Алгебра и логика, 34, N 2 (1995), 211—232

УДК 512.54.05+512.543.25

ПРОБЛЕМА ВХОЖДЕНИЯ ДЛЯ СВОБОДНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

У. У. УМИРБАЕВ

Хорошо известно [1, гл. 3], что проблема вхождения в конечно-порожденные (к. п.) подгруппы свободных групп разрешима. Более того, К. А. Михайлова [2] доказала, что если для групп G_1, G_2 проблема вхождения разрешима, то она разрешима и в свободном произведении $G_1 * G_2$ этих групп. Для свободной группы G ранга 2 она же в [3] показала неразрешимость в прямом произведении $G \times G$ проблемы вхождения. В случае разрешимых групп Н. С. Романовский [4] доказал разрешимость проблемы вхождения для к. п. $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_C$-групп. В 1983 году С. А. Агалаков [5], отвечая на вопрос М. И. Каргаполова, построил пример к. п. финитно неотделимой подгруппы свободной разрешимой группы ступени разрешимости ≥ 3. Другой вопрос М. И. Каргаполова [6, вопрос 21] о разрешимости проблемы вхождения для этих групп оставался открытым.

Разрешимость проблемы вхождения для группы G сводится к разрешимости проблемы вхождения в правые идеалы группового кольца ZG [7, лемма 4.1]. Необратимость этого сведения показывает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если G — свободная метабелева группа (достаточно большого ранга), то в кольце ZG проблема вхождения в к. п. правые идеалы неразрешима.*

Другими словами, разрешимость уравнения вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

над групповым кольцом свободной метабелевой группы алгоритмически нераспознаваема. Распознаваемость совместности систем линейных уравнений над групповыми кольцами абелевых групп установлена Е. И. Тимошенко в [8].

ТЕОРЕМА 2. *Проблема вхождения для свободных разрешимых групп ступени разрешимости ≥ 3 неразрешима.*

Известно [9, 10], что проблема равенства в многообразии разрешимых групп ступени разрешимости ≥ 3 неразрешима. Один интересный пример группы с неразрешимой проблемой равенства дает следующая

ТЕОРЕМА 3. *Существует группа с неразрешимой проблемой равенства, конечно-определенная в многообразии разрешимых групп ступени разрешимости ≥ 3, где определяющие соотношения берутся из последнего коммутанта.*

Для групп с одним таким определяющим соотношением проблема равенства разрешима [11].

В § 1 приведены некоторые вспомогательные утверждения. В § 2 доказана нераспознаваемость совместности систем линейных уравнений над групповым кольцом метабелевой группы G_1 (определение G_1 в § 2) с использованием результатов работы О. Г. Харлампович [10]. В § 3 системе линейных уравнений над ZG_1 ставится в соответствие линейное уравнение над групповым кольцом подходящей свободной метабелевой группы. В § 4 приведены доказательства основных результатов.

Ранее аналогичные результаты для алгебр Ли были доказаны автором [12].

§ 1. Вспомогательные утверждения

Пусть G — произвольная группа, ZG — ее целочисленное групповое кольцо. Если H — подгруппа группы G, то через J_H обозначим правый идеал кольца ZG, порожденный элементами $h-1$, где $h \in H$. Отображение

$$D\colon G \to I_G,\ \ D(g) = g - 1,\ \ g \in G,$$

где I_G — фундаментальный идеал кольца ZG, является дифференцированием [13] группы G, т.е.

$$D(fg) = D(f)g + D(g), \quad D(g^{-1}) = D(g)(-g^{-1}).$$

Отсюда если H порождается элементами $h_1, h_2, \ldots, h_k$, то J_H, как правый идеал, порождается элементами $h_1 - 1$, $h_2 - 1, \ldots, h_k - 1$.

По лемме 4.1 из [7] для любого $g \in G$ имеем

$$g \in H \leftrightarrow g - 1 \in J_H. \tag{1}$$

Все кольца и модули, встречающиеся в этой работе, являются свободными Z-модулями, и слова "базис", "линейная зависимость" означают соответственно Z-базис, Z-линейную зависимость.

ЛЕММА 1. *Если $g_0 = 1$, g_1, $g_2, \ldots, g_s, \ldots$ — полная система представителей правых смежных классов по подгруппе H, то образы этих элементов образуют базис пространства ZG/J_H.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = \{1, h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots\}$. Тогда элементы g_s, $h_k g_s$, $s \geq 0$, $k \geq 1$, образуют базис кольца ZG. Этим же свойством обладает система элементов g_s, $(h_k - 1)g_s$, $s \geq 0$, $k \geq 1$. Остается заметить, что элементы $(h_k - 1)g_s$, $s \geq 0$, $k \geq 1$, образуют базис модуля J_H. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если элементы g_1, $g_2, \ldots, g_s, \ldots$ являются представителями различных правых смежных классов по подгруппе H, то их образы в ZG/J_H линейно независимы.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $a_i = \sum\limits_j \lambda_{ij} g_{ij}$, $\lambda_{ij} \in Z$, $g_{ij} \in G$, причем $g_{ij} g_{kl}^{-1} \notin H$ для $k \neq i$, и $\sum\limits_i a_i \equiv 0 \pmod{J_H}$. Тогда $a_i \equiv 0 \pmod{J_H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_i = \{g_{kr} \mid k = i\}$. Можно считать, что все элементы из G_i принадлежат различным смежным классам по H. Действительно, если $g_{ij} = h g_{ir}$, то в записи a_i заменим g_{ij} на g_{ir}. При этом все условия следствия сохраняются, а список элементов из G_i уменьшается.

Если все различные элементы из G_i принадлежат различным смежным классам по H, то по условию следствия этим же свойством обладает и множество $\bigcup\limits_i G_i$. По следствию 1 элементы из $\bigcup\limits_i G_i$ линейно независимы по модулю J_H. Значит, $a_i \equiv 0 \pmod{J_H}$. Следствие доказано.

Приведем некоторые стандартные обозначения. Для любых $x, y \in G$ положим $x^y = y^{-1}xy$, $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Пусть A, B — подмножества группы G. Тогда через $\langle A\rangle$ обозначим подгруппу, порожденную множеством A и $[A,B] = \langle\{[a,b] \mid a \in A,\ b \in B\}\rangle$. Индукцией по i определяем i-й коммутант $G^{(i)}$ группы G: $G^{(0)} = G$, $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$.

