И. П. Рязанцева, Об одном способе аппроксимации решений вариационных неравенств с монотонными отображениями в банаховом пространстве при приближенном задании данных, *Дифференц. уравнения*, 2004, том 40, номер 8, 1108–1117

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 8, с. 1108–1117

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.972.5

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С МОНОТОННЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ ЗАДАНИИ ДАННЫХ

© 2004 г. И. П. Рязанцева

Пусть X – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство [1, 2], X^* – его сопряженное, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между пространствами X и X^*, $A: X\to X^*$ – монотонный хеминепрерывный ограниченный оператор [3, с. 22–23], Ω – выпуклое замкнутое множество в $D(A)$, θ – нулевой элемент в X.

Предположим, что вариационное неравенство

$$\langle Ax-f, x-y\rangle\le 0 \quad \forall y\in\Omega, \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

для элемента $f\in X^*$ имеет непустое множество решений N.

Без дополнительных требований типа равномерной монотонности оператора A [4, с. 79] установить непрерывную зависимость решений задачи (1) от возмущений f, A и Ω не удается. Поэтому задачу (1) следует считать некорректной и для ее решения использовать какой-либо метод регуляризации. Будем аппроксимировать решения задачи (1) решениями эволюционных вариационных задач первого порядка, т.е. для решения задачи (1) будем применять непрерывный метод первого порядка. В работе [5] поставленная задача решена при условии, что множество Ω невозмущено. В данной работе предполагается, что f, A и Ω известны приближенно, причем возмущенной считается и область определения оператора A.

Пусть вместо f, A и Ω имеем семейства $\{f(t)\}$, $\{A(t)\}$ и $\{\Omega(t)\}$ соответственно, $t\ge t_0\ge 0$, причем

$$\|f-f(t)\|\le\delta(t), \tag{2}$$

$\delta(t)\ge 0$, $A(t): X\to X^*$ – монотонный хеминепрерывный оператор, $\Omega(t)$ – выпуклое замкнутое множество из $D(A(t))$.

Определение 1 [6]. Будем говорить, что семейство пар $\{(A(t),\Omega(t))\}$ аппроксимирует пару (A,Ω), если выполнены следующие условия:

а) для любого элемента $x\in\Omega$ при всех $t\ge t_0$ найдется элемент $z(t)\in\Omega(t)$ такой, что $\|x-z(t)\|\le a_1(\|x\|)\sigma(t)$, причем $\|Ax-A(t)z(t)\|\le g(\|x\|)h(t)$;

б) для всякого элемента $y(t)\in\Omega(t)$ при всех $t\ge t_0$ существует элемент $v(t)\in\Omega$, для которого $\|y(t)-v(t)\|\le a_2(\|y\|)\sigma(t)$, где $a_1(s)$, $a_2(s)$, $g(s)$ – неотрицательные ограниченные (т.е. переводящие ограниченное множество в ограниченное) функции, определенные при $s\ge 0$, $h(t)$ и $\sigma(t)$ – неотрицательные функции.

Заметим, что здесь не предполагается выполнение равенства $D(A)=D(A(t))$ при всех $t\ge t_0$.

Определение 2. Семейство операторов $\{A(t)\}$, $t\ge t_0$, будем называть ограниченным в совокупности, если для любого числа $M>0$ найдется $M_1(M)>0$ такое, что при $\|x\|\le M$ для всех $t\ge t_0$ выполняется неравенство $\|A(t)x\|\le M_1$.

Построим в X следующую эволюционную вариационную задачу:

$$\langle dJu(t)/dt, u(t)-y\rangle+\langle Ju(t)-Jy, du(t)/dt\rangle+$$

$$+\gamma(t)\langle A(t)u(t)+\alpha(t)Ju(t)-f(t), u(t)-y\rangle\le 0 \quad \forall y\in\Omega(t), \quad u(t)\in\Omega(t), \quad t>t_0, \tag{3}$$

$$u(t_0)=u_0\in\Omega(t_0). \tag{4}$$

Здесь $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ – положительные функции; $J: X \to X^*$ – нормализованное дуальное отображение в пространстве X [3, с. 311], т.е. $\|Jx\| = \|x\|$, $\langle Jx, x\rangle = \|x\|^2$ $\forall x \in X$.

Теорема. *Пусть X – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, X^* – его сопряженное, $A: X \to X^*$ – монотонный хеминепрерывный ограниченный оператор, Ω – выпуклое замкнутое множество из $D(A)$, вариационное неравенство (1) имеет непустое множество решений N, $\theta \notin N$, при всех $t \geq t_0 \geq 0$ элемент $f(t) \in X^*$, $A(t): X \to X^*$ – монотонный хеминепрерывный оператор, семейство отображений $\{A(t)\}$ ограничено в совокупности, $\Omega(t)$ – выпуклое замкнутое множество из $D(A(t))$, справедливо неравенство (2) и семейство $\{(A(t), \Omega(t))\}$ аппроксимирует пару (A, Ω) в смысле определения 1, $\alpha(t)$ – положительная убывающая выпуклая дифференцируемая функция,*

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0, \tag{5}$$

$\gamma(t)$ – невозрастающая положительная дифференцируемая функция. Пусть задача (3), (4) имеет единственное решение класса $C^1[t_0, +\infty)$ для произвольного элемента $u_0 \in \Omega(t_0)$, причем

$$\|u(t)\| \leq D, \quad D > 0, \quad \forall t \geq t_0. \tag{6}$$

При каждом $\tau \geq t_0$ построим вспомогательную эволюционную задачу с точными данными

$$\langle dJv(t,\tau)/dt, v(t,\tau) - y\rangle + \langle Jv(t,\tau) - Jy, dv(t,\tau)/dt\rangle +$$

$$+ \gamma(t)\langle Av(t,\tau) + \alpha(\tau)Jv(t,\tau) - f, v(t,\tau) - y\rangle \leq 0 \quad \forall y \in \Omega, \quad v(t,\tau) \in \Omega, \tag{7}$$

$$v(t_0, \tau) = u^0 \in \Omega \quad \forall \tau \geq t_0, \tag{8}$$

существование единственного решения класса $C^1[t_0, +\infty)$ которой предполагается.

