М. В. Драгнев, В. В. Рыжков УДК 514.757

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОТОБРАЖЕНИЙ P_3 В P_2

Введение

Точечные отображения проективных пространств неодинаковой размерности рассматривались авторами в работах [1]—[5]. Данная статья является продолжением работ [1], [2] и посвящена развитию результатов, намеченных в сообщениях [3], [4].

Пусть рассматривается отображение $T: P_3 \to P_2$ трехмерного проективного пространства P_3 на проективную плоскость P_2. Согласно [5] направление в точке $A \in P_3$ называется характеристическим для отображения T, если кривые, проходящие через A в этом направлении и имеющие в A инфлексионную точку, переходят при отображении T в кривые, имеющие в $B = T(A)$ инфлексионную точку или точку остановки. Отображение T порождает локальное расслоение пространства P_3 на линии, служащие прообразами точек из P_2 и называемые нулевыми кривыми отображения. Касательная к нулевой кривой в ее произвольной точке A имеет в этой точке характеристическое направление и называется нулевой характеристической прямой. Множество всех характеристических направлений отображения $T: P_3 \to P_2$ в данной точке $A \in P_3$ образует кубический конус с вершиной A, называемый характеристическим конусом.

В работе [1] рассматривались отображения P_3 в P_2, для которых нулевая характеристическая прямая является двойной образующей характеристического конуса. Такие отображения характеризуются тем, что для них нулевые кривые являются прямыми линиями.

В данной статье вышеуказанный случай исключен: предполагается, что нулевые характеристические прямые не являются двойными образующими характеристического конуса, а нулевые кривые не являются прямыми. В этом случае в произвольной точке $A \in P_3$ определяется плоскость — соприкасающаяся плоскость нулевой кривой. Таким образом, с отображением T связывается распределение Δ_T (вообще говоря, неголономное); предполагается, что в рассматриваемой области нулевые кривые не имеют точек инфлексии. В данной работе отображения рассматриваются в связи со свойствами распределения Δ_T, а также со свойствами характеристического конуса.

Исследования проводятся методом подвижного репера и внешних форм Э. Картана. Изучаемые отображения рассматриваются локально, предполагаются достаточно гладкими и имеющими максимальный ранг.

§ 1. Распределение Δ_T соприкасающихся плоскостей к нулевым кривым отображения

1.1. Пусть $T: P_3 \to P_2$ — достаточно гладкое точечное отображение. С каждой точкой $A \in P_3$ свяжем репер, образованный четырьмя независимыми аналитическими точками $A_0 = A$, A_1, A_2, A_3, а с каждой точкой $B \in P_2$ — соответственно репер $B_0 = B$, B_1, B_2. Пусть индексы i, j, k принимают значения 0, 1, 2, 3, а индексы α, β, γ — значения 0, 1, 2. Инфинитезимальные перемещения реперов в P_3 и P_2 определяются уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k; \quad dB_\alpha = \overline{\omega}_\alpha^\gamma B_\gamma, \tag{1.1}$$

где ω_i^k, $\overline{\omega}_\alpha^\gamma$ — пфаффовы формы, удовлетворяющие структурным уравнениям

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k]; \quad D\overline{\omega}_\alpha^\gamma = [\overline{\omega}_\alpha^\beta \overline{\omega}_\beta^\gamma]. \tag{1.2}$$

Выберем репер в P_3 так, чтобы его ребро AA_3 было касательным к нулевой линии в точке A; фиксируем для каждой точки A какую-либо вырожденную коллинеацию $K: P_3 \to P_2$, касательную к отображению T. Подчиним вершины репера в P_2 условиям $B = K(A) = T(A)$, $B_1 = K(A_1)$, $B_2 = K(A_2)$. Тогда, как показано в [1], отображение T определяется уравнениями

$$\bar{\omega}_0^1 = \omega_0^1, \quad \bar{\omega}_0^2 = \omega_0^2. \tag{1.3}$$

Как и в [1], формы ω_0^1, ω_0^2 и ω_0^3, играющие роль главных, будем обозначать соответственно через ω^1, ω^2, ω^3.