Пусть G — свободная разрешимая группа ступени разрешимости k с базой $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда группа $\bar G = G/G^{(k-1)}$ является свободной разрешимой группой ступени разрешимости $k-1$ с базой $\bar x_1, \bar x_2, \ldots, \bar x_n$. Пусть M — свободный правый $Z\bar G$-модуль с базой $\tilde x_1, \tilde x_2, \ldots, \tilde x_n$. Вложение Магнуса (см., например, [14])

$$\varphi\colon G \to \begin{pmatrix} 1 & M \\ 0 & \bar G \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \tilde x_i \\ 0 & \bar x_i \end{pmatrix}, \quad 1 \le i \le n,$$

определяет отображение

$$\tau\colon G \to M, \quad \varphi(g) = \begin{pmatrix} 1 & \tau(g) \\ 0 & \bar g \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

Заметим, что $\tau(fg) = \tau(f)\bar g + \tau(g)$, $\tau(g^{-1}) = \tau(g)(-\bar g^{-1})$.

Группа $G^{(k-1)}$ превращается в $Z\bar G$-модуль относительно действия

$$g^f = \prod_i (g^{z_i})^{g_i},$$

где $g \in G^{(k-1)}$, $f = \sum\limits_i z_i\bar g_i \in Z\bar G$.

Если $t = \sum\limits_i r_it_i \in ZG^{(k-1)}$, $r_i \in Z$, $t_i \in G^{(k-1)}$ и $f \in Z\bar G$, то t^f обозначает элемент $\sum\limits_i r_it_i^f$.

ЛЕММА 2. *Если G — свободная метабелева группа с базой x_1, $x_2, \ldots, x_n$, то каждый элемент группы $G^{(1)}$ однозначно представляется в виде произведения $\prod\limits_{i>j} [x_i, x_j]^{f_{ij}}$, где $f_{ij} \in Z\bar G$, f_{ij} зависит только от $\bar x_j$, $\bar x_{j+1}, \ldots, \bar x_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы дословно повторяет доказательство теоремы 3 из [15].

СЛЕДСТВИЕ. *В условиях леммы 2 группа $G^{(1)}$ является свободной абелевой группой с базой*

$$[x_i, x_j]^{v_{ij}},$$

где $i > j$, $v_{ij} \in \bar{G}$, v_{ij} не содержит $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{j-1}$.

Предположим, что G — свободная разрешимая группа ступени разрешимости k с базой e, f, x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Через G_0 обозначим подгруппу группы $\bar{G}$, порожденную элементами $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Фиксируем нетривиальный элемент $w \in G^{(k-1)} \cap \langle e, f\rangle$.

Пусть $I = (g_1, g_2, \ldots, g_s)_r \lhd_r ZG_0$ — правый идеал кольца ZG_0, порожденный элементами $g_1, g_2, \ldots, g_s \in ZG_0$. Через H_I обозначим подгруппу группы G, порожденную элементами $w^{g_1}, w^{g_2}, \ldots, w^{g_s}, x_1, x_2, \ldots, x_n$, а через R_I — нормальную подгруппу группы G, порожденную элементами $w^{g_1}, w^{g_2}, \ldots, w^{g_s}$.

ЛЕММА 3. *Для $g \in ZG_0$ следующие условия эквивалентны:*

a) $g \in I$,

b) $w^g \in H_I$,

c) $w^g \in R_I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $g \in I$, т.е.

$$g = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \ldots + g_s f_s, \quad f_i \in ZG_0,$$

то $w^g = (w^{g_1})^{f_1}(w^{g_2})^{f_2}\ldots(w^{g_s})^{f_s} \in H_I \cap R_I$. Предположим, что $w^g \in H_I$. Тогда w^g представляется в виде

$$w^g = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) w^{g_1 f_1} w^{g_2 f_2} \ldots w^{g_s f_s}.$$

Используя вложение Магнуса (отображение τ), имеем

$$\tau(w^g) = \tau(w)g = \tau(f(x_1, x_2 \ldots x_n)) w^{g_1 f_1 + g_2 f_2 + \ldots + g_s f_s} +$$

$$+\tau(w)(g_1 f_1 + g_2 f_2 + \ldots + g_s f_s).$$

Следовательно, элемент $\tau(w)(g - \sum\limits_i g_i f_i)$ принадлежит пересечению ZG-подмодулей модуля M, порожденных элементами $\tilde{e}$, $\tilde{f}$ и $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$

(см. вложение Магнуса). Это возможно только при $\tau(w)(g - \sum_i g_i f_i) = 0$. Поскольку кольцо $Z\bar{G}$ не имеет делителей нуля и $\tau(w) \neq 0$, то $g = \sum_i g_i f_i \in I$.

Пусть $w^g \in R_I$. Тогда $w^g = (w^{g_1})^{f_1}(w^{g_2})^{f_2}\dots(w^{g_s})^{f_s}$, $f_i \in Z\bar{G}$. Рассуждая, как и выше, получаем равенство $g = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_s f_s$. Гомоморфизм $Z\bar{G} \to ZG_0$, определенный правилом $\bar{e} \to 1$, $\bar{f} \to 1$, $\bar{x}_i \to \bar{x}_i$, $1 \leq i \leq n$, дает $g \in I$. Лемма полностью доказана.

§ 2. Нераспознаваемость совместности систем линейных уравнений над групповым кольцом одной метабелевой группы

Пусть G_1 — метабелева группа с порождающими a, b, c, A, B и определяющими соотношениями:

$$\begin{gathered}[a,b] = [a,c] = [b,c] = 1,\\ [A,B] = [[A,a],A] = [[B,b],B] = 1,\\ [A,b] = [A,c] = [B,a] = [B,c] = 1.\end{gathered} \tag{2}$$

В любой группе справедливы соотношения

$$A^a = A[A,a], \ \ A^{a^{-1}} = A[A,a]^{-a^{-1}}.$$

Индукцией по $k > 0$ проверяем справедливость следующих соотношений в метабелевой группе:

$$A^{a^k} = A[A,a]^{(1+a+\dots+a^{k-1})}, \ \ A^{a^{-k}} = A[A,a]^{-(a^{-1}+a^{-2}+\dots+a^{-k})}.$$

Из соотношения $[[A,a],A] = 1$ следует равенство $[A,a]^A = [A,a]$. Отсюда $(A^{a^k})^A = A([A,a]^A)^{(1+a+\dots+a^{k-1})} = A[A,a]^{(1+a+\dots+a^{k-1})} = A^{a^k}$. Аналогично $(A^{a^{-k}})^A = A^{a^{-k}}$. Следовательно, для любых k, $l \in Z$ имеем

$$[A^{a^k}, A^{a^l}] = a^{-k}A^{-1}a^{k-l}A^{-1}A^{a^{k-l}}Aa^l =$$

$$= a^{-k}A^{-1}a^{k-l}A^{a^{k-l}}a^l = a^{-k}A^{-1}Aa^k = 1.$$

Значит, в группе G_1 однозначно определен элемент $A^{f(a)}$ (аналогично $B^{g(b)}$), где $f(a) \in Z[a, a^{-1}]$. Легко проверить, что каждый элемент группы G_1 представляется в виде

$$\theta = a^{l_1} b^{l_2} c^{l_3} a^{f(a)} B^{g(b)}, \tag{3}$$

где l_1, l_2, $l_3 \in Z$, $f(a) \in Z[a, a^{-1}]$, $g(b) \in Z[b, b^{-1}]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Проблема вхождения в к.п. подмодули свободного модуля над целочисленным групповым кольцом ZG_1 группы G_1 неразрешима.*

Это означает нераспознаваемость совместности систем линейных уравнений над ZG_1. Доказательству предложения 1 предпошлем несколько лемм.