1) Пусть геометрические свойства пространства X обеспечивают справедливость неравенств

$$\langle dJz(t)/dt, dz(t)/dt\rangle \geq \Psi(\|dz(t)/dt\|)\|dz(t)/dt\|, \tag{9}$$

$$\|dJz(t)/dt\| \leq \lambda\|dz(t)/dt\|, \quad \lambda > 0, \tag{10}$$

для $z(t) = u(t)$ и $z(t) = v(t,\tau)$ при всех t, $\tau \geq t_0$; здесь $\Psi(s)$ – неотрицательная непрерывная возрастающая функция при $s \geq 0$, $\Psi(0) = 0$.

2) Пусть внутренняя структура семейства множеств $\{\Omega(t)\}$ обладает следующим свойством: при всех $t \geq t_0$ для любого элемента $z(t) \in \Omega(t)$, $\|z(t)\| \leq D$, при достаточно малых $\Delta t > 0$ найдутся элемент $w(t, \Delta t) \in \Omega(t + \Delta t)$ и неотрицательные непрерывные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ такие, что:

а) $\|[z(t) - w(t,\Delta t)]/\Delta t\| \leq \xi(t)$,

б) $g_{X^*}^{-1}(L_2\xi(t)\Delta t)/\Delta t \leq \eta(t)$,

в) $\xi(t) \leq M$, $\eta(t) \leq M$ $\forall t \geq t_0$, $M > 0$, где $L_2 = 2Lb$, $b = 2\max\{1, 2D\}$, $g_{X^*}^{-1}(s)$ – функция, обратная $g_{X^*}(\varepsilon) = \delta_{X^*}(\varepsilon)/\varepsilon$, $\delta_{X^*}(\varepsilon)$ – модуль выпуклости пространства X^*, L – постоянная Фигеля, $1 < L < 3.18$.

Предположим, что параметрические функции $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ удовлетворяют условиям

3) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\delta(t) + h(t) + \sigma(t)}{\alpha(t)} = 0$,

4) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)\gamma(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)\alpha(t)} = 0$,

5) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{[\Psi^{-1}(C\chi(t)) + \xi(t)][g_{X^*}^{-1}(C\sigma(t)) + \sigma(t)]}{\tilde{\alpha}(t)} = 0$; *здесь* $\chi(t) = \xi(t) + \eta(t) + \gamma(t)$, $\tilde{\alpha}(t) = \gamma(t)\alpha(t)$, $C > 0$.

Тогда при $t \to +\infty$ решение эволюционной задачи (3), (4) при любых элементах $u_0 \in \Omega(t_0)$ и $u^0 \in \Omega$ стабилизируется по норме пространства X к нормальному решению вариационного неравенства (1).

Доказательство. Так как X – равномерно гладкое пространство, то X^* будет равномерно выпуклым [1], поэтому функция $g_{X^*}(\varepsilon)$ непрерывна, возрастает на $[0,2]$ и $g_{X^*}(0)=0$ [7]. Значит, существует $g_{X^*}^{-1}(s)$. Условия теоремы обеспечивают, очевидно, и существование функции, обратной $\Psi(s)$. В наших условиях множество N выпукло и замкнуто (см., например, [8, 9]), поэтому однозначно определяется нормальное решение вариационного неравенства (1), т.е. элемент x^* из N, имеющий минимальную норму. Для задачи (1) при условии (5) известна [8, 9] сильная сходимость операторного метода регуляризации вида

$$\langle Ax_\alpha(\tau)+\alpha(\tau)Jx_\alpha(\tau)-f, x_\alpha(\tau)-y\rangle \le 0 \quad \forall y\in\Omega, \quad x_\alpha(\tau)\in\Omega, \quad \tau\ge t_0,$$

к нормальному решению задачи (1), т.е.

$$\lim_{\tau\to+\infty}\|x_\alpha(\tau)-x^*\|=0. \tag{11}$$

Следовательно, можно считать, что $\|x_\alpha(\tau)\|\le d_1$ при всех $\tau\ge t_0$. В работе [5] при наших предположениях доказана справедливость соотношений

$$\lim_{\tau\to+\infty}\|v(\tau,\tau)-x_\alpha(\tau)\|=0, \tag{12}$$

$$\|v(t,\tau)\|\le d_2 \quad \forall t,\tau\ge t_0. \tag{13}$$

Далее, согласно определению 1, для элемента $v(t,\tau)\in\Omega$ найдется элемент $\tilde v(t,\tau)\in\Omega(t)$ такой, что

$$\|v(t,\tau)-\tilde v(t,\tau)\|\le a_1(\|v(t,\tau)\|)\sigma(t)\le c_1\sigma(t) \quad \forall t,\tau\ge t_0, \quad c_1>0, \tag{14}$$

$$\|Av(t,\tau)-A(t)\tilde v(t,\tau)\|\le g(\|v(t,\tau)\|)h(t)\le c_2h(t) \quad \forall t,\tau\ge t_0, \quad c_2>0. \tag{15}$$