Дифференцируем уравнения (1.3) внешним образом; применяя уравнения структуры (1.2), получим квадратичные уравнения, разрешение которых по лемме Картана даст нам следующее:

$$\begin{gathered}
\bar{\omega}_1^1 - \bar{\omega}_0^0 - \omega_1^1 + \omega_0^0 = (1/2)\,\partial\Omega^1/\partial\omega^1 = c_{11}^1\omega^1 + c_{12}^1\omega^2 + c_{13}^1\omega^3, \\
\bar{\omega}_2^1 - \omega_2^1 = (1/2)\,\partial\Omega^1/\partial\omega^2 = c_{12}^1\omega^1 + c_{22}^1\omega^2 + c_{23}^1\omega^3, \\
-\omega_3^1 = (1/2)\,\partial\Omega^1/\partial\omega^3 = c_{13}^1\omega^1 + c_{23}^1\omega^2 + c_{33}^1\omega^3, \\
\bar{\omega}_1^2 - \omega_1^2 = (1/2)\,\partial\Omega^2/\partial\omega^1 = c_{11}^2\omega^1 + c_{12}^2\omega^2 + c_{13}^2\omega^3, \\
\bar{\omega}_2^2 - \bar{\omega}_0^0 - \omega_2^2 + \omega_0^0 = (1/2)\,\partial\Omega^2/\partial\omega^2 = c_{12}^2\omega^1 + c_{22}^2\omega^2 + c_{23}^2\omega^3, \\
-\omega_3^2 = (1/2)\,\partial\Omega^2/\partial\omega^3 = c_{13}^2\omega^1 + c_{23}^2\omega^2 + c_{33}^2\omega^3,
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\Omega^1 = c_{ab}^1\omega^a\omega^b$, $\Omega^2 = c_{ab}^2\omega^a\omega^b$ — квадратичные формы; индексы a, b здесь и далее пробегают значения 1, 2, 3.

Если рассматривать ω^a как однородные координаты прямой связки $\{A\}$, то, как показано в [1], прямая $(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ является характеристической тогда и только тогда, когда $\Omega^1 : \Omega^2 = \omega^1 : \omega^2$, т. е. характеристический конус отображения определяется уравнением

$$\Omega^1\omega^2 - \Omega^2\omega^1 = 0. \tag{1.5}$$

1.2. Согласно [2] соприкасающаяся плоскость нулевой кривой в ее инфлексионной точке A является касательной плоскостью к характеристическому конусу вдоль нулевой характеристической прямой AA_3. В то же время, как легко видеть, при указанной специализации репера уравнение этой плоскости есть

$$c_{33}^2\omega^1 - c_{33}^1\omega^2 = 0, \tag{1.6}$$

где $(c_{33}^1, c_{33}^2) \neq (0, 0)$, т. к. в противном случае прямая AA_3 была бы двойной образующей характеристического конуса.

Поместим вершину A_2 репера в соприкасающуюся плоскость нулевой кривой. Тогда, как видно из (1.6), будем иметь

$$c_{33}^1 = 0, \quad c_{33}^2 \neq 0. \tag{1.7}$$

В силу (1.7) выражение формы ω_3^1 из (1.4) примет вид

$$\omega_3^1 = -c_{13}^1\omega^1 - c_{23}^1\omega^2. \tag{1.8}$$

Внешнее дифференцирование уравнения (1.8) легко позволяет установить, что форма ω_2^1 разлагается по главным формам:

$$\omega_2^1 = b_{21}^1\omega^1 + b_{22}^1\omega^2 + b_{23}^1\omega^3. \tag{1.9}$$

Запишем теперь уравнение движения плоскости AA_2A_3 распределения Δ_T. В силу (1.1) будем иметь

$$\begin{aligned}
d[AA_2A_3] = (\omega_0^0 + \omega_2^2 + \omega_3^3)[AA_2A_3] + \omega^1[A_1A_2A_3] + \\
+ \omega_2^1[AA_1A_3] + \omega_3^1[AA_2A_3].
\end{aligned} \tag{1.10}$$

В зависимости от ранга системы форм ω^1, ω_2^1, ω_3^1 плоскости AA_2A_3 образуют трех-, дву- или однопараметрическое семейство плоскостей; считая случаи меньшего ранга подслучаями большего ранга, придем к выделению подклассов T_2 и T_1 всего рассматриваемого нами класса отображений, обозначаемого далее через T_3; при этом $T_1 \subset T_2 \subset T_3$, где индекс указывает мак-

симальное число параметров, от которых может зависеть соприкасающаяся плоскость нулевой кривой.