Пусть M — двухленточная машина Минского (см. [16]) с внутренними состояниями q_0, $q_1, \ldots, q_n$ (q_0 — заключительное) и с командами вида

$$q_i \varepsilon \delta \to q_j T_\alpha T_\beta, \tag{4}$$

где $1 \leq i \leq n$; $0 \leq j \leq n$; ε, $\delta = 0, 1$; α, $\beta = -1, 0, 1$; причем $\alpha \geq 0$ при $\varepsilon = 1$, $\beta \geq 0$ при $\delta = 1$.

Ленты машины Минского ограничены слева и состояния ячеек лент в ходе работы машины не изменяются, при этом самые левые ячейки находятся в состоянии 1, а все остальные — в состоянии 0. Ячейки каждой ленты нумеруются, начиная с самой левой — нулевой по номеру. Если машина M находится в состоянии q_i и воспринимает t_k-ю ячейку k-й ленты ($k = 1, 2$), то говорят, что машина M находится в конфигурации $[i, t_1, t_2]$. Машина M выполняет команду (4) из конфигурации $[i, \varepsilon, \delta]$, если M переходит в состояние q_j и сдвигает первую ленту на α ячеек влево, вторую — на β ячеек влево (относительно головки). Если машина M за один такт работы переходит из конфигурации $[i, t_1, t_2]$ в конфигурацию $[j, s_1, s_2]$, то будем писать $[i, t_1, t_2] \to [j, s_1, s_2]$.

По теореме Минского [16] для каждой частично рекурсивной функции $f(n)$ существует соответствующая двухленточная машина Минского, которая для любого натурального n, начиная работу в конфигурации [1,

$2^n, 0]$, переходит через конечное число тактов работы в конфигурацию $[0, 2^{f(n)}, 0]$, если $f(n)$ определено, и работает вечно, если $f(n)$ не определено.

Следуя [10], будем говорить, что машина M зацикливается для натурального числа n, если M, начиная работу в конфигурации $[1, 2^n, 0]$, попадает когда-нибудь в такую конфигурацию $[i, t_1, t_2]$, из которой переходит в конфигурацию $[i, t_1+s_1, t_2+s_2]$, s_1, $s_2 \geq 0$, причем во время этого перехода M не доходит до левого конца k-й ленты (т.е. выполняет только команды вида $q_i\varepsilon_1\varepsilon_2 \to q_jT_\alpha T_\beta$ при $\varepsilon_k = 0$), если $s_k > 0$, $k = 1, 2$.

Зафиксируем рекурсивно-перечислимое, нерекурсивное подмножество P множества натуральных чисел. Пусть M — двухленточная машина Минского, вычисляющая частичную характеристическую функцию $f(n)$ множества P. По определению (см. [16]) $f(n) = 0$, если $n \in P$, и $f(n)$ не определено, если $n \notin P$. Через Q обозначим множество таких n, для которых $f(n)$ не определено и машина M не зацикливается. В [10] доказано, что множества P и Q рекурсивно неотделимы.

Через L обозначим свободный ZG_1-модуль с базой q_0, $q_1, \ldots, q_n$. Каждой команде вида (4) машины M поставим в соответствие элемент

$$f(i,\varepsilon,\delta) = q_i(a-1)^{1-\varepsilon}(b-1)^{1-\delta}(A-1)^{\varepsilon}(B-1)^{\delta} - \\ -q_j(a-1)^{1-\varepsilon+\alpha}(b-1)^{1-\delta+\beta}(c-1)(A-1)^{\varepsilon}(B-1)^{\delta} \qquad (5)$$

модуля L. Через L' обозначим ZG_1-подмодуль модуля L, порожденный элементами вида (5) и элементом $q_0(a-1)(B-1)$. Рассмотрим также элементы вида $f_k = q_1(a-1)^{2^k}(A-1)(B-1)$.

ЛЕММА 4. *Если $k \in P$, то $f_k \in L'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждой конфигурации вида $[i, t_1, t_2]$ машины M поставим в соответствие элемент

$$v(i,t_1,t_2) = q_i(a-1)^{t_1}(b-1)^{t_2}(A-1)(B-1)$$

модуля L. Непосредственно проверяется (см., например, [10, 12]), что если машина M из конфигурации $[i, t_1, t_2]$, выполняя одну команду вида (4), переходит в $[j, s_1, s_2]$, то для некоторых l_1, $l_2 \geq 0$ имеем:

$$v(i,t_1,t_2) - v(j,s_1,s_2)(c-1) =$$

$$= f(i,\varepsilon,\delta)(a-1)^{l_1(1-\varepsilon)}(b-1)^{l_2(1-\delta)}(A-1)^{1-\varepsilon}(B-1)^{1-\delta} \in L'.$$

Если $k \in P$, то существует последовательность конфигураций машины M такая, что

$$[1,2^k,0] = [i_0,t_0,s_0] \to [i_1,t_1,s_1] \to \ldots \to [i_r,t_r,s_r] = [0,1,0].$$

Тогда

$$f_k - v(0,1,0)(c-1)^r =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}[v(i_{j-1},t_{j-1},s_{j-1}) - v(i_j,t_j,s_j)(c-1)](c-1)^{j-1} \in L'.$$

Поскольку $v(0,1,0) = [q_0(a-1)(B-1)](A-1) \in L'$, то $f_k \in L'$.

Лемма доказана.

Через T обозначим ассоциативную алгебру над полем $Z_2 = \{0,1\}$ с порождающими x, y, z, X, Y и определяющими соотношениями (здесь $[a,b] = ab - ba$ обозначает кольцевой коммутатор)

$$[x,y] = [y,z] = [x,z] = [X,Y] = [X,y] = [X,z] =$$

$$= [Y,x] = [Y,z] = Xx = Yy = X^2 = Y^2 = 0.$$

Каждый элемент алгебры T однозначно представляется линейной комбинацией элементов вида

$$x^{l_1}y^{l_2}z^{l_3}X^{\varepsilon}Y^{\delta}, \tag{6}$$

где ε, $\delta = 0,1$; l_1, l_2, $l_3 \geq 0$.