Здесь мы учли (13) и ограниченность функций $a_1(s)$ и $g(s)$. Кроме того, для элемента $u(t)\in\Omega(t)$ построим элемент $\tilde u(t)\in\Omega$ такой, что

$$\|u(t)-\tilde u(t)\|\le a_2(\|u(t)\|)\sigma(t),$$

откуда с учетом (6) и ограниченности функции $a_2(s)$ имеем

$$\|u(t)-\tilde u(t)\|\le c_3\sigma(t) \quad \forall t\ge t_0, \quad c_3>0. \tag{16}$$

Теперь, положив в (7) $y=\tilde u(t)\in\Omega$, а в (3) $y=\tilde v(t,\tau)\in\Omega(t)$ и сложив полученные неравенства, установим, что

$$\begin{aligned}&\langle dJv(t,\tau)/dt, v(t,\tau)-\tilde u(t)\rangle+\langle Jv(t,\tau)-J\tilde u(t), dv(t,\tau)/dt\rangle+\langle dJu(t)/dt, u(t)-\tilde v(t,\tau)\rangle+\\&+\langle Ju(t)-J\tilde v(t,\tau), du(t)/dt\rangle+\gamma(t)\langle Av(t,\tau)+\alpha(\tau)Jv(t,\tau)-f, v(t,\tau)-\tilde u(t)\rangle+\\&+\gamma(t)\langle A(t)u(t)+\alpha(t)Ju(t)-f(t), u(t)-\tilde v(t,\tau)\rangle\le 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Для неотрицательной функции [3, с. 313]

$$\rho(t,\tau)=\langle Ju(t)-Jv(t,\tau), u(t)-v(t,\tau)\rangle \tag{18}$$

найдем

$$\begin{aligned}d\rho(t,\tau)/dt&=\langle dJu(t)/dt-dJv(t,\tau)/dt, u(t)-v(t,\tau)\rangle+\\&+\langle Ju(t)-Jv(t,\tau), du(t)/dt-dv(t,\tau)/dt\rangle.\end{aligned} \tag{19}$$

Далее, поскольку $u(t)\in D(A(t))$ и $\tilde v(t,\tau)\in\Omega(t)\subset D(A(t))$, то свойство монотонности оператора $A(t)$ позволяет записать неравенство

$$\langle A(t)u(t)-A(t)\tilde v(t,\tau), u(t)-\tilde v(t,\tau)\rangle\ge 0.$$

Используя (18), (19) и последнее неравенство, из (17) получаем

$$d\rho(t,\tau)/dt \le -\tilde{\alpha}(t)\rho(t,\tau) + Q(t,\tau), \tag{20}$$

где скалярная функция $Q(t,\tau)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} Q(t,\tau) = {} & \langle dJv(t,\tau)/dt, \tilde{u}(t) - u(t)\rangle + \langle J\tilde{u}(t) - Ju(t), dv(t,\tau)/dt\rangle + \langle dJu(t)/dt, \tilde{v}(t,\tau) - v(t,\tau)\rangle + \\ & + \langle J\tilde{v}(t,\tau) - Jv(t,\tau), du(t)/dt\rangle + \tilde{\alpha}(t)\langle Ju(t), \tilde{v}(t,\tau) - v(t,\tau)\rangle + \\ & + \gamma(t)[\alpha(\tau) - \alpha(t)]\langle Jv(t,\tau), u(t) - v(t,\tau)\rangle + \gamma(t)\alpha(\tau)\langle Jv(t,\tau), \tilde{u}(t) - u(t)\rangle + \\ & + \gamma(t)\langle f(t) - f, u(t) - v(t,\tau)\rangle + \gamma(t)\langle f(t), v(t,\tau) - \tilde{v}(t,\tau)\rangle + \gamma(t)\langle f, u(t) - \tilde{u}(t)\rangle + \\ & + \gamma(t)\langle A(t)\tilde{v}(t,\tau) - Av(t,\tau), \tilde{v}(t,\tau) - u(t)\rangle + \gamma(t)\langle Av(t,\tau), \tilde{v}(t,\tau) - v(t,\tau) + \tilde{u}(t) - u(t)\rangle. \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что из условий (5) и 3) вытекает сходимость функции $\sigma(t)$ к нулю при $t \to +\infty$, а значит, верно неравенство

$$\sigma(t) \le \bar{\sigma} \quad \forall t \ge t_0, \quad \bar{\sigma} > 0. \tag{22}$$

Теперь на основании неравенств (6), (13), (14) и (16) делаем вывод о существовании постоянных $d_3 > 0$, $d_4 > 0$ таких, что

$$\|\tilde{v}(t,\tau)\| \le d_3, \quad \|\tilde{u}(t)\| \le d_4 \quad \forall t,\tau \ge t_0. \tag{23}$$