1.3. Для отображений класса T_2 ранг системы форм ω^1, ω_2^1, ω_3^1 не больше двух, и поэтому $[\omega^1\omega_2^1\omega_3^1]=0$; в силу (1.8) и (1.9) отсюда следует, что $c_{23}^1 b_{23}^1 \times \times [\omega^1\omega^2\omega^3]=0$, т. е.

$$b_{23}^1=0 \tag{1.11}$$

или

$$c_{23}^1=0 \tag{1.12}$$

(либо то и другое одновременно).

Для выяснения геометрического смысла условий (1.11) и (1.12) найдем в каждом из этих случаев направления, вдоль которых не изменяется плоскость AA_2A_3 распределения Δ_T. С учетом (1.10) и (1.8), (1.9) легко находим, что при $b_{23}^1=0$ плоскость AA_2A_3 сохраняется вдоль интегральных кривых системы

$$\omega^1=\omega^2=0, \tag{1.13}$$

а при $c_{23}^1=0$ — вдоль интегральных кривых системы

$$\omega^1=b_{22}^1\omega^2+b_{23}^1\omega^3=0. \tag{1.14}$$

С другой стороны, известно [7], что уравнения асимптотических линий распределения Δ_T, определяемого уравнением $\omega^1=0$, имеют вид $\omega_2^1\omega^2+\omega_3^1\omega^3= =\omega^1=0$ или

$$b_{22}^1(\omega^2)^2+(b_{23}^1-c_{23}^1)\,\omega^2\omega^3=\omega^1=0. \tag{1.15}$$

Следовательно, одно из семейств асимптотических распределения Δ_T всегда совпадает с семейством нулевых кривых (1.13), а второе — при $c_{23}^1=0$ совпадает с семейством линий (1.14). Получена

Теорема 1.1 *Отображение T принадлежит классу T_2 в том и только том случае, когда плоскость распределения Δ_T сохраняется вдоль линий одного из семейств асимптотических Δ_T.*

Дадим дополнительную характеризацию каждого из двух случаев.

Если $b_{23}^1=0$, соприкасающаяся плоскость к нулевой линии сохраняется при движении вдоль нее; значит, нулевые линии плоские (ясно, что и обратно: отображение с плоскими нулевыми линиями принадлежит классу T_2). Обозначим этот подкласс через $T_{2п}$.

В случае $c_{23}^1=0$ обратимся к уравнению характеристического конуса (1.5), выписав его в развернутом виде:

$$\begin{gathered}-c_{11}^2(\omega^1)^3+(c_{11}^1-2c_{12}^2)(\omega^1)^2\omega^2-(c_{22}^2-2c_{12}^1)\,\omega^1(\omega^2)^2+\\+c_{22}^1(\omega^2)^3-2c_{13}^2(\omega^1)^2\omega^3+2c_{23}^1(\omega^2)^2\omega^3+\\+2(c_{13}^1-c_{23}^2)\,\omega^1\omega^2\omega^3-c_{33}^2\omega^1(\omega^3)^2=0.\end{gathered} \tag{1.16}$$

Легко видеть, что условие $c_{23}^1=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы касательная к нулевой линии была инфлексионной образующей этого конуса (не исключая случая $c_{22}^1=0$, когда плоскость $\omega^1=0$ есть компонента характеристического конуса). Обозначим класс отображений, охарактеризованный здесь, через $T_{2и}$.

Таким образом, имеем еще следующую характеризацию класса T_2.

Теорема 1.2. *Отображение T принадлежит классу T_2 тогда и только тогда, когда выполнено какое-нибудь одно из условий:* а) *нулевые кривые плоские;* б) *нулевые характеристические прямые суть инфлексионные образующие для характеристических конусов.*

Класс T_1 можно охарактеризовать следующим образом.

Теорема 1.3. *Отображение T принадлежит классу T_1, если и только если выполняются одновременно условия* а) *и* б) *теоремы* 1.2.

