В. Г. Романов, Устойчивость в обратных задачах для гиперболических уравнений, *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2010, том 7, 4–10

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
Часть I, стр. C.4–C.10 (2010)

УДК 517.958
MSC 35R30

УСТОЙЧИВОСТЬ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.Г. РОМАНОВ

Abstract. Methods for investigations of a stability of inverse problems for hyperbolic differential equations are presented. These methods are demonstrated for some one-dimensional and multidimensional problems.

Keywords: inverse problems, Cauchy problem, stability estimates.

1. Введение

Ниже рассматриваются методы получения оценок устойчивости решений обратных задач для гиперболических уравнений. Эти оценки устойчивости важны как сами по себе, так как характеризуют степень устойчивости решения задач, так и для построении численных алгоритмов решения обратных задач. В вычислительном отношении довольно часто решение обратной задачи удобно трактовать как минимум некоторого функционала невязки. Если для рассматриваемой задачи построена оценка устойчивости решений в терминах норм некоторых гильбертовых пространств, то удобно в качестве такого функционала взять квадрат нормы (соответствующий правой части в оценке устойчивости) невязки между решением прямой задачи и данными обратной задачи. Такой функционал позволяет достаточно просто контролировать точность решения обратной задачи в процессе ее решения.

Romanov V.G., Stability in inverse problem for hyperbolic equations.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00312) и Сибирского отделения РАН (совместный проект СО РАН и ДВО РАН – 2009 – № 93).

Поступила 21 декабря 2009 г.

2. **Одномерные обратные задачи**

Пусть функция $u(x,t)$, удовлетворяет соотношениям

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u|_{t<0} = 0, \quad u|_{x=0} = \delta(t) + f(t)\theta_0(t). \tag{2}$$

Здесь $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$. В предположении, что $q \in \mathbf{C}[0,\infty)$, $f \in \mathbf{C}^1[0,\infty)$, рассмотрим задачу об определении коэффициента $q(x)$ по следующей информации о решении задачи (1), (2):

$$u_x|_{x=0} = g(t), \quad t \in (0,T], \quad T > 0. \tag{3}$$

В дальнейшем речь будет идти только об устойчивости решения этой задачи. При этом необходимо выбрать некоторое ограниченное множество решений, т.е. множество $Q = \{q(x)\}$, для которого и будет справедлива построенная оценка устойчивости. В качестве такого множества возьмем

$$Q = \{q(x) \in \mathbf{C}[0,T/2], \|q\|_{\mathbf{C}[0,T/2]} \leq q_0\}, \quad q_0 > 0.$$

Предположим также, что $f(t) \in F$, $F = \{f(t) \in \mathbf{C}^1[0,T], \|f\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} \leq f_0\}$. Пусть $D = \{(x,t) |\, 0 \leq x \leq T/2, x \leq t \leq T - x\}$.

Решение задачи (1), (2) представимо в виде

$$u(x,t) = \delta(t-x) + \bar{u}(x,t)\theta_0(t-x), \quad \|\bar{u}\|_{\mathbf{C}^1(D)} \leq u_0, \tag{4}$$

в котором $u_0 = u_0(q_0, f_0)$.

На характеристике $t = x$ функция $\bar{u}(x,t)$ связана с искомым коэффициентом некоторым соотношением. Чтобы его найти, достаточно функцию $u(x,t)$ представить в виде

$$u(x,t) = \delta(t-x) + \theta_0(t-x)[\alpha_0(x) + (t-x)\alpha_1(x) + \ldots]$$

и подставить ее в равенство (1). При этом коэффициент при $\delta(t-x)$ в получающемся равенстве дает соотношение для определения $\alpha_0(x) = \bar{u}(x,x) = u(x,x+0)$. Это соотношение имеет вид

$$2\frac{d\alpha_0(x)}{dx} = 2(u_t + u_x)_{t=x} = -q(x). \tag{5}$$

Перейдем к построению оценки. Пусть $q_k \in Q$, $f_k \in F$, $k = 1,2$. Обозначим соответствующие им решения задачи (1), (2) через $u_k(x,t)$, а следы их производных по x на отрезке $(0,T]$ оси $x = 0$ через g_k. Введем разности

$$q_1 - q_2 = \tilde{q}, \quad u_1 - u_2 = \tilde{u}, \quad f_1 - f_2 = \tilde{f}, \quad g_1 - g_2 = \tilde{g}.$$