Пусть S — свободный правый T-модуль с базой $q_0, q_1, \ldots, q_n$. Тогда каждый элемент модуля S однозначно представляется линейной комбинацией элементов вида

$$q_i x^{l_1}y^{l_2}z^{l_3}X^{\varepsilon}Y^{\delta}. \tag{7}$$

Через R обозначим фактормодуль T-модуля S со следующими определяющими соотношениями:

1) Каждой команде вида (4) машины M поставим в соответствие соотношение

$$q_i x^{1-\varepsilon} y^{1-\delta} X^{\varepsilon} Y^{\delta} = q_j x^{1-\varepsilon+\alpha} y^{1-\varepsilon+\beta} X^{\varepsilon} Y^{\delta} z;$$

2) $q_0 x Y = q_0 x Y z$.

Как и в [10], для соответствия последнего соотношения программе M присоединим к ней команду $q_0 01 \to q_0 T_0 T_0$.

Пусть I — множество элементов $x \in R$ вида (7), для которых найдутся $w \in R$ вида (7), $v \in T$ вида (6), $v \neq 1$, удовлетворяющие равенству $w = wv$, $u \in T$ вида (6), $x = wu$. Очевидно, $Z_2 I$ является T-подмодулем модуля R. Положим $\hat{R} = R/Z_2 I$. Образы элементов из S в R, $\hat{R}$ будем обозначать теми же символами. Заметим, что $q_0 x Y = 0$ в $\hat{R}$.

ЛЕММА 5. *Равенство*

$$q_{i_1} x^{t_{11}} y^{t_{12}} z^{r_1} X^{\varepsilon_1} Y^{\varepsilon_2} = q_{i_2} x^{t_{21}} y^{t_{22}} z^{r_2} X^{\varepsilon_1} Y^{\varepsilon_2},$$

где ε_1, $\varepsilon_2 = 0,1$, *выполняется в* R *тогда и только тогда, когда существуют натуральные числа* s_1, s_2 *такие, что* $s_1 + r_1 = s_2 + r_2$, *и некоторая конфигурация, в которую машина* M *переходит из каждой конфигурации* $[i_j, t_{j1}, t_{j2}]$ $(j = 1,2)$ *за* s_j *тактов. При этом если* $\varepsilon_k = 0$, $k = 1,2$, *то* M *не доходит до левого конца* k*-й ленты.*

ЛЕММА 6. *Если* $k \in Q$, *то* $q_1 x^{2^k} XY \neq 0$ *в* $\hat{R}$.

Доказательства этих лемм ничем не отличаются от доказательств лемм 6.5 и 6.6 из [10], поэтому здесь не приводятся.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть u, v — элементы вида (7). Тогда если $u = v \neq 0$ в $\hat{R}$, то $u = v$ в R. Это вытекает из того, что все двучленные соотношения $\hat{R}$ индуцированы соотношением R, а дополнительные соотношения $\hat{R}$ (элементы из I) — одночленные.

На множестве элементов вида (7) введем строгий линейный порядок $<$ так, чтобы слова меньшей длины предшествовали словам большей длины. Пусть $u_1 < u_2 < \ldots < u_k < \ldots$ — полная нумерация элементов вида (7). Через $\hat{S}$ обозначим множество формальных рядов вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i, \ \alpha_i \in Z_2.$$

Элементам a, b, c, A, B группы G_1 поставим в соответствие отображения Z_2-пространства $\hat{S}$ в себя. Пусть u — элемент вида (7). Тогда положим $ua = u(1+x)$, $ub = u(1+y)$, $uc = u(1+z)$, $uA = u(1+X)$, $uB = u(1+Y)$.

Если r — один из элементов a, b, c, A, B, то ряд

$$(\sum_i \alpha_i u_i)r = \sum_i \alpha_i (u_i r)$$

определен однозначно. Непосредственная проверка показывает, что справедлива следующая

ЛЕММА 7. 1) *Отображения a, b, c, A, B являются автоморфизмами Z_2-пространства $\hat{S}$.*

2) *Автоморфизмы a, b, c, A, B пространства $\hat{S}$ удовлетворяют соотношениям* (2), *и группа, порожденная ими, является метабелевой.*

Поэтому $\hat{S}$ становится Z_2G_1-модулем. Через N обозначим Z_2G_1-подмодуль модуля $\hat{S}$, порожденный элементами вида $u-v$, w, где u, v, w — слова вида (7) и $u=v$, $w=0$ в $\hat{R}$.

ЛЕММА 8. *Пусть u — слово вида* (7). *Если $u \neq 0$ в $\hat{R}$, то $u \notin N$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \neq 0$ в $\hat{R}$ и $u \in N$. Тогда

$$u = \sum_{i=1}^{k} (u_i - v_i) g_i + \sum_{j=1}^{k} w_j s_j,$$

где $u_i = v_i$, $w_j = 0$ в $\hat{R}$, g_i, $s_j \in G_1$.

Элементы u, $u_i - v_i$, w_j однородны по переменным X, Y. Для любого $w \in \hat{S}$ имеем $wA = w(1+X)$, $wA^{-1} = w(1-X)$, $wB = w(1+Y)$, $wB^{-1} = w(1-Y)$.

Следовательно, заменяя соответствующим образом элементы $A^{\pm 1}$, $B^{\pm 1}$, входящие в состав g_i, s_j, с учетом определяющих соотношений алгебры T получаем равенство вида

$$u = \sum_{i=1}^{k} (u_i - v_i) g_i X^{\varepsilon_i} Y^{\delta_i} + \sum_{j=1}^{r} w_j s_j X^{\varepsilon_j} Y^{\delta_j},$$

где g_i, s_i — элементы группы G_1 вида $a^{l_1} b^{l_2} c^{l_3}$, l_1, l_2, $l_3 \in Z$, ε_i, ε_j, δ_i, $\delta_j = 0,1$.

Последнее равенство умножим на такое c^t (t — натуральное число), что элементы g_i, s_j, полученные в результате этого, не содержат отрицательных степеней c. Пусть $g_i = a^{l_1}b^{l_2}c^{l_3}$, $l_3 > 0$. Тогда $(u_i - v_i)g_i = (u_i - v_i)[(c-1)+1]^{l_3}a^{l_1}b^{l_2} = (u_i - v_i)(z+1)^{l_3}a^{l_1}b^{l_2}$.