Это следует из того, что условия (1.11) и (1.12) влекут за собой $b^1_{22}=0$. Действительно, продифференцируем внешним образом уравнение (1.9) с использованием (1.8) и последнего уравнения (1.4), а результат дифференцирования умножим внешним образом на ω^1. Если при этом выполняются условия (1.11) и (1.12), получим $c^2_{33}b^1_{22}[\omega^1\omega^2\omega^3]=0$; отсюда $b^1_{22}=0$, т. к. $c^2_{33}\neq 0$.

Таким образом, из наших рассмотрений вытекают следующие связи между классами отображений T_1, T_2, $T_{2п}$, $T_{2и}$:

$$T_2=T_{2п}\cup T_{2и},\quad T_1=T_{2п}\cap T_{2и}.$$

§ 2. Вопросы существования выделенных классов отображений

2.1. Естественно поставить вопрос о широте произвола в определении указанных в § 1 классов отображений T_1, T_2, $T_{2п}$, $T_{2и}$, а также некоторых других (естественно выделяющихся по свойствам распределения Δ_T) классов или более узких подклассов уже рассмотренных классов. В отношении классов $T_{2п}$ и T_1 вопрос по существу решается уже записью уравнений соответствующих отображений в конечном виде. Удобно, как в [1], задавать отображение $T:(\xi,\ \eta,\ \zeta)\to(x,\ y)$ системой уравнений вида $\eta=\eta(x,\ y,\ \xi)$, $\zeta=\zeta(x,\ y,\ \xi)$, которые при фиксированных x, y определяют нулевые линии в P_3. В случае отображений классов $T_{2п}$ и T_1 эти уравнения можно записать соответственно в виде

$$\eta=\eta(x,\ y,\ \xi),\quad \zeta=f(x,\ y)\xi+g(x,\ y)\eta+h(x,\ y) \tag{2.1}$$

и

$$\eta=\eta(x,\ y,\ \xi),\quad \zeta=A[f(x,\ y)]\xi+B[f(x,\ y)]\eta+C[f(x,\ y)]. \tag{2.2}$$

Следовательно, в обоих случаях широта произвола определяется в одну функцию трех аргументов; из того, что $T_1\subset T_{2и}$, ясно, что она не может быть меньшей и для класса $T_{2и}$.

Из других классов отображений T, выделяемых по свойствам распределения Δ_T, заслуживают, как нам кажется, внимания класс $T_г$ отображений с голономным распределением Δ_T и класс $T_{пар}$ отображений с совпадающими или неопределенными асимптотическими линиями распределения Δ_T. Первый из этих классов характеризуется условием полной интегрируемости формы ω^1: $[D\omega^1,\ \omega^1]=0$, которое сразу приводит к $c^1_{23}+b^1_{23}=0$; второй — условием $c^1_{23}=b^1_{23}$, получаемым из уравнения (1.15). Обзор полученных условий

$$T\in T_{2п}\Leftrightarrow b^1_{23}=0,\quad T\in T_г\Leftrightarrow b^1_{23}+c^1_{23}=0,$$

$$T\in T_{2и}\Leftrightarrow c^1_{23}=0,\quad T\in T_{пар}\Leftrightarrow b^1_{23}=c^1_{23}$$

сразу приводит к следующему утверждению.

Теорема 2.1. *Принадлежность отображения T одновременно к каким-либо двум из классов $T_{2п}$, $T_{2и}$, $T_г$, $T_{пар}$ влечет за собой его принадлежность к остальным классам.*

Формальное доказательство результатов о широте введенных классов отображений во всех случаях имеет единообразный характер и сводится к исследованию совместности систем дифференциальных уравнений; ограничимся лишь приведением схемы решения этих вопросов и итоговой формулировкой результатов (получаемых стандартными методами).

Специализируя репер (выбор касательной коллинеации K [1], нормировка вершин репера A_i [1] и помещение вершины A_1 на характеристическом конусе), упростим уравнения задачи, получив

$$c^1_{12}=0,\quad c^2_{12}=0,\quad c^2_{33}=1,\quad c^2_{11}=0. \tag{2.3}$$

Дифференцируя внешним образом систему (1.4), с учетом этих упрощений получим систему