Тогда

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} + q_1(x)\tilde{u} + \tilde{q}(x)u_2(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{6}$$

$$\tilde{u}|_{x=0} = \tilde{f}(t), \quad \tilde{u}_x|_{x=0} = \tilde{g}(t), \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$\tilde{q}(x) = -2(\tilde{u}_t + \tilde{u}_x)_{t=x}, \quad x \in [0,T/2]. \tag{8}$$

Обращая в (6) волновой оператор с помощью данных Коши на оси $x = 0$ и вычисляя затем $(\tilde{u}_t + \tilde{u}_x)_{t=x}$, получаем в области D замкнутую систему равенств для функций $\tilde u$, $\tilde q$. Она имеет вид

$$\tilde u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\tilde f(t-x) + \tilde f(t+x) + \int\limits_{t-x}^{t+x} \tilde g(\tau)\, d\tau\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Delta(x,t)} [q_1(\xi)\tilde u(\xi,\tau) + \tilde q(\xi)u_2(\xi,\tau)]\, d\xi d\tau, \tag{9}$$

$$\tilde q(x) = -2\Big\{\tilde f'(2x) + \tilde g(2x)$$

$$+\int\limits_0^x [q_1(\xi)\tilde u(\xi, 2x-\xi) + \tilde q(\xi)u_2(\xi,2x-\xi)]\, d\xi\Big\}. \tag{10}$$

Здесь

$$\Delta(x,t) = \{(\xi,\tau) |\, 0 \le \xi \le x, t-x+\xi \le \tau \le t+x-\xi\}.$$

Введем

$$z(x) = \max(|\tilde q(x)|, \max_{t\in[x,T-x]} |\tilde u(x,t)|).$$

Тогда из (9), (10) находим, что

$$z(x) \le C\Big(\|\tilde f\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} + \|\tilde g\|_{\mathbf{C}[0,T]} + \int\limits_0^x z(\xi)\, d\xi\Big), \quad x\in[0,T/2],$$

с некоторой постоянной $C = C(q_0,u_0)$. Отсюда

$$|\tilde q(x)| \le z(x) \le C_1\Big(\|\tilde f\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} + \|\tilde g\|_{\mathbf{C}[0,T]}\Big), \quad x\in[0,T/2].$$

Следовательно,

$$\|\tilde q\|_{\mathbf{C}[0,T/2]} \le C_1\Big(\|\tilde f\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} + \|\tilde g\|_{\mathbf{C}[0,T]}\Big).$$

2.1. **Обратные задачи, в основе которых лежат аналогичные построения.** Это, прежде всего, задачи об определении параметров слоистых сред для уравнений второго порядка, системы уравнений электродинамики, упругости, электроупругости и т.д. В этом случае обычно рассматривается уравнение для полупространства $\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n |\, x_1 > 0\}$, в котором коэффициенты зависят от переменной x_1, а информация о решении прямой задачи задается на всей границе полупространства. Использование техники преобразования Фурье по всем пространственным переменным, кроме x_1, сводит эти задачи к рассмотренной выше. Появление при этом параметра преобразования Фурье λ (в этом случае $q = q(x,\lambda)$) позволяет найти несколько коэффициентов, характеризующих среду (см. [1], [2], [3]).