Далее, учитывая соотношения (2), (5), (6), (13)–(16), (23) и ограниченность оператора A, из (21) получаем оценку

$$\begin{aligned} Q(t,\tau) \le {} & \|dJv(t,\tau)/dt\|\,\|\tilde{u}(t) - u(t)\| + \|J\tilde{u}(t) - Ju(t)\|\,\|dv(t,\tau)/dt\| + \\ & + \|dJu(t)/dt\|\|\tilde{v}(t,\tau) - v(t,\tau)\| + \|J\tilde{v}(t,\tau) - Jv(t,\tau)\|\|du(t)/dt\| + \\ & + c_4\gamma(t)[\delta(t) + h(t) + \sigma(t) + |\alpha(t) - \alpha(\tau)|], \quad c_4 > 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Известно [8], что в любом равномерно гладком банаховом пространстве дуальное отображение J обладает свойством

$$\|Jx - Jy\| \le b_1 g_{X^*}^{-1}(2b_1 L\|x-y\|), \tag{25}$$

$b_1 = 2\max\{1, \|x\|, \|y\|\}$. Следовательно, справедливы неравенства

$$\|Ju(t) - J\tilde{u}(t)\| \le b_2 g_{X^*}^{-1}(2b_2 L\|u(t) - \tilde{u}(t)\|) \le b_2 g_{X^*}^{-1}(\tilde{b}_2\sigma(t)), \tag{26}$$

$$\|Jv(t,\tau) - J\tilde{v}(t,\tau)\| \le b_3 g_{X^*}^{-1}(2b_3 L\|v(t,\tau) - \tilde{v}(t,\tau)\|) \le b_3 g_{X^*}^{-1}(\tilde{b}_3\sigma(t)). \tag{27}$$

Здесь мы учли оценки (14), (16), (22) и приняли

$$b_2 = 2\max\{1, D + c_3\bar{\sigma}\}, \quad \tilde{b}_2 = 2Lb_2c_3, \quad b_3 = 2\max\{1, d_2 + c_1\bar{\sigma}\}, \quad \tilde{b}_3 = 2Lb_3c_1.$$

Теперь для получения необходимой оценки сверху для функции $Q(t,\tau)$ осталось оценить сверху величины

$$\|dv(t,\tau)/dt\|, \quad \|dJv(t,\tau)/dt\|, \quad \|du(t)/dt\|, \quad \|dJu(t)/dt\|. \tag{28}$$

Оценки первых двух величин из (28) найдем с помощью следующих несложных действий. Поскольку $v(t,\tau) \in \Omega$ при всех $t \ge t_0$, $\tau \ge t_0$, то можно в (7) положить $y = v(t+\Delta t,\tau)$, $\Delta t < 0$. Тогда (7) дает неравенство

$$\left\langle \frac{dJv(t,\tau)}{dt}, \frac{v(t+\Delta t,\tau) - v(t,\tau)}{\Delta t} \right\rangle + \left\langle \frac{Jv(t+\Delta t,\tau) - Jv(t,\tau)}{\Delta t}, \frac{dv(t,\tau)}{dt} \right\rangle +$$

$$+\gamma(t)\left\langle Av(t,\tau)+\alpha(\tau)Jv(t,\tau)-f,\frac{v(t+\Delta t,\tau)-v(t,\tau)}{\Delta t}\right\rangle \le 0.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta t\to 0-$, получаем неравенство

$$2\langle dJv(t,\tau)/dt,dv(t,\tau)/dt\rangle+\gamma(t)\langle Av(t,\tau)+\alpha(\tau)Jv(t,\tau)-f,dv(t,\tau)/dt\rangle\le 0\quad \forall t,\tau\ge t_0.$$

Ограниченность оператора A, определение отображения J и соотношения (5) и (13) позволяют из последнего неравенства вывести неравенство

$$\langle dJv(t,\tau)/dt,dv(t,\tau)/dt\rangle\le c_5\gamma(t)\|dv(t,\tau)/dt\|,\quad c_5>0,$$

откуда, используя условие (9) теоремы при $z(t)=v(t,\tau)$, приходим к оценке

$$\Psi(\|dv(t,\tau)/dt\|)\le c_5\gamma(t),$$

т.е.

$$\|dv(t,\tau)/dt\|\le\Psi^{-1}(c_5\gamma(t))\quad\forall t,\tau\ge t_0. \tag{29}$$

Теперь условие (10) теоремы и (29) обеспечивают справедливость неравенства

$$\|dJv(t,\tau)/dt\|\le\lambda\Psi^{-1}(c_5\gamma(t))\quad\forall t,\tau\ge t_0. \tag{30}$$

Зададим достаточно малое $\Delta t>0$ и на основании свойства 2) внутренней структуры семейства множеств $\{\Omega(t)\}$ для элемента $u(t-\Delta t)\in\Omega(t-\Delta t)$ построим элемент $w(t,\Delta t)\in\Omega(t)$ такой, что

$$\left\|\frac{u(t-\Delta t)-w(t,\Delta t)}{\Delta t}\right\|\le\xi(t-\Delta t), \tag{31}$$

$$\frac{g_{X^*}^{-1}(L_2\xi(t-\Delta t)\Delta t)}{\Delta t}\le\eta(t-\Delta t), \tag{32}$$

причем функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ обладают свойством в). Положив в (3) $y=w(t,\Delta t)$ и поделив полученное неравенство на $-\Delta t$, имеем

$$\left\langle\frac{dJu(t)}{dt},\frac{u(t-\Delta t)-u(t)}{-\Delta t}+\frac{w(t,\Delta t)-u(t-\Delta t)}{-\Delta t}\right\rangle+$$
$$+\left\langle\frac{Ju(t-\Delta t)-Ju(t)}{-\Delta t}+\frac{Jw(t,\Delta t)-Ju(t-\Delta t)}{-\Delta t},\frac{du(t)}{dt}\right\rangle+$$
$$+\gamma(t)\left\langle A(t)u(t)+\alpha(t)Ju(t)-f(t),\frac{u(t-\Delta t)-u(t)}{-\Delta t}+\frac{w(t,\Delta t)-u(t-\Delta t)}{-\Delta t}\right\rangle\le 0. \tag{33}$$

