 1$ и $|z| = 1$ соответствуют друг другу.

В п.2° этого параграфа приводится решение задач 2.I и 2.2 при $n=3$. Именно, доказывается следующая теорема (пользуемся обозначениями введения).

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть ρ – любое фиксированное число, $0<\rho<1$, и пусть $E \in \mathbb{K}^{(h)}(\rho)$. Тогда

$$l_3(E) \leqslant \sqrt{3}\, R_3(\rho). \tag{6}$$

Равенство в (6) имеет место только в случае $E = \{e^{i\alpha} z : z \in E_3^*(\rho)\}$, α – вещественное число.

При доказательстве теоремы 2.I используется геометрическая характеристика экстремальной конфигурации данной задачи, получающаяся методом граничных вариаций работы [I3], и геометрические свойства континуумов наименьшей гиперболической емкости, установленные в работе [4] .

Элементарным следствием теоремы 2.I является

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.I. Тогда

$$d_3(E) \leqslant \sqrt{3}\, R_3(\rho). \tag{7}$$

Равенство в (7) имеет место только в случае, указанном в теореме 2.I.

В п.3° этого параграфа показывается, что при четном $n \geqslant 4$ симметричный континуум $E_n^*(\rho)$ не реализует максимума $d_n(E)$ в семействе $\mathbb{K}^{(n)}(\rho)$ при всех достаточно малых ρ из интервала (0,I).

2°. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2.I и 2.2. Пусть E - континуум, реализующий максимум $\ell_3(E)$ в семействе $\mathbb{K}^{(n)}(\rho)$, c_1, c_2, c_3 - точки E , для которых

$$\frac{1}{3} \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 3} |c_k - c_\ell| = \ell_3(E). \tag{8}$$

Покажем, что точки c_1, c_2, c_3 удовлетворяют условию

$$\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 3} |c_k - c_\ell|(c_k + c_\ell) = 0. \tag{9}$$

Пусть E' - образ E при отображении

$$\sigma(z) = \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega} z},$$

где $\omega = \varepsilon e^{i\delta}$, $0<\varepsilon<1$, δ - вещественное число, и пусть $c_k' = \sigma(c_k)$. Очевидно, E' - элемент $\mathbb{K}^{(n)}(\rho)$. Поэтому

$$\ell_3(E) \geqslant \ell_3(E') \geqslant \frac{1}{3} \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 3} |c_k' - c_\ell'|$$

и из (8) следует неравенство

$$\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 3} |c_k' - c_\ell'| \leqslant \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 3} |c_k - c_\ell|. \tag{I0}$$

Выражая c_k' через c_k , находим

$$\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 3} |c_k' - c_\ell'| = (1-\varepsilon^2) \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 3} \frac{|c_k - c_\ell|}{|(1-\varepsilon e^{-i\delta} c_k)(1-\varepsilon e^{-i\delta} c_\ell)|} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 3} |c_k - c_\ell| + \varepsilon \operatorname{Re}\Big\{ e^{-i\delta} \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 3} |c_k - c_\ell|(c_k + c_\ell) \Big\} + O(\varepsilon^2),$$

и из (I0) получаем

$$\varepsilon \operatorname{Re}\left\{e^{-i\delta}\sum_{1\le k<\ell\le 3}|c_k-c_\ell|(c_k+c_\ell)\right\}+O(\varepsilon^2)\le 0 .$$

Так как δ – произвольное вещественное число, то отсюда получаем условие (9). В частности, из (9) следует, что начало координат принадлежит выпуклой оболочке $K(c_1, c_2, c_3)$ точечного множества $\{c_1, c_2, c_3\}$.

Получим теперь геометрическую характеристику континуума E, используя вариационную формулу в классе $\mathcal{F}$ [I3] :

$$V_\varepsilon(z) = z\left[1+\frac{a\varepsilon^2}{(z-z_0)z_0}-\frac{\overline{a}\,\varepsilon^2 z}{(1-z\overline{z}_0)\overline{z}_0}\right]+O(\varepsilon^3) . \tag{II}$$

Здесь z_0 – любая точка E, $z_0\ne c_1, c_2, c_3$, ε – произвольное достаточно малое положительное число, $|a|=|a(\varepsilon)|=1$ и остаточный член $O(\varepsilon^3)$ равномерно ограничен на любом замкнутом подмножестве области $D_\varepsilon=\{z: z\in U\setminus E,\ |z-z_0|>\varepsilon\}$.

