



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Авербух, Инфинитезимальная характеристика равновесия по Нэшу в дифференциальной игре многих лиц, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2011, выпуск 2, 3–11

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.238.202.29

10 ноября 2024 г., 18:50:46



МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.8

© Ю. В. Авербух

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ МНОГИХ ЛИЦ¹

Для дифференциальной игры многих лиц найдены условия того, что заданное многозначное отображение в каждой точке есть множество выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу. Данное условие выписано в инфинитезимальной форме. Также найдены достаточные условия, при которых набор непрерывных функций обеспечивает равновесие по Нэшу. Данное условие обобщает метод, основанный на системе уравнений типа Гамильтона–Якоби.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, дифференциальные игры, обобщенные производные.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию множества выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу в неантагонистической дифференциальной игре многих лиц. Эта задача рассматривается в свете методов, разработанных для исследования антагонистических дифференциальных игр в работах Н. Н. Красовского, А. И. Субботина [1, 2] и их учеников.

Как показано в работах [3, 4], в этом случае равновесие по Нэшу существует в классе совместных смешанных стратегий с координационным центром. Движение при этом формируется следующим образом: игроки, совместно выбрав некоторое базовое движение, его реализуют; если один из игроков отклоняется от этого движения, то координационный центр об этом информирует остальных игроков. Доказательство существования равновесной по Нэшу совместной смешанной стратегии ведется при помощи «стратегий наказания». С использованием этой техники также дается характеристика множества выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу [3, 5].

В настоящей работе найдены условия, использующие аппарат негладкого анализа, при которых заданное многозначное отображение является множеством значений игры по Нэшу (то есть множеством выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу). Также получены условия, при которых значения непрерывной функции позиции со значения в \mathbb{R}^m (m — количество игроков) являются некоторыми значениями игры по Нэшу. Показано, что эти условия обобщают метод систем уравнений типа Гамильтона–Якоби, в частности, описанный в [6].

§ 1. Определения и обозначения

Мы рассматриваем управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \dots, u_m), \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_i \in P_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.1)$$

Мы считаем, что u_i — управление i -го игрока. Цель i -го игрока — максимизировать терминальный выигрыш $\sigma_i(x(\vartheta_0))$. Мы предполагаем, что множества P_i — конечномерные компакты, f непрерывна, локально липшицева по x и удовлетворяет по x условию подлинейного роста.

Мы будем использовать совместные смешанные стратегии и определение равновесия по Нэшу для этого случая, данное в [3]. Предполагается наличие некоторого координирующего центра, который контролирует совместное исполнение решения игроками и в случае отклонения

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-7320.2010.1), РФФИ (грант №09-01-00436-а) и программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

одного из них от совместного решения информирует об этом остальных. Функции, формируемые этим центром, имеют вид

$$\alpha[t] = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \theta), \\ i, & t \in [\theta, \vartheta_0], \end{cases}$$

где i — некоторое целое число от 1 до m .

Обозначим множество таких функций через \mathcal{A} .

Кроме этого, введем следующие обозначения:

$$P \triangleq \prod_{i=\overline{1,m}} P_i, \quad Q_j \triangleq \prod_{i=\overline{1,m}, i \neq j} P_i.$$

Также мы будем использовать обобщенные управления — мерозначные функции. Пусть E — некоторый конечномерный компакт, $\mathcal{B}(E)$ — семейство множеств, измеримых по Борелю, τ — некоторый момент из $[t_0, \vartheta_0]$. Будем называть функцию $\mu : [\tau, \vartheta_0] \times \mathcal{B}(E) \rightarrow [0, 1]$ обобщенным управлением на $[\tau, \vartheta_0]$, если при каждом $t \mu(t, \cdot)$ есть мера на $\mathcal{B}(E)$, а $\mu(\cdot, \cdot)$ слабо измерима, то есть измерима функция

$$t \mapsto \int_E \varphi(c) \mu(t, dc)$$

для всех $\varphi \in C(E)$. Через $\mathcal{R}(\tau; E)$ обозначим множество всех обобщенных управлений на $[\tau, \vartheta_0]$.