Свойство (25) дуального отображения J, возрастание функции $g_{X^*}^{-1}(s)$ и неравенства (31) и (32) обеспечивают при достаточно малых Δt справедливость следующих неравенств:

$$\left\|\frac{Ju(t-\Delta t)-Jw(t,\Delta t)}{\Delta t}\right\|\le b\frac{g_{X^*}^{-1}(L_2\|u(t-\Delta t)-w(t,\Delta t)\|)}{\Delta t}\le$$
$$\le b\frac{g_{X^*}^{-1}(L_2\xi(t-\Delta t)\Delta t)}{\Delta t}\le b\eta(t-\Delta t). \tag{34}$$

Теперь, переходя к пределу при $\Delta t\to 0+$ в неравенстве (33) и принимая при этом во внимание оценки (31), (34), (6), а также ограниченность в совокупности семейства операторов $\{A(t)\}$ и непрерывность функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$, приходим к неравенству

$$2\langle dJu(t)/dt,du(t)/dt\rangle\le$$

$$\leq \xi(t)\|dJu(t)/dt\| + b\eta(t)\|du(t)/dt\| + c_6\gamma(t)(\|du(t)/dt\| + \xi(t)), \quad c_6 > 0. \tag{35}$$

Благодаря условиям (9), (10) теоремы при $z(t) = u(t)$ из (35) выводим неравенство

$$\Psi(\|du(t)/dt\|)\|du(t)/dt\| \leq c_7\chi(t)\|du(t)/dt\| + c_6\gamma(t)\xi(t), \quad c_7 > 0, \tag{36}$$

где $\chi(t) = \xi(t)+\eta(t)+\gamma(t)$. При каждом $t \geq t_0$ возможны следующие ситуации: I) $\|du(t)/dt\| \leq \xi(t)$, II) $\|du(t)/dt\| > \xi(t)$.

В предположении II) из (36) после сокращения на $\|du(t)/dt\|$ имеем $\Psi(\|du(t)/dt\|) \leq c_8\chi(t)$, $c_8 > 0$, т.е. $\|du(t)/dt\| \leq \Psi^{-1}(c_8\chi(t))$. Объединяя I) с последним неравенством, получим

$$\|du(t)/dt\| \leq \Psi^{-1}(c_8\chi(t)) + \xi(t). \tag{37}$$

Теперь, благодаря предположению (10), запишем оценку

$$\|dJu(t)/dt\| \leq \lambda[\Psi^{-1}(c_8\chi(t)) + \xi(t)]. \tag{38}$$

Следовательно, в силу неравенств (26), (27), (29), (30), (37), (38) из (24) для $Q(t,\tau)$ установлена оценка сверху вида

$$Q(t,\tau) \leq c_9[\beta(t) + \gamma(t)|\alpha'(t)(t-\tau)|] \quad \forall t,\tau \geq t_0, \quad c_9 > 0;$$

здесь $\beta(t) = [\Psi^{-1}(c_{10}\chi(t)) + \xi(t)][g_{X^*}^{-1}(\tilde{b}\sigma(t)) + \sigma(t)] + \gamma(t)[\delta(t) + h(t) + \sigma(t)]$, $c_{10} = \max\{c_5, c_8\}$, $\tilde{b} = \max\{\tilde{b}_2, \tilde{b}_3\}$, при этом мы также учли неравенство [10, с. 266] $|\alpha(t) - \alpha(\tau)| \leq |\alpha'(t)(t-\tau)|$.

Таким образом, от неравенства (20) приходим к неравенству

$$d\rho(t,\tau)/dt \leq -\tilde{\alpha}(t)\rho(t,\tau) + c_9[\beta(t) + \gamma(t)|\alpha'(t)(t-\tau)|], \tag{39}$$

причем из (4), (8) и (18) имеем

$$\rho(t_0,\tau) = \langle Ju^0 - Ju_0, u^0 - u_0\rangle = C_0 \geq 0 \quad \forall \tau \geq 0. \tag{40}$$

Лемма 1 из [10, с. 264] на основании (39), (40) позволяет записать оценку

$$\rho(t,\tau) \leq C_0E(t,t_0) + c_9\int\limits_{t_0}^{t}[\beta(\theta) + \gamma(\theta)|\alpha'(\theta)(\theta-\tau)|]E(t_0,\theta)\,d\theta/E(t_0,t),$$

где $E(a,b) = \exp\int_a^b \tilde{\alpha}(s)\,ds$. Значит,

$$\rho(\tau,\tau) \leq C_0E(\tau,t_0) + c_9\int\limits_{t_0}^{\tau}[\beta(\theta) + \gamma(\theta)|\alpha'(\theta)(\theta-\tau)|]E(t_0,\theta)\,d\theta/E(t_0,\tau). \tag{41}$$

В работе [5] установлено, что при выполнении (5) и 4)

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}\tilde{\alpha}(t)\,dt = +\infty, \tag{42}$$