Элемент $(u_i - v_i)(z+1)^{l_3}$ представляется в виде линейной комбинации элементов вида $u_l - v_l$, где $u_l = v_l$ в $\hat{R}$. Аналогично расписывается элемент $w_j s_j$. Так как $uc^t = u[(c-1)+1]^t = u[(z+1)^t - 1] + u$, то после указанных преобразований получаем равенство вида

$$u = \sum_{l=1}^{t} \alpha_l u z^l + \sum_{i=1}^{k} (u_i - v_i) g_i X^{\varepsilon_i} Y^{\delta_i} + \sum_{j=1}^{r} w_j s_j X^{\varepsilon_j} Y^{\delta_j}, \tag{8}$$

где g_i, s_j — элементы вида $a^{l_1}b^{l_2}$.

Каждое слагаемое вида $(u_i - v_i)g_i X^{\varepsilon_i} Y^{\delta_i}$, в силу определения отображения a, b, представляется в виде суммы (возможно, бесконечной)

$$(u_i - v_i) g_i X^{\varepsilon_i} Y^{\delta_i} = \sum_s (m_s^i - n_s^i),$$

где $m_s^i = n_s^i$ в $\hat{R}$. Элементы $m_s^i - n_s^i$ назовем *внутренними слагаемыми* суммы (8). Аналогично расписываются и слагаемые третьей суммы из (8).

Положим $u^{(0)} = u$. Если выполняется равенство (8), то $u^{(0)}$ должен сократиться с каким-то элементом, входящим в правую часть равенства (8). Если этим элементом окажется m_s^i (или n_s^i), то положим $u^{(1)} = n_s^i$ (или $u^{(1)} = m_s^i$). Поступая аналогично, выберем последовательность элементов

$$u = u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}, \ldots . \tag{9}$$

Заметим, что $u^{(k-1)} = u^{(k)}$, $k \geq 1$, в $\hat{R}$. Ни один из элементов $u^{(k)}$ не может войти в первое слагаемое правой части равенства (8), так как для $u \neq 0$ в $\hat{R}$ равенство $u = uz^l$ в $\hat{R}$ невозможно. Элемент $u^{(k)}$ не может войти и в третье слагаемое (8), иначе $u = 0$ в $\hat{R}$. Тогда равенство (8) возможно только в том случае, когда последовательность (9) бесконечна.

Элемент $u^{(k-1)} - u^{(k)}$ является внутренним слагаемым второй суммы из правой части равенства (8). Рассмотрение поля Z_2 позволяет считать, что каждое внутреннее слагаемое только один раз используется при выборе последовательности (9). Дословно повторяя теперь рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 7.7 из [10], показываем конечность последовательности (9). Это означает невозможность равенства (8). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 1. Естественный гомоморфизм $Z \to Z_2$ продолжим до гомоморфизма $ZG_1 \to Z_2G_1$. Относительно этого гомоморфизма превратим Z_2G_1-модуль $H = \hat{S}/N$ в ZG_1-модуль. Рассмотрим гомоморфизм ZG_1-модулей $\varphi\colon L \to H$, определенный правилом $\varphi(q_i) = q_i$, $0 \le i \le n$.

Пусть $k \in Q$. Тогда $\varphi(f_k) = q_1 x^{2^k} XY$. По лемме 6 имеем $q_1 x^{2^k} XY \neq \neq 0$ в $\hat{R}$. Далее, по лемме 8, $q_1 x^{2^k} XY \notin N$, т.е. $\varphi(f_k) \neq 0$. Значит, $f_k \notin L'$.

Если $k \in P$, то по лемме 4 имеем $f_k \in L'$.

Поскольку множества P и Q рекурсивно неотделимы (см. [10]), то множество всех натуральных k, для которых $f_k \in L'$, нерекурсивно. Значит, проблема вхождения в к.п. подмодуль L' свободного ZG_1-модуля L алгоритмически неразрешима.

Предложение доказано.

§ 3. Правые идеалы группового кольца свободной метабелевой группы

Пусть M — свободный ZG_1-модуль, где G_1 — группа из § 2, с базой $m_1, m_2, \dots, m_n$. Каждый элемент из M является линейной комбинацией элементов вида $m_i\theta$, где θ — элемент вида (3). Фиксируем ZG_1-подмодуль M_0 модуля M, порожденный элементами $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$.

Теперь рассмотрим свободную метабелеву группу G с базой

$$X = \{x, y, z, z_1, z_2, z_3, z_4, t, t_1, t_2, \dots, t_n\}.$$

Упорядочим множество X, полагая $z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < t < t_1 < \dots < < t_n < x < y < z$. Введем обозначения: $q_i = [t_i, t]$, $\tilde{m}_i = q_i - 1$ $(1 \le i \le n)$, $a_1 = [z_2, z_1]$, $b_1 = [z_4, z_3]$. Для каждого $u \in G$ через $\hat{u}$ обозначим внутренний автоморфизм группы G, продолженный до автоморфизма кольца ZG, т.е. $(\sum \alpha_i g_i)\hat{u} = \sum \alpha_i g_i^u$, $\alpha_i \in Z$.

Рассмотрим множество слов вида

$$u = z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} t^s t_1^{s_1} \dots t_n^{s_n} \tag{10}$$

группы G, где k_i, s, $s_i \in Z$. По лемме 2 каждый элемент группы $G^{(1)}$ однозначно представляется в виде

$$v = \prod_{p>q} [p, q]^{f_{p,q}}, \tag{11}$$

где p, $q \in X$, $f_{p,q} \in Z\bar{G}$, $f_{p,q}$ не зависит от переменных $r \in X$ при $r < q$ (образы элементов из X в $Z\bar{G}$ будем обозначать теми же буквами). Тогда каждый элемент группы G однозначно представляется в виде:

$$x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} uv, \tag{12}$$

где l_1, l_2, $l_3 \in Z$, u, v — элементы вида (10), (11) соответственно.

Пусть H — подгруппа группы G, порожденная элементами

$$x,\ y,\ z,\ a_1^{y-1},\ b_1^{x-1},\ a_1^{z-1},\ b_1^{z-1}.$$

Исходя из леммы 2, легко показать, что каждый элемент группы H однозначно представляется в виде:

$$\begin{gathered} x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} [y, x]^{f_1(x,y,z)} [z, x]^{f_2(x,y,z)} [z, y]^{f_3(y,z)} \times \\ \times a_1^{(y-1)f_4(x,y)+(z-1)f_5(x,y,z)} b_1^{(x-1)f_6(x,y)+(z-1)f_7(x,y,z)}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $f_i \in Z[x, y, z, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}]$ и зависят только от указанных аргументов. Правый идеал J_H порождается 7 элементами (см. § 1).