Пусть $\tilde{E}$ – дополнение образа области $U\setminus E$ при вариации (II) до круга U. Тогда $\tilde{E}\in \mathbb{K}^{(n)}(\rho)$ и $\tilde{c}_k=V_\varepsilon(c_k)\in\tilde{E}$ при достаточно малых $\varepsilon>0$, $k=1,2,3$. Следовательно,

$$\sum_{1\le k<\ell\le 3}|\tilde{c}_k-\tilde{c}_\ell|\le\sum_{1\le k<\ell\le 3}|c_k-c_\ell| . \tag{I2}$$

Из (II) находим

$$\tilde{c}_k-\tilde{c}_\ell=(c_k-c_\ell)\left\{1-\frac{a\varepsilon^2}{(c_k-z_0)(c_\ell-z_0)}-\frac{\overline{a}\,\varepsilon^2(c_k-c_\ell-c_k c_\ell\overline{z}_0)}{(1-c_k\overline{z}_0)(1-c_\ell\overline{z}_0)\overline{z}_0}\right\}+O(\varepsilon^3)$$

и из неравенства (I2) получаем

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{1\le k<\ell\le 3}\left[\frac{a\varepsilon^2|c_k-c_\ell|}{(z_0-c_k)(z_0-c_\ell)}+\frac{\overline{a}\,\varepsilon^2(c_k+c_\ell-c_k c_\ell\overline{z}_0)|c_k-c_\ell|}{(1-c_k\overline{z}_0)(1-c_\ell\overline{z}_0)\overline{z}_0}\right]+O(\varepsilon^3)\right\}\ge 0. \tag{I3}$$

Заменяя второе слагаемое под знаком суммы в (I3) на комплексно сопряженное число и используя условие (9), из (I3) получаем

$$\operatorname{Re}\left\{\left[a\varepsilon^2\left(\frac{z_0-S_1}{\prod_{k=1}^{k=3}(z_0-c_k)}+\frac{-S_2+z_0 S_3}{\prod_{k=1}^{k=3}(1-\overline{c}_k z_0)}\right)\sum_{1\le k<\ell\le 3}|c_k-c_\ell|\right]+O(\varepsilon^3)\right\}\ge 0 , \tag{I4}$$

где

$$S_1=\sum_{k=1}^{3}c_k ,\quad S_2=\sum_{1\le k<\ell\le 3}c_k c_\ell ,\quad S_3=c_1 c_2 c_3 . \tag{I5}$$

Неравенство (I4) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\left[a\varepsilon^2 \frac{(-\overline{S}_1+S_2\overline{S}_3)z_0^2+(1+|S_1|^2-|S_2|^2-|S_3|^2)z_0+(-S_1+\overline{S}_2 S_3)}{\cdot \prod_{k=1}^{3}\left[(z_0-c_k)(1-\overline{c}_k z_0)\right]}\right]+O(\varepsilon^3)\right\} \geqslant 0.$$

Применяя основную лемму метода граничных вариаций Шиффера [I4, I5] и учитывая, что $c_k \in E$, $k=1,2,3$, отсюда заключаем, что E состоит из аналитических дуг, являющихся замыканиями критических траекторий квадратичного дифференциала

$$Q_1(z)\,dz^2 = -\frac{Az^2+Bz+\overline{A}}{\prod_{k=1}^{3}\left[(z-c_k)(1-\overline{c}_k z)\right]}\,dz^2, \tag{I6}$$

где

$$A=-\overline{S}_1+S_2\overline{S}_3, \quad B=1+|S_1|^2-|S_2|^2-|S_3|^2. \tag{I7}$$