что обеспечивает стремление к нулю при $\tau \to +\infty$ первого слагаемого в правой части (41). Кроме того, подобно [5], на основании условий теоремы (5), 3)–5) и свойства (42) функции $\tilde{\alpha}(t)$ установим, что и второе слагаемое в правой части (41) стремится к нулю при $\tau \to +\infty$. Значит, из (41) вытекает, что $\rho(\tau,\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Известное (см. [8]) свойство дуального отображения

$$\langle Jx - Jy, x - y\rangle \geq (2L)^{-1}\delta_X(\|x-y\|/b_1),$$

$b_1 = 2\max\{1, \|x\|, \|y\|\}$, дает неравенство

$$(2L)^{-1}\delta_X(\|u(\tau) - v(\tau,\tau)\|/b_4) \leq \rho(\tau,\tau) \tag{43}$$

при $b_4 = 2\max\{1, D, d_2\}$. Так как модуль выпуклости $\delta_X(\varepsilon)$ равномерно выпуклого пространства есть непрерывная возрастающая функция и $\delta_X(0) = 0$, то неравенство (43) обеспечивает сходимость

$$\lim_{\tau\to\infty} \|u(\tau) - v(\tau,\tau)\| = 0. \tag{44}$$

Теперь утверждение теоремы следует из неравенства

$$\|u(\tau) - x^*\| \leq \|u(\tau) - v(\tau,\tau)\| + \|v(\tau,\tau) - x_\alpha(\tau)\| + \|x_\alpha(\tau) - x^*\|$$

и доказанных соотношений (11), (12) и (44).

Замечание 1. Если $\Omega \subseteq \Omega(t)$ при всех $t \geq t_0$ (внешняя аппроксимация), то в доказательстве теоремы можно принять $\tilde{v}(t,\tau) = v(t,\tau)$. Тогда третье и четвертое слагаемые в правой части (21) обращаются в нуль, и необходимость в получении оценок (37) и (38) отпадает. Также равно нулю и предпоследнее слагаемое в (21). Значит, утверждение теоремы имеет место в этом случае без предположения 2), без выполнения неравенств (9), (10) для $z(t) = u(t)$ и без требования ограниченности в совокупности семейства операторов $\{A(t)\}$, а условие 5) принимает более простой вид

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Psi^{-1}(C\gamma(t))[g_{X^*}^{-1}(C\sigma(t)) + \sigma(t)]}{\tilde{\alpha}(t)} = 0, \tag{45}$$

т.е. в 5) следует принять $\xi(t) = \eta(t) = 0$.

Пусть имеет место внутренняя аппроксимация Ω семейством множеств $\{\Omega(t)\}$, т.е. $\Omega(t) \subseteq \Omega$ при всех $t \geq t_0$. Будем считать также, что семейство множеств $\{\Omega(t)\}$ не сужается, т.е. $\Omega(t_1) \subseteq \Omega(t_2)$ при $t_1 < t_2$ для любых $t_1, t_2 \geq t_0$. Тогда при $\Delta t < 0$ в (3) можно принять $y = u(t + \Delta t)$, что позволит установить неравенство

$$\langle dJu(t)/dt, du(t)/dt\rangle \leq \tilde{c}_5\gamma(t)\|du(t)/dt\|, \quad \tilde{c}_5 > 0.$$

Поэтому оценки (37) и (38) при нашем предположении примут соответственно вид

$$\|du(t)/dt\| \leq \Psi^{-1}(\tilde{c}_5\gamma(t)), \quad \|dJu(t)/dt\| \leq \lambda\Psi^{-1}(\tilde{c}_5\gamma(t)).$$

Утверждение теоремы будет справедливо без предположения 2) с заменой 5) на условие (45).

Приведем примеры банаховых пространств, геометрии которых удовлетворяют условиям теоремы. Пусть $X = L^p(G)$, $1 < p < 2$, тогда $X^* = L^q(G)$, $1/p + 1/q = 1$, $q > 2$, $\delta_{X^*}(s) \geq ds^q$, $d > 0$ [1, 8] и $g_{X^*}(s) \geq ds^{q-1}$. Следовательно,

$$g_{X^*}^{-1}(\tau) \leq \tilde{d}\tau^{p-1}, \quad \tilde{d} > 0. \tag{46}$$

Если $p > 2$, то $1 < q < 2$ и $\delta_{X^*}(s) = \bar{M}s^2$, $\bar{M} > 0$ [1, 8], т.е.

$$g_{X^*}^{-1}(\tau) = \tilde{M}\tau, \quad \tilde{M} > 0. \tag{47}$$

Справедливость свойства (10) в пространствах Лебега по крайней мере при $p > 3$ установлена в [11]. При $1 < p < 2$ неравенство (9) имеет место при $\Psi(s) = ms$, $m > 0$, для любой дифференцируемой функции $z(t)$ [12], а при $p > 2$ для произвольной функции $z(t)$ установить неравенство (9) не удается. Далее, из (46) следует, что условие 6) теоремы в $L^p(G)$

при $p \in (1,2)$ выполняться не может. При $p > 2$ требование б) имеет место, и в силу (47) условие 5) принимает вид

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{[\Psi^{-1}(C\chi(t)) + \xi(t)]\sigma(t)}{\tilde{\alpha}(t)} = 0. \tag{48}$$

Укажем примеры функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы в $L^p(G)$, $p > 2$.