$$
\begin{gathered}
[\Delta c^1_{11}, \omega^1] + [\tilde{\omega}^0_2 \omega^2] + [\Delta c^1_{13}, \omega^3] = 0, \\
[\tilde{\omega}^0_2 \omega^1] + [\Delta c^1_{22}, \omega^2] + [\Delta c^1_{23}, \omega^3] = 0, \\
[\Delta c^1_{13}, \omega^1] + [\Delta c^1_{23}, \omega^2] - [\omega^1_2 \omega^3] = 0, \\
[\theta \omega^1] + [\tilde{\omega}^0_1 \omega^2] + [\Delta c^2_{13}, \omega^3] = 0, \\
[\tilde{\omega}^0_1 \omega^1] + [\Delta c^2_{22}, \omega^2] + [\Delta c^2_{23}, \omega^3] = 0, \\
[\Delta c^2_{13}, \omega^1] + [\Delta c^2_{23}, \omega^2] + [\tilde{\omega}^3_3 \omega^3] = 0,
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Delta c^1_{ab} = -dc^1_{ab} + \ldots, \quad \Delta c^2_{ab} = -dc^2_{ab} + \ldots, \\
\tilde{\omega}^0_1 = \bar{\omega}^0_1 - \omega^0_1 + \ldots, \quad \tilde{\omega}^0_2 = \bar{\omega}^0_2 - \omega^0_2 + \ldots, \\
\theta = -c^1_{11}\omega^2_1 + 2c^2_{13}\omega^3_1 - c^1_{11}c^2_{13}\omega^3, \\
\tilde{\omega}^3_3 = 2\omega^3_3 - \omega^2_2 - \omega^0_0 + \ldots
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

(многоточием здесь обозначены некоторые линейные комбинации форм ω с коэффициентами, зависящими от c^1_{ab}, c^2_{ab}).

В необходимых случаях к системе (2.4) присоединяется еще уравнение (1.9): форма ω^1_2 заменяется ее выражением из (1.9), и в систему (2.4) включается равенство, получаемое внешним дифференцированием (1.9): $[\Delta b^1_{21}, \omega^1] + [\Delta b^1_{22}, \omega^2] + [\Delta b^1_{23}, \omega^3] = 0$ (формы Δb^1_{2a} имеют структуру того же типа, что и Δc^1_{ab}, Δc^2_{ab}).

Ясно, что отображения T общего типа определены с произволом в две функции трех аргументов. Для каждого из рассматриваемых специальных классов применение признака Э. Картана [6] к определяющей его системе уравнений показывает, что система в инволюции. Для каждого из случаев легко найти характеры системы:

$$
\begin{gathered}
T \in \boldsymbol{T}_{\text{г}}: \ s_1 = 7, \ s_2 = 5, \ s_3 = 1, \\
T \in \boldsymbol{T}_{\text{пар}}: \ s_1 = 7, \ s_2 = 5, \ s_3 = 1, \\
T \in \boldsymbol{T}_{2\text{п}}: \ s_1 = 7, \ s_2 = 5, \ s_3 = 1, \\
T \in \boldsymbol{T}_{2\text{и}}: \ s_1 = 6, \ s_2 = 4, \ s_3 = 1.
\end{gathered}
$$

Следовательно, имеет место

Теорема 2.2. *Каждый из классов отображений* $\boldsymbol{T}_{\text{г}}$, $\boldsymbol{T}_{\text{пар}}$, $\boldsymbol{T}_{2\text{п}}$, $\boldsymbol{T}_{2\text{и}}$ *определен с произволом в одну функцию трех аргументов.*

2.2. В рамках класса $\boldsymbol{T}_2$ могут быть выделены подклассы отображений в зависимости от огибающей семейства соприкасающихся плоскостей нулевых кривых. Точка $M = \alpha A + \beta A_2 + \gamma A_3$ будет точкой огибающей (в широком смысле слова) семейства плоскостей AA_2A_3, если $\alpha\omega^1 + \beta\omega^1_2 + \gamma\omega^1_3 = 0$. Так как для отображений класса $\boldsymbol{T}_2$ формы ω^1, ω^1_2, ω^1_3 зависимы, такие α, β, γ (не равные нулю одновременно) существуют.

В качестве специальных подклассов класса $\boldsymbol{T}_{2\text{п}}$ можно рассматривать те, для которых характеристическая точка M плоскости AA_2A_3 описывает не двумерную поверхность, а некоторую линию или фиксирована; в последнем случае плоскости AA_2A_3 образуют связку.