Совместной стратегией игроков называется набор функций $\mathcal{W} = (u^{[0]}(t, x, \varepsilon), u^{[1]}(t, x, \varepsilon), \dots, \alpha[\cdot], u^{[m]}(t, x, \varepsilon), \beta(\varepsilon))$. Здесь (t, x) — позиция, ε — параметр точности, $\beta(\varepsilon)$ — функция, ограничивающая мелкость разбиения сверху, α — зависящая от времени функция координирующего центра. Также $u^{[0]}$ принимает значения во множестве P , а функции $u^{[j]}$ во множествах Q_j .

Пусть выбраны некоторая начальная позиция $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, стратегия \mathcal{W} , параметр точности ε и разбиение $\Delta = \{\tau_k\}_{k=0}^r$ отрезка $[t_*, \vartheta_0]$ мелкости, не превышающей $\beta(\varepsilon)$.

Управление игроков формируется следующим образом. Пусть реализовалась некоторая функция координирующего центра $\alpha[\cdot]$. Обозначим через θ момент переключения на некоторое число $j \in \overline{1, m}$. Пусть l — наименьший номер такой, что $\tau^l \geq \theta$. Для $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ при $k < l$ управление i -го игрока равно i -й координате функции $u^{[0]}(\tau_k, x_k, \varepsilon)$, при $k \geq l$ управление i -го игрока равно соответствующей координате вектор-функции $u^{[j]}(\tau_k, x_k, \varepsilon)$. Здесь x_k — положение системы, реализовавшееся в момент τ_k .

Далее обозначим функцию $\alpha[\cdot]$, тождественно равную нулю через $\alpha^0[\cdot]$.

Поясним характер формирования управления. Пусть j -й игрок отклонился от совместного движения в момент времени θ . Это означает, что до момента времени θ все игроки совместно реализовывали стратегию, после этого момента все игроки кроме j -го совместно реализуют свою стратегию, что позволит им воздействовать на «уклониста». Таким образом, стратегия \mathcal{W} порождает:

(1) совместное движение; это случай, когда никто из игроков не отклоняется от использования \mathcal{W} , обозначим его через $x^{[0]}[\cdot, t_*, x_*, \mathcal{W}, \varepsilon, \Delta]$;

(2) движение, порожденное индивидуальным управлением i -го игрока $u_i[\cdot]$ и совместной стратегией \mathcal{W} ; в этом случае стратегию \mathcal{W} используют все игроки, кроме i -го; обозначим его через $x^{[i]}[\cdot, t_*, x_*, \mathcal{W}, \varepsilon, \Delta, u_i[\cdot]]$.

Определим конструктивные движения. Именно, будем говорить, что $x[\cdot]$ есть конструктивное движение, выходящее из позиции (t_*, x_*) , если существует последовательность движений $x^{[0]}[\cdot, t_k, \mathcal{W}, \varepsilon_k, \Delta_k]$ такая, что $(t_k, x_k) \rightarrow (t_*, x_*)$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, сходящаяся в смысле траекторий к $x[\cdot]$. Множество всех совместных конструктивных движений, порожденных стратегией \mathcal{W} , обозначим через $X^{[0]}(t_*, x_*, \mathcal{W})$. Аналогично определяются и множество всех конструктивных движений в случае, когда i -й игрок уклоняется. Обозначим его через $X^{[i]}(t_*, x_*, \mathcal{W})$.

Мы будем использовать следующее определение равновесия по Нэшу [3]. Будем говорить, что стратегия \mathcal{W} равновесна по Нэшу, если выполнено неравенство

$$\max\{\sigma_i(x[\vartheta_0]) : x[\cdot] \in X^{[i]}(t_*, x_*, \mathcal{W})\} \leq \min\{\sigma_i(z[\vartheta_0]) : z[\cdot] \in X^{[0]}(t_*, x_*, \mathcal{W})\}.$$

Ясно, что значение вектора выигрышей $(\sigma_1(z[\vartheta_0]), \dots, \sigma_m(z[\vartheta_0]))$ не зависит от выбора конкретного движения $z[\cdot] \in X^{[0]}(t_*, x_*, \mathcal{W})$.

§ 2. Формулировка основного результата

Рассмотрим следующее многозначное отображение

$$\mathcal{N} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m).$$

Оно сопоставляет каждой позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ множество всех выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу. Отображение \mathcal{N} есть значение дифференциальной игры по Нэшу.

Из [3, Теорема 6.1] следует, что отображение \mathcal{N} непустозначно.