Пусть $\gamma(t) = \gamma > 0$,

$$\alpha(t) = t^{-\alpha}, \quad \delta(t) = t^{-\delta}, \quad h(t) = t^{-h}, \quad \sigma(t) = t^{-\sigma}, \tag{49}$$

где α, δ, h, σ – положительные числа, $t_0 > 0$. Тогда условие (48) справедливо, если

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma(t)}{\alpha(t)} = 0, \tag{50}$$

т.е. условие 5) вытекает из 3). Нетрудно проверить, что условия 3) и 4) будут выполняться, если

$$\alpha < \max\{\delta, h, \sigma\}, \quad \alpha \in (0,1). \tag{51}$$

Пусть верно (49) и $\gamma(t) = t^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Тогда условия (51) принимают вид

$$\alpha < \max\{\delta, h, \sigma\}, \quad \alpha + \gamma \in (0,1). \tag{52}$$

Если при этом функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ обладают свойством $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$ и $\xi(t) = t^{-\xi}$, $\eta(t) = t^{-\eta}$, то требования (52) необходимо дополнить следующим предельным равенством (см. (48))

$$\lim_{t\to\infty} [\Psi^{-1}(t^{-\mu}) + t^{-\xi}] t^{\alpha+\gamma-\sigma} = 0;$$

здесь $\mu = \min\{\xi, \eta, \gamma\}$.

Подобные рассуждения имеют место и для пространств $X = l^p$, $X = W^p_m(G)$, $p > 1$, $m > 0$ (см. [1, 8]).

Пример. Некоторые задачи механики (см., например, [13, § 3.2]) сводятся к решению вариационного неравенства

$$\langle Aw, w - u\rangle \le 0 \quad \forall u \in \Omega, \quad w \in \Omega, \tag{53}$$

где множество $\Omega = \{v|\ \ v(x) \in X,\ v(x) \le \phi(x)$ при почти всех $x \in [0,l]\}$, $\phi(x)$ – некоторая фиксированная функция, пространство $X = \{v|\ \ v = v(x),\ \ x \in [0,l],\ \ v(x) \in W^p_2[0,l],\ \ v(0) = v(l) = v'(0) = v'(l) = 0\}$ с нормой $\|v\| = (\int_0^l |v''(x)|^p\,dx)^{1/p}$.

Нелинейный оператор $A : X \to X^*$ определяется равенством

$$\langle Aw, v\rangle = \int\limits_0^l a(x, w''(x))v''(x)\,dx \quad \forall w, v \in X; \tag{54}$$

здесь функция $a(x,s)$ измерима по $x \in [0,l]$ при всех $s \in R^1$, непрерывна и не убывает по s при почти всех $x \in [0,l]$,

$$|a(x,s)| \le c(b(x) + |s|^{p-1}), \quad c > 0, \quad b(x) \in L^{p'}[0,l], \quad p' = p/(p-1), \quad p > 2.$$

В этих условиях равенство (54) определяет хеминепрерывный монотонный оператор $A : X \to X^*$ (см., например, [3, с. 109, 370; 4, гл. III]).

Пусть возмущенное множество имеет вид

$$\Omega(t) = \{v|\ v(x) \in X,\ v(x) \le \tilde{\phi}(x,t) \text{ при почти всех } x \in [0,l]\},$$

причем естественно потребовать, что $\|\phi(x) - \tilde{\phi}(x,t)\| \leq \sigma(t)$. Однако этого неравенства недостаточно для получения оценок (14), (16). Приняв во внимание неравенство Фридрихса [4, с. 44], можно установить подобные оценки только в нормах пространства $L^p[0,l]$. Определяющей характеристикой системы, описываемой вариационным неравенством (53), является величина $w''(x)$, модуль которой в рамках изучаемой модели совпадает с кривизной кривой $y = w(x)$. Этот факт подсказал, как решить возникшую проблему путем изменения постановки задачи, не нарушая основных требований из [13]. А именно вместо Ω и $\Omega(t)$ введем более узкие множества

$$\Omega' = \{v|\ v(x) \in \Omega,\ v''(x) \leq \phi_1(x) \text{ при почти всех } x \in [0,l]\},$$

$$\Omega'(t) = \{v|\ v(x) \in \Omega(t),\ v''(x) \leq \tilde{\phi}_1(x,t) \text{ при почти всех } x \in [0,l]\},$$

причем $\|\phi_1(x) - \tilde{\phi}_1(x,t)\|_p \leq \sigma(t)$, где $\|\cdot\|_p$ – норма в пространстве $L^p[0,l]$. Тогда, очевидно, неравенства (14) и (16) имеют место при $a_1(s) = a_2(s) \equiv 1$.

Пусть возмущенный оператор $A(t) : X \to X^*$ определяется следующей формулой:

$$\langle A(t)w, v\rangle = \int\limits_0^l \tilde{a}(x, w''(x), t)v''(x)\,dx \quad \forall w, v \in X,$$

где $\tilde{a}(x,s,t)$ при каждом фиксированном t есть функция того же класса, что и $a(x,s)$, причем i) $\|a(x,u''(x)) - \tilde{a}(x,u''(x),t)\|_p \leq \tilde{h}(t)q(\|u\|)$, ii) $|\tilde{a}'_s(x,s,t)| \leq \tilde{c}[b_1(x) + |s|^{p-2}]$; здесь $\tilde{c} > 0$, $b_1(x) \in L^{p''}[0,l]$, $p'' = p/(p-2)$, $q(s)$ – функция, обладающая теми же свойствами, что и функция $g(s)$ из определения 1. Тогда на основании предположения i) имеем

$$\|A(t)u - Au\| \leq \tilde{h}(t)q(\|u\|). \tag{55}$$

Отметим, что в наших условиях $D(A) = D(A(t)) = X$ при всех $t \geq t_0$. Применив формулу Лагранжа, дважды неравенство Гёльдера, интегральное неравенство Минковского и учитывая ii), при $u, v, w \in X$ запишем цепочку соотношений (сравните с [4, с. 91])