В случае класса T_1 плоскости AA_2A_3 огибают, вообще говоря, некоторую развертывающуюся поверхность, которая, в частности, может быть конусом или вырождаться в прямую; в последнем случае плоскости AA_2A_3 образуют пучок.

Не приводя доказательства соответствующих теорем существования, заметим, что упомянутые частные случаи приводят лишь к специализации второго уравнения в (2.1) или (2.2) и не налагают условий на функцию $\eta(x, y, \xi)$, определяющую широту класса.

В случае отображений класса $T_{2и}$ характеристическая точка M плоскости AA_2A_3 не может быть фиксированной, но может описывать линию. Соответствующее исследование показывает, что и в этом случае отображения существуют с произволом в *одну* функцию трех аргументов.

§ 3. Отображения P_3 в P_2, переводящие однопараметрическое семейство плоскостей в семейство прямых

3.1. Пусть отображение $T: P_3 \to P_2$ переводит однопараметрическое семейство плоскостей пространства P_3 в однопараметрическое семейство прямых плоскости P_2. Тогда нулевые линии (прообразы точек из P_2) лежат в плоскостях данного однопараметрического семейства, поэтому отображение принадлежит классу T_1. Значит, при нашем выборе репера будем иметь $c^1_{23} = 0$, $b^1_{23} = 0$ и, как следствие, $b^1_{22} = 0$. Уравнение движения прямой BB_2:

$$d[BB_2] = (\overline{\omega}^0_0 + \overline{\omega}^2_2)[BB_2] + \omega^1[B_1, B_2] + \overline{\omega}^1_2[BB_1]$$

дает добавочное условие $[\overline{\omega}^1_2\omega^1] = 0$, отсюда в силу (1.4) $c^1_{22} = 0$.

В силу условий (1.7) и (2.3) уравнение характеристического конуса (1.16) принимает вид $c^1_{11}(\omega^1)^2\omega^2 - 2c^2_{13}(\omega^1)^2\omega^3 - c^2_{22}\omega^1(\omega^2)^2 - \omega^1(\omega^3)^2 + 2(c^1_{13} - c^2_{23})\omega^1\omega^2\omega^3 + c^1_{22}(\omega^2)^3 + 2c^1_{23}(\omega^2)^2\omega^3 = 0$. Следовательно, при выполнении условий $c^1_{22} = c^1_{23} = 0$ характеристический конус распадается на плоскость $\pi: \omega^1 = 0$, содержащую нулевую характеристическую прямую, и квадратичный конус Q:

$$c^1_{11}\omega^1\omega^2 - 2c^2_{13}\omega^1\omega^3 - c^2_{22}(\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 + 2(c^1_{13} - c^2_{23})\omega^2\omega^3 = 0.$$

Обратно, если характеристический конус распадается на плоскость π, содержащую нулевую характеристическую прямую, и квадратичную компоненту Q, плоская компонента $\pi: \omega^1 + \alpha\omega^2 = 0$ может принадлежать конусу лишь при $\alpha = 0$, т. е. совпадает с соприкасающейся плоскостью нулевой кривой. При этом будут выполняться условия $c^1_{22} = c^1_{23} = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *Отображение $T: P_3 \to P_2$ переводит однопараметрическое семейство плоскостей в однопараметрическое семейство прямых в том и только том случае, когда выполнены следующие два условия:*

а) *отображение принадлежит классу T_1;*

б) *характеристический конус распадается на две компоненты: квадратичную и плоскую, содержащую нулевую характеристическую прямую.*

Нетрудно проверить, что система уравнений для определения таких отображений снова оказывается в инволюции и имеет характеры $s_1 = 7$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$. Также непосредственно можно записать уравнения отображения, вводя вспомогательный параметр t, в виде $y = a(t)x + b(t)$; $\eta = \eta(x, y, \xi)$, $\zeta = \alpha(t)\xi + \beta(t)\eta + \gamma(t)$.