Воспользуемся теперь свойствами континуумов наименьшей гиперболической емкости: из условий задачи очевидно, что E имеет наименьшую гиперболическую емкость в семействе всех континуумов в круге U, содержащих точки c_1, c_2, c_3: $E=E^{(h)}(c_1,c_2,c_3)$. Предположим сначала, что c_1, c_2, c_3 лежат на одной гиперболической геодезической Γ, и пусть c_3 – внутренняя точка дуги $\gamma\in\Gamma$, соединяющей c_1 и c_2. Тогда $E=\gamma$. Так как начало координат лежит внутри выпуклой оболочки $K(c_1, c_2, c_3)$, то E – прямолинейный отрезок: $E=[c_1, c_2]$, $0\in E$. Из (9) тогда получаем, что $c_2=-c_1$. Следовательно,

$$E=\{e^{i\alpha}z : z\in E_2^*(\rho)\}, \qquad \alpha \text{ – вещественное число,}$$

и из (8) находим

$$\ell_3(E)=\ell_3(E_2^*(\rho))=\frac{4}{3}R_2(\rho). \tag{I8}$$

Пусть теперь c_1, c_2, c_3 не лежат на одной геодезической. Тогда (см. введение к данной работе) E состоит из трех аналитических дуг, являющихся замыканиями принадлежащих кругу U критических траекторий квадратичного дифференциала

$$Q_2(z)\,dz^2 = -\frac{(z-b)(1-\overline{b}z)}{\prod_{k=1}^{3}\left[(z-c_k)(1-\overline{c}_k z)\right]}\,dz^2, \tag{I9}$$

где b – точка U, однозначно определяемая расположением точек c_k. Предположим, что треугольник $\partial K(c_1,c_2,c_3)$ не является равносторонним (в евклидовой метрике). Пусть, например,

$$|c_1 - c_2| < |c_1 - c_3| . \tag{20}$$

Сделав, если это необходимо, преобразование поворота $z \to e^{i\alpha} z$, α – вещественное число, приходим к условию

$$c_2 + c_3 < 0 . \tag{21}$$

Наконец, для определенности будем считать, что

$$\mathrm{Im}\, c_2 = - \mathrm{Im}\, c_3 > 0 . \tag{22}$$

Обозначим

$$c_2 = c_1 + r e^{i\alpha}, \quad c_3 = c_1 + \rho e^{i\beta}, \quad c_1 = \rho_0 e^{i\gamma} = d + ih . \tag{23}$$

В силу (20),

$$r < \rho . \tag{24}$$

По (21) имеем $\mathrm{Im}(c_1 + c_2) = \mathrm{Im}(c_1 - c_3)$, $\mathrm{Im}(c_1 + c_3) = \mathrm{Im}(c_1 - c_2)$ и из (9) получаем

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0 ,$$

откуда

$$\beta = -\alpha, \qquad \cos\alpha = \cos\beta < 0 .$$

Следовательно, $\mathrm{Im}\, c_2 = h + r\sin\alpha$, $\mathrm{Im}\, c_3 = h - \rho\sin\alpha$ и из (24),(21) и (22) находим

$$h = \frac{1}{2}(\rho - r)\sin\alpha, \qquad \sin\alpha > 0 . \tag{25}$$

Из (9) и (21) получаем

$$0 < d < -\frac{1}{2}(\rho + r)\cos\alpha . \tag{26}$$

Пусть $[\![c_k, c_\ell]\!]$ – гиперболическое псевдорасстояние между точками c_k и c_ℓ :

$$[\![c_k, c_\ell]\!] = \left| \frac{c_k - c_\ell}{1 - \bar{c}_k c_\ell} \right| .$$

Из предыдущего следует неравенство

$$[\![c_2, c_1]\!] < [\![c_3, c_1]\!] . \tag{27}$$

Действительно, имеем

$$[\![c_3, c_1]\!]^2 - [\![c_2, c_1]\!]^2 = \frac{X}{|1 - c_1\bar{c}_2|^2 \, |1 - c_1\bar{c}_3|^2} ,$$

где

$$X = |c_3 - c_1|^2 |1 - c_1\bar{c}_2|^2 - |c_2 - c_1|^2 |1 - c_1\bar{c}_3|^2 .$$

Используя обозначения (23), находим

$$X=(1-\rho_0^2)\{(1-\rho_0^2)(\rho^2-\tau^2)-2\rho_0\rho\tau\left[(\rho-\tau)\cos\gamma\cos\alpha+(\rho+\tau)\sin\gamma\sin\alpha\right]\}.$$