Подобным же образом могут быть исследованы линеаризованные многомерные обратные задачи, об определении слабой неоднородности (см. [1]). Рассмотрим, например, соотношения

$$u_{tt} - \Delta u + q(x)u = 0 \quad x\in\mathbb{R}^n_+, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{11}$$

$$u|_{t<0} = 0, \quad u|_{x_1=0} = \delta(\bar x - \bar x^0, t), \tag{12}$$

$$u_{x_1}|_{x_1=0} = g(\bar x, t, \bar x^0). \tag{13}$$

Здесь $\bar{x} = (x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{x}^0 = (x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $\bar{x}^0$ — переменный параметр задачи, $g(\bar{x}, t)$ — заданная функция (след нормальной производной решения задачи (11), (12)). Если коэффициент q представим в виде $q = q_0(x_1)+q_1(x)$, в котором supp $q_1(x) \subset \mathbb{R}^n_+$, и $|q_1(x)| << |q_0(x_1)|$, то можно провести линеаризацию в уравнении (11). Применение преобразования Фурье по $\bar{x}$, $\bar{x}^0$ сводит задачу об определении преобразования Фурье по $\bar{x}$ функции $q_1(x)$ к уже рассмотренной. Остается оценить саму функцию по найденному ее образу Фурье. На этом пути получается логарифмическая оценка устойчивости.

3. **Лучевые постановки обратных задач**

Пусть $u(x, t, y)$ — решение прямой задачи

$$u_{tt} - \Delta u + q(x)u = \delta(x - y, t),\ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u|_{t<0} = 0, \tag{14}$$

зависящее от параметра $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть далее, $\operatorname{supp} q(x) \subset \Omega$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $y \in \partial\Omega$ — произвольная точка границы Ω. Рассмотрим задачу: найти $q(x)$ по следующей информации о решении задачи (14):

$$u = f(x, t, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \tag{15}$$

в предположении, что $T \geq \operatorname{diam}\Omega$.

Структура решения задачи (14) такова:

$$\begin{aligned} u(x, t, y) \quad &= \quad \frac{1}{4\pi|x - y|}\,\delta(t - |x - y|) \\ &\quad +\theta_0(t - |x - y|)[\alpha_0(x, y) + (t - |x - y|)\alpha_1(x, y) + \ldots]. \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнение для построения функции $\alpha_0(x, y)$ имеет вид:

$$2\nabla\alpha_0 \cdot \nabla|x - y| + q(x)(4\pi|x - y|)^{-1} = 0, \quad \alpha_0|_{x=y} = 0. \tag{17}$$

Отсюда, для $(x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$, находим

$$\alpha_0(x, y) = f(x, t, y)|_{t=|x-y|+0} = -\frac{1}{8\pi|x - y|}\int\limits_{\Gamma(x,y)} q(\xi)d\xi. \tag{18}$$

В этой формуле $\Gamma(x, y)$ — прямая, соединяющая точки x и y.

Таким образом, обратная задача сводится к решению задачи лучевой томографии: построению функции $q(x)$ по заданным от нее интегралы по всем прямым $\Gamma(x, y)$, соединяющим любую пару точек x и y границы области Ω:

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} q(\xi)d\xi = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega. \tag{19}$$

Для плоского сечения Σ области Ω, точки x, y на $\partial\Sigma$ можно характеризовать длиной дуги s, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки на $\partial\Sigma$. Пусть $x = x(s_1)$, $y = y(s_2)$ и

$$\int\limits_{\Gamma(x(s_1),y(s_2))} q(\xi)d\xi = g(x(s_1), y(s_2)) \equiv \hat{g}(s_1, s_2). \tag{20}$$

Тогда имеет место оценка устойчивости (см. [4])

$$\int\limits_{\Sigma} q^2(\xi)d\xi \leq \frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_{\partial\Sigma\times\partial\Sigma} \hat{g}_{s_1}\hat{g}_{s_2}ds_1ds_2\Big|. \tag{21}$$

В основе доказательства оценки (21) лежат следующие соотношения (ниже принимается , что выпуклое сечение Σ лежит в плоскости переменных x_1, x_2)

$$\int\limits_{\Gamma(x(s_1),x)} q(\xi)d\xi = v(s_1, x), \quad x \in \Sigma; \qquad v(s_1, y(s_2)) = \hat{g}(s_1, s_2),$$
$$\nabla v \cdot \nu = q(x), \quad \nu = \nabla|x - x(s_1)| = (\cos\theta, \sin\theta),$$
$$\frac{\partial}{\partial s_1}(\nabla v \cdot \nu) = 0,$$