Определим отображение $\pi\colon M \to ZG$, полагая

$$\pi(m_i\theta) = \tilde{m}_i \hat{x}^{l_1} \hat{y}^{l_2} \hat{z}^{l_3} a_1^{f(x)} b_1^{g(y)}, \quad \pi(\sum m_i\theta_i) = \sum \pi(m_i\theta_i),$$

где θ, θ_i — элементы вида (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Далее, в лемме 12, будет доказано, что каждый элемент группы G_1 однозначно представляется в виде (3). Отсюда будет следовать корректность отображения π.

Через $\bar{M}_0$ обозначим правый идеал кольца ZG, порожденный элементами $\pi(\rho_1)$, $\pi(\rho_2), \dots, \pi(\rho_k)$. Тогда справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Элемент ρ модуля M принадлежит M_0 тогда и только тогда, когда $\pi(\rho) \in \bar{M}_0 + J_H$.*

Доказательству этого предложения предпошлем несколько лемм.

Через T обозначим ZG-модуль ZG/J_H. Образы элементов из ZG в T будем обозначать так же, как и элементы ZG. Равенство в T будем обозначать через $\equiv$ (равенство по модулю J_H).

ЛЕММА 9. *Пусть в T выполняется равенство $\sum\limits_i u_i f_i \equiv 0$, где u_i — различные слова вида (10), а f_i — линейные комбинации элементов вида* (11). *Тогда $u_i f_i \equiv 0$ для всех i.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим $(u_1v_1)(u_2v_2)^{-1} \in H$, где u_1, u_2 — элементы вида (10), v_1, v_2 — элементы вида (11). Тогда элемент $(u_1v_1)(u_2v_2)^{-1} = (u_1u_2^{-1})(v_1v_2^{-1})^{u_2^{-1}}$ представляется в виде (13), что возможно только при $u_1 = u_2$. Значит, элементы вида u_1v_1, u_2v_2 при $u_1 \neq u_2$ принадлежат различным смежным классам по подгруппе H. По следствию 2 леммы 1 имеем $u_i f_i \equiv 0$. Лемма доказана.

Через V обозначим множество слов v вида (11), удовлетворяющие условиям:

а) $f_{y,x} = 0$, $f_{z,x} = 0$, $f_{z,y} = 0$;

б) f_{z_2,z_1} не содержит мономов вида $x^k y^s z^r$ при $|s| + |r| > 0$;

в) f_{z_4,z_3} не содержит мономов вида $x^k y^s z^r$ при $|k| + |r| > 0$.

ЛЕММА 10. *Справедливо $G^{(1)} = (G^{(1)} \cap H) \times V$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый элемент группы $G^{(1)} \cap H$ представляется в виде (13) при $l_1 = l_2 = l_3 = 0$. Пусть $v \in G^{(1)}$ — произвольный элемент вида (11). По определению порядка $<$ на X имеем, что $f_{y,x}$, $f_{z,x}$ зависят только от x, y, z, а $f_{z,y}$ зависит только от y, z. Представим элемент f_{z_2,z_1} в виде

$$f_{z_2,z_1} = (y-1)g_1(x,y) + (z-1)g_2(x,y,z) + g_3,$$

где g_3 не содержит мономов вида $x^k y^s z^r$ при $|s| + |r| > 0$. Существование такого представления очевидно.

Пусть $f_{z_2,z_1} = (y-1)g_1'(x,y) + (z-1)g_2'(x,y,z) + g_3'$ — другое подобное представление элемента f_{z_2,z_1}. Тогда $(y-1)(g_1 - g_1') + (z-1)(g_2 - g_2') =$

$= g_3' - g_3 = g$. Элемент g зависит только от x, y, z и не содержит мономов вида $x^k y^s z^r$ при $|s| + |r| > 0$. Значит, $g \in Z[x, x^{-1}]$. Из последнего равенства, расписанного в кольце рядов $Z[[x-1, y-1, z-1]]$, следует $g = 0$. Поскольку $g_1 - g_1'$ делится на $z - 1$, то $g_1 = g_1'$, $g_2 = g_2'$. Тем самым мы показали однозначность вышеприведенного разложения элемента f_{z_2, z_1}.

Аналогично разлагается элемент

$$f_{z_4, z_3} = (y-1)h_1(x,y) + (z-1)h_2(x,y,z) + h_3,$$

где h_3 не содержит мономов вида $x^k y^s z^r$ при $|k| + |r| > 0$.

Таким образом, элемент v однозначно представляется в виде hv', где $v' \in V$ и

$$h = [y,x]^{f_{y,x}}[z,x]^{f_{z,x}}[z,y]^{f_{z,y}} a_1^{(y-1)g_1(x,y)+(z-1)g_2(x,y,z)} \times$$

$$\times b_1^{(x-1)h_1(x,y)+(z-1)h_2(x,y,z)} \in G^{(1)} \cap H.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Элементы из V линейно независимы по модулю пространства J_H.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v_1, $v_2 \in V$ и $v_1 v_2^{-1} \in H$. Тогда $v_1 v_2^{-1} \in H \cap V$. По лемме 10 имеем $v_1 v_2^{-1} = 1$, т.е. $v_1 = v_2$. По следствию 1 леммы 1 элементы из V линейно независимы по модулю J_H. Следствие доказано.

Пусть W — подгруппа группы V, порожденная элементами

$$a_1^{x^l},\ b_1^{y^s},\ q_i^{x^l y^s z^r},\ 1 \le i \le n,\ l, s, r \in Z. \tag{14}$$

Очевидно, W является свободной абелевой группой с базой (14). Через W' обозначим множество элементов v вида (11), удовлетворяющих следующим условиям:

а) $f_{y,x} = f_{z,x} = f_{z,y} = 0$;

б) f_{z_2,z_1}, f_{z_4,z_3}, $f_{t_i,t}$ $(1 \le i \le n)$ не содержат мономов вида $x^k y^s z^r$.

Непосредственно проверяется

ЛЕММА 11. *Имеет место равенство $V = W \times W'$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если выполняется равенство вида* $\sum w_i' f_i = 0$, *где* w_i' *— различные элементы из* W', f_i *— линейные комбинации элементов из* W, *то* $f_i = 0$ *для всех* i.

Утверждение этого следствия является элементарным свойством тензорного произведения $ZV = ZW \otimes_Z ZW'$ свободных Z-модулей.

Через $\widetilde{A} = R_{a_1}$, $\widetilde{B} = R_{b_1}$ обозначим операторы правого умножения, действующие на пространстве $(ZG^{(1)} + J_H)/J_H$. Операторы $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, действующие на $(ZG^{(1)} + J_H)/J_H$, обозначим через $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$ соответственно. Заметим, что J_H инвариантно относительно действия $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, так как для любого $g \in G$ имеем $gx \equiv g^x$, $gy \equiv g^y$, $gz \equiv g^z$.