Обозначим выражение в фигурных скобках через X_1. Так как $\rho_0\cos\gamma = d$, $\rho_0\sin\gamma = h$, то

$$X_1=(1-d^2-h^2)(\rho^2-\tau^2)-2\rho\tau\left[(\rho-\tau)d\cos\alpha+(\rho+\tau)h\sin\alpha\right].$$

Заменяя h его выражением (25), получаем

$$X_1 = (\rho^2-\tau^2)X_2 ,$$

где

$$X_2=1-d^2-\frac{1}{4}(\rho+\tau)^2\sin^2\alpha-\frac{2\rho\tau}{\rho+\tau}d\cos\alpha .$$

Следовательно, условие (27) равносильно неравенству

$$X_2 > 0 . \tag{28}$$

Рассмотрим X_2 как функцию от d. Легко видеть, что для справедливости неравенства (28) при всех d, удовлетворяющих условию (26), достаточно выполнения этого неравенства при $d = 0$ и $d=-\frac{1}{2}(\rho+\tau)\cos\alpha$. При $d = 0$

$$X_2 = 1-\frac{1}{4}(\rho+\tau)^2\sin^2\alpha > 0 .$$

При $d=-\frac{1}{2}(\rho+\tau)\cos\alpha$

$$X_2 = 1-\frac{1}{4}(\rho+\tau)^2+\rho\tau\cos^2\alpha = 1-\frac{1}{4}|c_2-c_3|^2 > 0 .$$

Следовательно, неравенство (27) справедливо.

Воспользуемся теперь следующим геометрическим свойством континуума E. Пусть $K^{(h)}(c_1,c_2,c_3)$ – гиперболическая выпуклая оболочка точечного множества $\{c_1, c_2, c_3\}$ и пусть Γ_1 – гиперболическая биссектриса внутреннего угла гиперболического треугольника $\partial K^{(h)}(c_1,c_2,c_3)$ при вершине c_1. Γ_1 разделяет внутренность $K^{(h)}(c_1,c_2,c_3)$ на две области. Обозначим их через K^+ и K^-, $c_2 \subset \partial K^+$. Пусть e_1 – та из трех дуг, образующих E, которая соединяет точки c_1 и b (см.(19)). Как показано в [4], при условии (27) $b \in K^+$, а e_1 – гиперболически выпуклая кривая, выходящая из точки c_1 в область K^-.

Пусть σ – угол, образованный касательной к Γ_1 в точке

c_1 с положительным направлением вещественной оси. Гиперболический отрезок $[c_k, c_1]^{(h)}$ образует в точке c_1 с положительным направлением вещественной оси угол α_k, где

$$\alpha_k = \arg \frac{c_k - c_1}{1-\bar{c}_1 c_k}, \quad k=1,2.$$

Следовательно,

$$\delta = \arg \sqrt{\frac{(c_2-c_1)(c_3-c_1)}{(1-\bar{c}_1 c_2)(1-\bar{c}_1 c_3)}}.$$

Как показано выше,

$$(c_2-c_1)(c_3-c_1) > 0. \tag{29}$$

Значит,

$$\delta = \arg \sqrt{(1-c_1\bar{c}_2)(1-c_1\bar{c}_3)}.$$

Имеем

$$(1-c_1\bar{c}_2)(1-c_1\bar{c}_3) = 1-|c_1|^4 - c_1(1-|c_1|^2)(\bar{c}_2+\bar{c}_3) + c_1^2(\bar{c}_2-\bar{c}_1)(\bar{c}_3-\bar{c}_1).$$

Так как $\mathrm{Im}\, c_1 > 0$, $\mathrm{Im}\, c_1^2 > 0$, то из (21) и (29) получаем

$$\mathrm{Im}\,\{(1-c_1\bar{c}_2)(1-c_1\bar{c}_3)\} > 0,$$

т.е.

$$(1-c_1\bar{c}_2)(1-c_1\bar{c}_3) = \lambda e^{i\omega},$$

где

$$\lambda > 0, \quad 0 < \omega < \pi.$$

Следовательно,

$$e^{i\delta} = -e^{i\omega/2}, \quad 0 < \omega/2 < \pi/2.$$

Таким образом, гиперболическая биссектриса Γ_1 выходит из точки c_1 в полуплоскость $\{z : \mathrm{Im}\, z < \mathrm{Im}\, c_1\}$. Пусть теперь δ_1 – угол, образованный касательной к дуге e_1 в точке c_1 с положительным направлением вещественной оси. Из (16) получаем

$$\delta_1 = \arg \left\{ -\frac{(1-c_1\bar{c}_2)(1-c_1\bar{c}_3)}{Ac_1^2 + Bc_1 + \bar{A}} \right\}.$$