и тождество

$$2(\nabla v \cdot \nu_\theta)\frac{\partial}{\partial s_1}(\nabla v \cdot \nu) \equiv \frac{\partial}{\partial s_1}[(\nabla v \cdot \nu)(\nabla v \cdot \nu_\theta)] + \frac{\partial}{\partial x_1}[v_{s_1} v_{x_2}] - \frac{\partial}{\partial x_2}[v_{s_1} v_{x_1}] + |\nabla v|^2 \frac{\partial \theta}{\partial s_1},$$

в котором $\nu_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Интегрирование этого тождества по x_1, x_2 по области Σ и по s_2 вдоль $\partial\Sigma$, с учетом неравенств $|q(x)| \le |\nabla v|$, $\frac{\partial \theta}{\partial s_1} > 0$, и приводит к оценке (21).

Если в уравнении (14) выражение $u_{tt} - \Delta u$ заменить на более общее

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j},$$

в котором $(a_{ij}) = A$ — положительно определенная матрица, то обратная задача об определении коэффициента $q(x)$ по данным (15) приводится к задаче интегральной геометрии вида (19), в которой $\Gamma(x, y)$ — геодезические римановой метрики

$$d\tau^2 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) dx_i dx_j, \quad (b_{ij}) = B = A^{-1}.$$

Подобные задачи возникают также при исследовании обратных задач для уравнений переноса излучения, систем уравнений электродинамики и упругости. Методы исследования подобных задач изложены в книгах [1], [5], [6], [7].

4. **Многомерные динамические обратные задачи**

Пусть $u(x, t)$ — решение начально-краевой задачи

$$u_{tt} - \Delta u + q(x) u = 0, \; (x, t) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}, \tag{22}$$
$$u|_{t<0} = 0, \quad u|_{x_1=0} = \delta(t). \tag{23}$$

Пусть $d > 0$, $T > 2d$, $\operatorname{supp} q(x) \subset \Omega$ и $\Omega \subset B(x^0, d/2)$, $x^0 = (d/2, 0, \ldots, 0)$, $B(x^0, d/2) = \{x |\, |x - x^0| \le d/2\}$, $D = \{(x,t) |\, x \in \Omega,\ t \in [x_1, T - x_1]\}$, $S = \{(x,t) |\, x \in \partial\Omega,\ t \in [x_1, T - x_1]\}$, n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Рассмотрим обратную задачу: найти $q(x)$ по следующей информации о решении задачи (22), (23):

$$u = f(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, t), \quad (x, t) \in S. \tag{24}$$

Структура решения задачи (22), (23) для гладких коэффициентов $q(x)$ такова:

$$u(x, t) = \delta(t - x_1) + \theta_0(t - x_1)[\alpha_0(x) + (t - x_1)\alpha_1(x) + \ldots]. \tag{25}$$

При этом

$$2\frac{\partial\alpha_0(x)}{\partial x_1} + q(x) = 0, \tag{26}$$

Следовательно,

$$q(x) = -2(u_t + u_{x_1})_{t=x_1+0}. \tag{27}$$

Введем два множества

$$Q = \{q(x) |\, \|q\|_{\mathbf{C}(\Omega)} \le q_0\}, \quad \mathcal{U} = \{u(x,t) |\, \|u\|_{\mathbf{C}(D)} \le u_0\}.$$

Пусть $q_k(x) \in Q$, $u_k(x,t) \in \mathcal{U}$, $k = 1, 2$. Обозначим отвечающие $q_k(x)$ данные (24) через $f_k(x,t)$, $g_k(x,t)$, соответственно. Введем разности

$$q_1 - q_2 = \tilde{q}, \quad u_1 - u_2 = \tilde{u}, \quad f_1 - f_2 = \tilde{f}, \quad g_1 - g_2 = \tilde{g}.$$