Теорема 3.2. *Отображения, переводящие однопараметрическое семейство плоскостей в однопараметрическое семейство прямых, существуют с произволом в одну функцию трех аргументов.*

§ 4. Отображения P_3 в P_2, характеристический конус которых имеет двойную образующую

4.1. Сохраним условия специализации репера, при которых

$$c^1_{33} = c^1_{12} = c^2_{11} = c^2_{12} = 0, \quad c^2_{33} = 1, \tag{4.1}$$

и присоединим к ним еще выбор вершины A_3 на прямой AA_3 так, чтобы $c^1_{13}=0$ (см. [1]). Тогда уравнение характеристического конуса примет вид

$$c^1_{11}(\omega^1)^2\omega^2 - 2c^2_{13}(\omega^1)^2\omega^3 - c^2_{22}\omega^1(\omega^2)^2 - \omega^1(\omega^3)^2 -$$
$$-2c^2_{23}\omega^1\omega^2\omega^3 + c^1_{22}(\omega^2)^3 + 2c^1_{23}(\omega^2)^2\omega^3 = 0. \qquad (4.2)$$

Допустим, что характеристический конус имеет двойную образующую; расположим на ней вершину A_1 (по условию двойная образующая не совпадает с AA_3). Условие, чтобы образующая AA_1 была двойной, имеет вид

$$c^1_{11} = c^2_{13} = 0. \qquad (4.3)$$

Если еще при этом отображение T принадлежит одному из классов $\boldsymbol{T}_{2и}$, $\boldsymbol{T}_{2п}$ или $\boldsymbol{T}_1$, то к (4.1) и (4.3) присоединяются соответствующие условия. Во всех случаях получаемая система дифференциальных уравнений оказывается в инволюции и имеет следующие характеры:

$$T \in \boldsymbol{T}_3\colon\ s_1 = 6,\ s_2 = 4,\ s_3 = 1,$$
$$T \in \boldsymbol{T}_{2и}\colon\ s_1 = 6,\ s_2 = 4,\ s_3 = 0,$$
$$T \in \boldsymbol{T}_{2п}\colon\ s_1 = 7,\ s_2 = 5,\ s_3 = 0,$$
$$T \in \boldsymbol{T}_1\colon\ s_1 = 7,\ s_2 = 3,\ s_3 = 0.$$

Теорема 4.1. *Отображения $T: P_3 \to P_2$, для которых характеристический конус имеет двойную образующую, отличную от нулевой характеристической прямой, существуют с произволом:*

1) *одна функция трех аргументов в классе $\boldsymbol{T}_3$;*
2) *четыре функции двух аргументов в классе $\boldsymbol{T}_{2и}$;*
3) *пять функций двух аргументов в классе $\boldsymbol{T}_{2п}$;*
4) *три функции двух аргументов в классе $\boldsymbol{T}_1$.*

Наложим теперь условие, чтобы особая образующая AA_1 характеристического конуса была образующей возврата. Для этого, как видно из (4.2), необходимо и достаточно, чтобы $c^2_{22} = (c^2_{23})^2$. Двойная касательная плоскость вдоль образующей возврата будет иметь уравнение $c^2_{23}\omega^2 + \omega^3 = 0$. Поместив в нее вершину репера A_2, получим $c^2_{22} = c^2_{23} = 0$. Характеры системы дифференциальных уравнений в этом случае таковы: $s_1 = 6$, $s_2 = 4$, $s_3 = 0$.

Теорема 4.2. *Отображения $T: P_3 \to P_2$, характеристический конус которых имеет образующую возврата (отличную от нулевой характеристической прямой), существуют с произволом в четыре функции двух аргументов.*

Теоремы существования для этого случая в подклассах $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_{2п}$ и $\boldsymbol{T}_{2и}$ нами пока не установлены.

4.2. Дальнейшей специализацией условий, налагаемых на характеристический конус, может быть требование его распадения на плоскость π и квадратичный конус Q (вообще говоря, неприводимый). При этом плоскость π может быть касательной или нет к квадратичному конусу Q; она может содержать или не содержать нулевую характеристическую прямую. Можно также потребовать, чтобы характеристический конус распадался на три плоскости, которые могут иметь лишь одну общую точку или общую прямую; во втором случае возможно слияние двух плоскостей. Анализ указанных случаев будет проведен авторами в другом месте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Драгнев М. В. Об одном классе точечных отображений P_3 в P_2 // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР.—1974.—Т. 6.—С. 223—241.
2. Драгнев М. В., Рыжков В. В. К геометрии характеристических конусов отображения P_m в P_n при $m > n$ // Изв. вузов. Математика.—1974.—№ 5.—С. 81—86.
3. Драгнев М. В., Рыжков В. В. К геометрии отображений P_3 в P_2 // Проблемы развития прикл. матем. исследований. Тезисы докл. IV республ. конф. математиков Белоруссии. Ч. II.—Минск, 1975.—С. 77.