Действительно, $gx = xg^x = (x-1)g^x + g^x \equiv g^x$. Если $g \in G^{(1)}$, то

$$gx \equiv g\widetilde{a}, \quad gy \equiv g\widetilde{b}, \quad gz \equiv g\widetilde{c}. \tag{15}$$

Пусть G_2 — группа, порожденная операторами $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$. Отображение $\sim$ ставит в соответствие порождающим группы G_1 порождающие группы G_2.

ЛЕММА 12. 1) *Отображение* $\sim$ *продолжается до изоморфизма групп* G_1 *и* G_2.

2) *Элементы группы* G_1 *однозначно представляются в виде* (3).

3) *Ядро отображения* π *равно* 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначало проверим соотношения (2). Пусть $g \in G^{(1)}$. Тогда

$$g[\widetilde{a},\widetilde{b}] = g\widetilde{a}^{-1}\widetilde{b}^{-1}\widetilde{a}\widetilde{b} = g^{x^{-1}y^{-1}xy}g,$$

$$g[\widetilde{A},\widetilde{B}] = ga_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1 = g[a_1,b_1] = g,$$

$$g[[\widetilde{A},\widetilde{a}],\widetilde{A}] = g[\widetilde{A},\widetilde{a}]^{-1}\widetilde{A}^{-1}[\widetilde{A},\widetilde{a}]\widetilde{A} = g\widetilde{a}^{-1}\widetilde{A}^{-1}\widetilde{a}\widetilde{A}\widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}^{-1}\widetilde{a}^{-1}\widetilde{A}\widetilde{a}\widetilde{A} =$$

$$= g\hat{x}^{-1}a_1^{-1}\hat{x}a_1^{-1}\hat{x}^{-1}a_1\hat{x}a_1 = (((g^{x^{-1}}a_1^{-1})^x a_1^{-1})^{x^{-1}}a_1)^x a_1 =$$

$$= ga_1^{-x}a_1^{-1}a_1^x a_1 = ga_1^{-x-1+x+1} = g.$$

Проверим соотношение $[\widetilde{A},\widetilde{b}] = 1$. Имеем

$$g[\widetilde{A}, \widetilde{b}] = g\widetilde{A}^{-1}\widetilde{b}^{-1}\widetilde{A}\widetilde{b} = ga_1^{-1}\hat{y}^{-1}a_1\hat{y} = ((ga_1^{-1})^{y^{-1}}a_1)^y =$$

$$= ga_1^{-1}a_1^y = ga_1^{y-1} = (a_1^{y-1} - 1)g + g \equiv g.$$

Аналогично проверяются остальные соотношения.

Поскольку нормальная подгруппа группы G_2, порожденная элементами $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, абелева, то отсюда вытекает метабелевость группы G_2. Таким образом, мы имеем гомоморфизм $\sim: G_1 \to G_2$. Пусть θ — элемент вида (3). Тогда

$$\pi(m_i\theta) = (q_i - 1)\widetilde{\theta} = (q_i - 1)\hat{x}^{l_1}\hat{y}^{l_2}\hat{z}^{l_3}a_1^{f(x)}b_1^{g(y)} =$$

$$= (q_i^{x^{l_1}y^{l_2}z^{l_3}} - 1)a_1^{f(x)}b_1^{g(y)}.$$

Стало быть, ввиду следствия леммы 10, элементы вида $\pi(m_i\theta)$, где $1 \leq i \leq n$ и θ пробегает множество элементов вида (3), линейно независимы по модулю J_H. Отсюда следуют тривиальность ядра $\sim$, а также 2-е и 3-е утверждения леммы. Что и требовалось.

Из леммы 12 и из определения π для любых $m \in M$, $\theta \in G_1$ непосредственно вытекает сравнение

$$\pi(m\theta) \equiv \pi(m)\widetilde{\theta}. \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2. Предположим, что $\rho \in M_0$, т.е. $\rho = \rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2 + \ldots + \rho_k\theta_k$, где $\theta_i \in ZG_1$. Используя (10), имеем $\pi(\rho) \equiv \pi(\rho_1)\widetilde{\theta}_1 + \pi(\rho_2)\widetilde{\theta}_2 + \ldots + \pi(\rho_k)\widetilde{\theta}_k$, где $\sim$ — изоморфизм из леммы 12, продолженный до изоморфизма ZG_1 и ZG_2. В силу (15), заменяя $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$, входящие в состав θ_i, на x, y, z, имеем $\pi(\rho) \equiv \pi(\rho_1)\theta_1^0 + \pi(\rho_2)\theta_2^0 + \ldots + \pi(\rho_k)\theta_k^0$, где $\theta_i^0 \in ZG$. Следовательно, $\pi(\rho) \in \bar{M}_0 + J_H$.

Обратно, пусть $\pi(\rho) \in \bar{M}_0 + J_H$. Тогда имеем сравнение

$$\pi(\rho) \equiv \sum \pi(r_i)w_i, \tag{17}$$

где $r_i \in M_0$, w_i — элементы вида (12).

Пусть $w_i = x^{l_1}y^{l_2}z^{l_3}u_iv_i$, где u_i, v_i — элементы вида (10), (11) соответственно. В силу (15), (16) имеем

$$\pi(r_i)w_i \equiv \pi(r_i)\widetilde{a}^{l_1}\widetilde{b}^{l_2}\widetilde{c}^{l_3}u_iv_i \equiv \pi(r_ia^{l_1}b^{l_2}c^{l_3})u_iv_i.$$

Следовательно, в (17), заменяя r_i на $r_i a^{l_1} b^{l_2} c^{l_3}$, можно считать, что $w_i = u_i v_i$. Тогда

$$\pi(r_i)w_i = \pi(r_i)u_i v_i = u_i(\pi(r_i)^{u_i})v_i.$$

Так как $\pi(\rho)$, $\pi(r_i)^{u_i}v_i$ являются линейными комбинациями элементов вида (11), то по лемме 9 в сравнении (17) достаточно рассмотреть случай, когда w_i имеют вид (11). По лемме 10 имеем $w_i = h_i v_i$, где $h_i \in G^{(1)} \cap H$, $v_i \in V$. Тогда

$$\pi(r_i)w_i = \pi(r_i)h_i v_i = (h_i - 1)\pi(r_i)v_i + \pi(r_i)v_i \equiv \pi(r_i)v_i.$$