С другой стороны, используя выражения (17) для коэффициентов A и B и равенства (15), находим

$$A c_1^2 + B c_1 + \bar{A} = -(c_2+c_3)(1-|c_1|^2)(1-c_1\bar{c}_2)(1-c_1\bar{c}_3).$$

Отсюда и из (2I) получаем

$$\delta_1 \doteq \arg(-1).$$

Следовательно, e_1 имеет в точке c_1 касательную, параллельную отрицательной вещественной оси, и потому e_1 выходит из точки c_1 в область K^+. Последнее противоречит указанной выше локальной структуре E в окрестности точки c_1. Это показывает, что

$$|c_1 - c_2| = |c_1 - c_3|.$$

Из соображений симметрии следует, что $\partial K(c_1, c_2, c_3)$ – равносторонний треугольник (в евклидовой метрике). Отсюда и из условия (9) получаем, что

$$E = \{ e^{i\alpha} z : z \in E_3^*(\rho) \}, \qquad \alpha \text{ – вещественное число,}$$

и потому

$$\ell_3(E) = \ell_3(E_3^*(\rho)) = \sqrt{3}\, R_3(\rho). \tag{30}$$

Остается сравнить правые части равенств (I8) и (30). Покажем, что при всех $0<\rho<1$

$$\ell_3(E_3^*(\rho)) > \ell_3(E_2^*(\rho)). \tag{3I}$$

Воспользуемся следующим выражением для $R_2(\rho)$ [I6] :

$$R_2(\rho) = 2\rho \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+\rho^{8k}}{1+\rho^{8k-4}} \right)^2.$$

Отсюда и из уравнения (2) введения получаем:

$$R_3(\rho) = 2^{2/3} \rho \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+\rho^{12k}}{1+\rho^{12k-6}} \right)^{4/3}.$$

Так как $8 < 3^{3/2} 4^{1/3}$, то из (I8) и (30) следует, что для доказательства неравенства (3I) достаточно показать, что при $0<\rho<1$ и при всех $k=1,2,\dots$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{1+\rho^{12k}}{1+\rho^{12k-6}} \right)^2 > \left(\frac{1+\rho^{8k}}{1+\rho^{8k-4}} \right)^3. \tag{32}$$

Пусть

$$h(x) = \frac{(1+x^3)^2}{(1+x^2)^3} .$$

Полагая $\rho^{4K} = a$, $\rho^{4K-2} = b$, получаем, что (32) равносильно неравенству

$$h(a) > h(b) .$$

Так как $h(x)$ монотонно убывает на промежутке $[0,I]$, то последнее неравенство очевидно. Следовательно, теорема 2.I доказана. Легко видеть, что из теоремы 2.I следует теорема 2.2.

3°. Легко видеть, что при любом $m \geqslant 2$ симметричный континуум $E^{*}_{2m}(\rho)$ реализует локальный минимум функционала $d_{2m}(E)$ в семействе $\mathcal{E}_{2m}(\rho)$ при достаточно малых ρ и локальный максимум этого функционала при достаточно больших ρ из промежутка (0,I) (используем обозначения § I данной работы). Действительно, пусть

$$E = \{z : z^m \in E^{(h)}(0, Re^{i\alpha}, Re^{-i\alpha})\}, \qquad \text{где } 0 < R < 1 ,\ 0 < \alpha \leqslant \pi/2 .$$

Тогда (см.доказательство леммы I.I § I)

$$\{d_{2m}(E)\}^{m(2m-1)} \geqslant$$

$$\geqslant m^m R^{m-1} |\mathcal{D}(P_1(z))|^{m/2} = (2m)^m R^{2m-1} \sin^m \alpha .$$

Следовательно, при $0 < \varepsilon < \pi/2$

$$\{d_{2m}(\mathcal{E}_{2m}(\rho, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon))\}^{m(2m-1)} \geqslant (2m)^m \{R(\rho^m, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon)\}^{2m-1} \cos^m \varepsilon . \qquad (33)$$