$$\langle A(t)w - A(t)u, v\rangle = \int\limits_0^l [\tilde{a}(x, w''(t), t) - \tilde{a}(x, u''(t), t)]v''(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^l \tilde{a}'_s(x, w''(t) + \theta(u''(x) - w''(x)), t)(w''(x) - u''(x))v''(x)\,dx \leq$$

$$\leq \|v\|\left(\int\limits_0^l |\tilde{a}'_s(x, w''(t) + \theta(u''(x) - w''(x)), t)|^{p'}|w''(x) - u''(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq \tilde{c}\|v\|\,\|w - v\|\left(\int\limits_0^l [b_1(x) + |w''(x) + \theta(u''(x) - w''(t))|^{p-2}]^{p''}\,dx\right)^{1/p''} \leq$$

$$\leq \tilde{c}\|v\|\,\|w - v\|\left[\left(\int\limits_0^l |b_1(x)|^{p''}\,dx\right)^{1/p''} + \left(\int\limits_0^l |w''(x)|^p\,dx\right)^{1/p''} + \left(\int\limits_0^l |u''(x)|^p\,dx\right)^{1/p''}\right] \leq$$

$$\leq \tilde{c}\|v\|\,\|w - v\|(m + 2R^{p-2});$$

здесь $m = \|b_1(x)\|_{p''}$; $R = \max\{\|w\|, \|u\|\}$; $0 < \theta(v) < 1$. Отсюда получаем оценку

$$\|A(t)w - A(t)u\| \leq \tilde{c}(m + 2R^{p-2})\|w - v\|. \qquad (56)$$

Пусть $u \in \Omega$, $w \in \Omega(t)$ и $\|u - w\| \leq \sigma(t)$, тогда на основании неравенств (22), (55) и (56) имеем

$$\|A(t)w - Au\| \leq \|A(t)w - A(t)u\| + \|A(t)u - Au\| \leq [\tilde{c}(m + 2(\|u\| + \bar{\sigma})^{p-2}) + q(\|u\|)][\tilde{h}(t) + \sigma(t)],$$

т.е. неравенство (15) справедливо при $g(s) = \tilde{c}(m + 2(s + \bar{\sigma})^{p-2}) + q(s)$, $h(t) = \tilde{h}(t) + \sigma(t)$. Если предположить, что $\|\tilde{\phi}_1(x,t) - \tilde{\phi}_1(x, t + \Delta t)\|_p \leq \Gamma(t)\Delta t$, $\Delta t > 0$, где $\Gamma(t)$ – неотрицательная непрерывная функция, $\Gamma(t) \leq \Gamma_0$ при всех $t \geq t_0$, то нетрудно проверить, что условие 2) теоремы выполняется при $\xi(t) = \Gamma(t)$, $\eta(t) = L_2\tilde{M}\Gamma(t)$.

Пример семейства $\{(A(t), \Omega(t))\}$, $\Omega(t) = D(A(t)) \neq X$, удовлетворяющего определению 1, построен в работе [6].

Если оператор A потенциальный, то вариационное неравенство (1) эквивалентно задаче условной минимизации [14, с. 145]. Другие способы построения непрерывных методов для задач условной минимизации в гильбертовом пространстве можно найти в работах [15, 16]. Преимущества непрерывных методов отмечались в [17].

Из доказанной теоремы вытекает утверждение из работы [18] о сходимости непрерывного метода первого порядка в гильбертовом пространстве для уравнения $Ax = f$ (см. замечание 2 из [5]).

Вопрос об однозначной разрешимости задач (3), (4) и (7), (8) может служить темой отдельных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дистель Д.* Геометрия банаховых пространств. Киев, 1980.
2. *Figiel T.* // Studia Math. 1976. V. 56. № 2. P. 121–155.
3. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972.
4. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
5. *Рязанцева И.П.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 113–117.
6. *Alber Ya., Butnariu D., Ryazantseva I.* // J. Nonl. and Conv. Anal. 2001. V. 2. № 1. P. 53–79.
7. *Lindenstraus J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II. Berlin; Heidelberg; New York, 1979.
8. *Альбер Я.И.* Методы решения нелинейных операторных уравнений и вариационных неравенств в банаховых пространствах: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Горький, 1985.
9. *Рязанцева И.П.* Устойчивые методы решения нелинейных монотонных некорректных задач: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 1996.
10. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
11. *Рязанцева И.П., Бубнова О.Ю.* // Тр. Средневолж. мат. о-ва. 2002. Т. 3–4. № 1. С. 327–334.
12. *Alber Ya.I.* // Nonlinear Analysis: Theor., Meth. and Appl. 1994. V. 23. № 9. P. 1115–1134.
13. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М., 1997.
14. *Kluge R.* Nichtlinear Variationsungleihungen und Extremalaufgaben. Berlin, 1974.
15. *Васильев Ф.П., Амочкина Т.В., Недич А.* // Вест. МГУ. Сер. 15. 1995. № 3. С. 39–46.
16. *Васильев Ф.П., Недич А.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2033–2042.
17. *Антипин А.С.* // Вопросы кибернетики. Вычислит. вопросы анализа больших систем. М., 1989. С. 5–43.
18. *Альбер Я.И., Рязанцева И.П.* // Тез. докл. Всесоюз. конф. по экстремальным задачам и их приложениям. Таллин, 1973. С. 18–19.

Нижегородский государственный
технический университет

Поступила в редакцию
28.04.2003 г.