Теперь можно считать, что $w_i \in V$. В этом случае $\pi(\rho)$, $\pi(r_i)w_i \in ZV$. Тогда, ввиду следствия леммы 10, сравнение (17) дает равенство

$$\pi(\rho) = \sum \pi(r_i)w_i, \;\; w_i \in V. \tag{18}$$

Более того, $\pi(\rho), \pi(r_i) \in ZW$. Разлагая элемент w_i согласно лемме 11 и применяя следствие этой же леммы, можно считать, что $w_i \in W$. Группа W является свободной абелевой группой с базой (14). Элементы $\pi(\rho)$, $\pi(r_i)$ имеют степень 1 по переменным вида $q_i^{x^l y^s z^r} - 1$. Тогда равенство (18), расписанное в кольце целочисленных рядов от переменных вида $a_1^{x^l} - 1$, $b_1^{y^s} - 1$, $q_i^{x^l y^s z^r} - 1$, позволяет считать, что элементы w_i не содержат переменных вида $q_i^{x^l y^s z^r}$. Тогда $w_1 = a_1^{f_i(x)} b_1^{g_i(y)}$. В силу (16) имеем

$$\pi(r_i)w_i \equiv \pi(r_i A^{f_i(a)} B^{g_i(b)}).$$

Заменяя r_i на $r_i A^{f_i(a)} B^{g_i(b)}$, из равенства (18) получаем сравнение $\pi(\rho) \equiv \sum \pi(r_i)$, $r_i \in M_0$. Еще раз применяя следствие леммы 11, из последнего сравнения получаем равенство $\pi(\rho) = \sum \pi(r_i)$, $r_i \in M_0$. По лемме 12 имеем $\rho = \sum r_i \in M_0$. Предложение доказано.

§ 4. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. *Если G — свободная метабелева группа (достаточно большого ранга), то в кольце ZG проблема вхождения в к.п. правые идеалы неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1 проблема вхождения в к.п. подмодули свободного ZG_1-модуля, где G_1 — группа из § 2, алгоритмически неразрешима. В условиях предложения 2 если M_0 — к.п. ZG_1-подмодуль свободного ZG_1-модуля M, то $M_0 + J_H$ является к.п. правым идеалом кольца ZG, где G — свободная метабелева группа из § 2. Поэтому из предложения 2 получаем неразрешимость указанной проблемы. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Проблема вхождения для свободных разрешимых групп ступени разрешимости ≥ 3 неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в условиях леммы 3 G является свободной разрешимой группой ступени разрешимости 3, то G_0 является свободной метабелевой группой. Разрешимость проблемы вхождения в к.п. подгруппу H_I группы G сводится по лемме 3 к разрешимости проблемы вхождения в к.п. правый идеал I кольца ZG_0. Тогда из теоремы 1 следует неразрешимость проблемы вхождения для свободных разрешимых групп ступени разрешимости 3. Остается отметить, что свободные разрешимые группы (ранга ≥ 2) ступени разрешимости ≥ 4 содержат свободные разрешимые подгруппы (счетного ранга) ступени разрешимости 3. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Существует группа с неразрешимой проблемой равенства, конечно-определенная в многообразии разрешимых групп ступени разрешимости ≥ 3, с определяющими соотношениями из последнего коммутанта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — свободная разрешимая группа ступени разрешимости k из леммы 3. Тогда G_0 — свободная разрешимая группа ступени разрешимости $k-1$. При $k=3$ теорема 1 дает неразрешимость проблемы вхождения в к.п. правые идеалы кольца ZG_0. Если $k \geq 4$, то в силу теоремы 2 проблема вхождения в к.п. подгруппы группы G_0 неразрешима. Из (1) следует неразрешимость проблемы вхождения в к.п. правые идеалы кольца ZG_0. Таким образом, при любом $k \geq 3$ проблема вхождения в к.п. правые идеалы кольца ZG_0 неразрешима. Тогда из леммы 3 следует неразрешимость проблемы вхождения в нормальную подгруппу R_I группы G. Группа G/R_I удовлетворяет условиям теоремы. Теорема доказана.

В заключение автор благодарит профессора И. П. Шестакова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр*, Комбинаторная теория групп, М., Наука, 1974.
2. *К. А. Михайлова*, Проблема вхождения для свободных произведений групп, Докл. АН СССР, **127** (1959), 746—748.
3. *К. А. Михайлова*, Проблема вхождения для прямых произведений групп, Докл. АН СССР, **119** (1958), 1103—1105.
4. *Н. С. Романовский*, О проблеме вхождения для расширений абелевых групп с помощью нильпотентных, Сиб. матем. ж., **21**, N 2 (1980), 170—174.
5. *С. А. Агалаков*, О финитной отделимости групп и алгебр Ли, Алгебра и логика, **22**, N 4 (1983), 363—371.
6. *Г. А. Носков, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков*, Бесконечные группы, Итоги науки и техн., ВИНИТИ, Алгебра. Топология. Геометрия, М., **17** (1979), 65—157.
7. *D. E. Cohen*, Groups of cohomological dimension one (Lect. Notes Math., 245), Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1972.
8. *Е. И. Тимошенко*, Некоторые алгоритмические вопросы для метабелевых групп, Алгебра и логика, **12**, N 2 (1973), 232—240.
9. *В. И. Епанчинцев, Г. П. Кукин*, Проблема равенства в многообразии групп, содержащем $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$, Алгебра и логика, **18**, N 3 (1979), 259—285.
10. *О. Г. Харлампович*, Конечно определенная разрешимая группа с неразрешимой проблемой равенства, Изв. АН СССР, сер. матем., **45**, N 4 (1981), 852—873.

11. *В. Г. Соколов*, Алгоритм тождеств слов для одного класса разрешимых групп, Сиб. матем. ж., **12**, N 6 (1971), 1405—1410.

12. *У. У. Умирбаев*, Проблема вхождения для алгебр Ли, Алгебра и логика, **32**, N 3 (1993), 326—340.

13. *R. H. Fox*, Free differential calculus. I, Annals of Math., **57** (1953), 547—560.

14. *В. Н. Ремесленников, В. Г. Соколов*, Некоторые свойства вложения Магнуса, Алгебра и логика, **9**, N 5 (1970), 566—578.

15. *S. Bachmuth*, Automorphisms of free metabelian groups, Trans. Amer. Math. Soc., **118**, N 6 (1965), 93—104.

16. *А. И. Мальцев*, Алгоритмы и рекурсивные функции, 2-е изд., М., Наука, 1986.

Адрес автора:

Поступило 3 февраля 1994 года

УМИРБАЕВ Уалбай Утмахамбетович,
КАЗАХСТАН,
480121, Алма-Ата,
ул. Тимирязева, 46/12, кв. 304.