По предложению I.2 § I имеем

$$R(\rho^m, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon) = R(\rho^m, \tfrac{\pi}{2})\{1 + [1 - R^4(\rho^m, \tfrac{\pi}{2})] A_2(R^2(\rho^m, \tfrac{\pi}{2}))\, \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\} .$$

Отсюда и из (33) получаем

$$\{d_{2m}(\mathcal{E}_{2m}(\rho, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon))\}^{m(2m-1)} \geqslant$$

$$\geqslant (2m)^m R^{2m-1} \{1 + [(2m-1)(1-R^4) A_2(R^2) - \tfrac{m}{2}]\, \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\}, \quad R = R(\rho^m, \tfrac{\pi}{2}). \qquad (34)$$

Учитывая предельные значения $A_2(r)$ при $r \to 0$ и $r \to 1$ (см. п.3° § I) и монотонный характер зависимости $R(\rho^m, \frac{\pi}{2})$ от ρ , из (34) получаем, что для любого $m \geqslant 2$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при достаточно малых $\rho > 0$

$$d_{2m}\left(\mathcal{E}_{2m}\left(\rho,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right) > d_{2m}\left(\mathcal{E}_{2m}\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)\right) = d_{2m}\left(E^*_{2m}(\rho)\right),$$

а при достаточно больших ρ из интервала (0,I)

$$d_{2m}\left(\mathcal{E}_{2m}\left(\rho,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right) < d_{2m}\left(E^*_{2m}(\rho)\right).$$

Нетрудно показать, что аналогичное замечание справедливо и по отношению к функционалу $\ell_{2m}(E)$ при любом $m \geqslant 2$.

Литература

I. T s u j i M. Some metrical theorems on Fuchsian group. -Jap. J.Math., 1947, vol.19, N 3, p.483-516.

2. T s u j i M. Potential theory in modern function theory. Tokyo, 1959. 509 p.

3. К у з ь м и н а Г.В. О конформном модуле в семействах двухсвязных областей, не содержащих заданных систем точек. - Зап. науч.семин.ЛОМИ, I972, т.24, с.78-I47.

4. К у з ь м и н а Г.В. Оценки конформного модуля одного семейства областей и теоремы покрытия для однолистных функций. - - Зап.науч.семин.ЛОМИ, I972, т.24, с.I48-I72.

5. Д ж е н к и н с Дж. Однолистные функции и конформные отображения. М., I962. 265 с. (Перевод с англ.).

6. К у з ь м и н а Г.В. Некоторые геометрические задачи, связанные с гиперболической емкостью. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, I974, т.44, с.4I-92.

7. К у з ь м и н а Г.В. Экстремальные свойства гиперболического трансфинитного диаметра и однолистные функции в кольце. - Тр. Мат.ин-та АН СССР, I968, т.94, с.66-78.

8. V o l k B. On the maximum Nth diameter. - Bull.Amer.Math. Soc., 1974, vol.80, N 3, p.446-448.

9. Б а х т и н А.К. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов. (АН УССР. Ин-т мат.Препринт ИМ-74-I8). Киев, I974.

I0.Б а х т и н А.К. Об n-х диаметрах континуумов. - В сб.. Некоторые вопросы соврем.теории функций. Новосибирск, I976, с. II-I7.

II.К у з ь м и н а Г.В. Задача о максимуме четвертого диаметра в семействе континуумов фиксированной емкости. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, I978, т.76, с.I67-209.

I2.G r ö t z s c h H. Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I,II. - Ber.Verh.Sächs.Akad.Wiss.Leipzig, Math.-Phys.Kl., 1928, Bd 80, S.367-376; 497-502.

9 1897

13. D u r e n P.L., S c h i f f e r M. A variational method for functions schlicht in an annulus. - Arch.Rat.Mech.Anal., 1962, vol.9, N 3, p.260-272.

14. S c h i f f e r M. A method of variation within the family of simple functions. - Proc.London Math.Soc., 1938, vol.44, p.432-449.

15. Ш и ф ф э р М. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений. Приложение к книге: К у р а н т Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М., 1953, с.234-301 (Перевод с англ.)

16. N e h a r i Z. Conformal mapping. New York-Toronto-London, 1952. 396 p.