4. Драгнев М. В., Рыжков В. В. О некоторых классах отображений P_3 в P_2 // VI Всесоюзн. геометр. конф. по совр. проблемам геометрии. Тезисы докл.—Вильнюс, 1975.—С. 85—87.
5. Рыжков В. В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР.—1971.—Т. 3.—С. 235—242.
6. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.—М.—Л.: ГИТТЛ, 1948.—432 с.
7. Mihăilescu T. Geometrie diferențială proiectivă.—București, 1958.—494 s.

г. Москва

Поступила
08.07.1987

М. П. Замаховский

УДК 514.755

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИИ

Одно из обобщений эрлангенской программы Ф. Клейна, предложенное Г. А. Зайцевым [1], заключается в переходе от инвариантно-группового изучения отдельно взятой геометрии к изучению совокупности ее *предельных* геометрий. Предельную геометрию группы Ли G можно определить следующим образом. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{G}$ группы G допускает разложение в прямую сумму

$$\mathfrak{P}\oplus\mathcal{L} \tag{1}$$

подалгебры $\mathfrak{P}$ и дополнительного подпространства $\mathcal{L}$, удовлетворяющих условию

$$[\mathfrak{P},\ \mathcal{L}]\subset\mathcal{L}. \tag{2}$$

Тогда можно построить сжатие алгебры Ли $\mathfrak{G}$ к ее подалгебре $\mathfrak{P}$, элементы которого записываются в виде $(x,\ y)$, где $x\in\mathfrak{P}$, $y\in\mathcal{L}$, и коммутатор двух таких элементов вычисляется по формуле

$$[(x,\ y),\ (x,'\ y')]=([x,\ x'],\ [x,\ y']-[x',\ y]). \tag{3}$$

Это сжатие определяет с точностью до локального изоморфизма основную группу ${}^0G$ предельной геометрии.

Обозначим через ${}^0\boldsymbol{C}\mathfrak{G}$ тензорное произведение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ над полем $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел и алгебры ${}^0\boldsymbol{C}$ *дуальных чисел* $a+b\varepsilon$, где $a,\ b\in\boldsymbol{R}$ и $\varepsilon^2=0$ ([2], с. 443); будем называть алгебру Ли ${}^0\boldsymbol{C}\mathfrak{G}$ *дуальным расширением* алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Лемма 1. *Сжатие алгебры Ли* [1] *к подалгебре* $\mathfrak{P}$ *изоморфно подалгебре* $\mathfrak{P}\oplus\varepsilon\mathcal{L}$ *ее дуального расширения.*

Доказательство. Отображение $(x,\ y)\mapsto x+\varepsilon y$ линейно и переводит коммутатор (3) в элемент $[x,\ x']+\varepsilon([x,\ y']-[x',\ y])=[x+\varepsilon y,\ x'+\varepsilon y']$.

В работе рассматриваются предельные геометрии специальной линейной группы SL_{n+1} над полем $\boldsymbol{R}$, допускающей представление в виде группы проективных преобразований *вещественного проективного n-пространства* (*n-мерного пространства*) P_n. Так как алгебра Ли группы SL_{n+1} является *простой расщепляемой алгеброй Ли типа* A_n, опишем все сжатия простой расщепляемой алгебры Ли к ее подалгебрам, содержащим расщепляющую подалгебру Картана этой алгебры Ли.

Пусть $\mathfrak{G}$ — простая расщепляемая алгебра Ли над полем $\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{K}$ — ее расщепляющая подалгебра Картана, R — система корней и $\mathfrak{G}^\alpha$ — примарное подпространство пространства $\mathfrak{G}$ веса α [3]. Полагая

$$\mathfrak{G}^R=\bigoplus_{\alpha\in R}\mathfrak{G}^\alpha,$$

представим алгебру Ли $\mathfrak{G}$ в виде

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}\oplus\mathfrak{G}^R. \tag{4}$$