Тогда

$$\tilde{u}_{tt} - \Delta\tilde{u} + q_1(x)\tilde{u} + \tilde{q}(x)u_2(x,t) = 0,\ (x,t) \in D, \tag{28}$$

$$\tilde{u}|_S = \tilde{f}(x,t), \quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\Big|_S = \tilde{g}(x,t), \tag{29}$$

$$\tilde{q}(x) = -2(\tilde{u}_t + \tilde{u}_{x_1})_{t=x_1+0}. \tag{30}$$

В основе получения оценки обратной задачи лежит априорная оценка решения некорректной задачи Коши:

$$\tilde{u}_{tt} - \Delta\tilde{u} + q_1(x)\tilde{u} = F(x,t),\ (x,t) \in D, \tag{31}$$

$$\tilde{u}|_S = \tilde{f}(x,t), \quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\Big|_S = \tilde{g}(x,t). \tag{32}$$

Эта оценка имеет вид:

$$\|\tilde{u}\|^2_{H^1(D)} + \|\tilde{u}\|^2_{H^1(\Sigma_1\cup\Sigma_2)} \le C(\|\tilde{f}\|^2_{H^1(S)} + \|\tilde{g}\|^2_{L^2(S)} + \|F\|^2_{L^2(D)}). \tag{33}$$

Здесь $\Sigma_1 = \{(x,t) |\, x \in \Omega, t = x_1\}$, $\Sigma_2 = \{(x,t) |\, x \in \Omega, t = T - x_1\}$.

Заметим, что оценки вида (33), в которых присутствуют H^1-нормы решений на характеристических поверхностях Σ_1 и Σ_2, ограничивающих D, получены для общих гиперболических уравнений второго порядка (см. [8]-[10]).

Использование оценки (33) при $F(x,t) = -\tilde{q}(x)u_2(x,t)$ приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}\|^2_{L^2(\Omega)} &\le 4\|\tilde{u}\|^2_{H^1(\Sigma_1)} \\ &\le C(\|\tilde{f}\|^2_{H^1(S)} + \|\tilde{g}\|^2_{L^2(S)} + u_0^2 T\|\tilde{q}\|^2_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{34}$$

Если $q_0 << 1$, то $u_0 << 1$, и из неравенства (34) следует оценка решения обратной задачи

$$\|\tilde{q}\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(\|\tilde{f}\|^2_{H^1(S)} + \|\tilde{g}\|^2_{L^2(S)}). \tag{35}$$

Таким образом, оценка (35) получается только для слабо неоднородных сред. В общем случае, это открытая проблема.

Использование подобной техники позволяет получить оценки решений обратных задач об определении коэффициентов уравнений второго порядка и систем уравнений упругости и электродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В.Г. Романов, *Обратные задачи для уравнений математической физики*, М.: Наука, 1984.

[2] М.И. Белишев, А.С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн*, Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1999.

[3] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск, Сибирское научное изд-во, 2008.

[4] Р.Г. Мухометов, *Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия*, ДАН СССР, **232** (1977), 32–35.

[5] В.Г. Романов, *Устойчивость в обратных задачах*, М.: Научный мир, 2005.

[6] В.А. Шарафутдинов, *Интегральная геометрия тензорных полей*, Наука, Новосибирск, 1993.

[7] Л.Н. Пестов, *Вопросы корректности задач лучевой томографии*, Новосибирск, Сибирское научное изд-во, 2003.

[8] В.Г. Романов, *Оценка устойчивости решения задачи об определении коэффициентов диэлектрической проницаемости и проводимости*, Доклады АН, **400**:5 (2005), 612–617.

[9] В.Г. Романов, *Оценки решения одного дифференциального неравенства*, Сибирский матем. журн., **47**:3 (2006), 626–635.

[10] V.G. Romanov, *Stability estimates in inverse problems for hyperbolic equations*, Milan J. Math., **74** (2006), 357–385.

Владимир Гаврилович Романов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: romanov@math.nsc.ru