Далее мы будем использовать вместо обобщенных движений решения дифференциального включения. А именно, рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x) \triangleq \text{co}\{f(t, x, u_1, \dots, u_m) : u_i \in P_i, \quad i = \overline{1, m}\}. \quad (2.1)$$

Обозначим множество его решений с начальным условием $x(t_*) = x_*$ через $\text{Sol}(t_*, x_*)$.

Следующее утверждение позволяет описать отображение \mathcal{N} .

Предложение 1. Пусть многозначное отображение $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет следующим свойствам:

(N1) $\mathcal{T}(t, x) \subset [\omega_1(t, x), \infty) \times \dots \times [\omega_m(t, x), \infty)$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$;

(N2) $\mathcal{T}(\vartheta_0, x) = \{(\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x))\}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

(N3) для всех $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $\varsigma \in \mathcal{T}(t_*, x_*)$ существует движение $z(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$ такое, что

$$\varsigma \in \mathcal{T}(t, z(t)), \quad t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Тогда $\mathcal{T}(t, x) \subset \mathcal{N}(t, x)$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

Предложение немедленно следует из [3, Теорема 6.3].

Пусть I — произвольное множество индексов. Если многозначные отображения $\mathcal{T}^\alpha : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, $\alpha \in I$ удовлетворяют условиям (N1)–(N3), то многозначное отображение $\mathcal{T}^* : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, определенное по правилу $\mathcal{T}^* = \text{Cl } \mathcal{T}$, где

$$\mathcal{T}(t, x) \triangleq \left[\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{T}^\alpha(t, x) \right],$$

также полунепрерывно сверху по включению, имеет компактные образы и удовлетворяет условиям (N1)–(N3). Здесь Cl — замыкание графика, то есть

$$\begin{aligned} [\text{Cl } \mathcal{T}](t, x) \triangleq \{ \varsigma : \exists \{(t^k, x^k)\}_{k=1}^\infty \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \exists \{\varsigma^k\} \subset \mathbb{R}^m : \\ \varsigma^k \in \mathcal{T}(t^k, x^k), \quad (t^k, x^k) \rightarrow (t, x), \quad \varsigma^k \rightarrow \varsigma, \quad k \rightarrow \infty \}. \end{aligned}$$

По определению имеем, что $\text{Cl}[\text{Cl } \mathcal{T}] = \text{Cl } \mathcal{T}$. Более того, график отображения $\text{Cl } \mathcal{T}$ локально компактен. Будем говорить, что отображение \mathcal{T} полунепрерывно сверху, если $\text{Cl } \mathcal{T} = \mathcal{T}$.

Обозначим через \mathcal{T}° объединение всех полунепрерывных сверху многозначных отображений из $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ в множество всех подмножеств \mathbb{R}^m , удовлетворяющих условиям (N1)–(N3). Положим

$$\mathcal{T}^* \triangleq \text{Cl}[\mathcal{T}^\circ].$$

Следствие 1. Для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $\mathcal{T}^*(t, x) = \mathcal{N}(t, x)$.

Условие (N1) связано с теорией антагонистических дифференциальных игр. Известны [7] условия, в том числе в инфинитезимальной форме, характеризующие функцию цены в антагонистической игре. Условие (N2) — краевое условие. Далее мы дадим ряд эквивалентных формулировок условия (N3), использующих понятие слабой инвариантности и ряд методов негладкого анализа.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ полунепрерывно сверху по включению. Тогда условие (N3) эквивалентно тому, что для всех $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $\varsigma \in \mathcal{T}(t_*, x_*)$ существуют $\theta > t_*$ и $y(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$ такие, что

$$\varsigma \in \mathcal{T}(t, y(t)), \quad t \in [t_*, \theta].$$

Эта теорема будет доказана в § 3.

Для того, чтобы сформулировать инфинитезимальную форму условия (N3), мы рассмотрим следующую производную, аналогичную производной по Адамару. Обозначим через dist следующее расстояние в \mathbb{R}^m :

$$\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t^1, x^1)] \triangleq \inf \{ |\zeta_1 - \varsigma_1| + \dots + |\zeta_m - \varsigma_m| : (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathcal{T}(t^1, x^1) \}.$$

$$D_H \mathcal{T}(t, x; \varsigma, w) \triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, w' \rightarrow w} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta w')]}{\delta}.$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ замкнуто. Тогда условие (N3) эквивалентно тому, что для всех $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$

$$\sup_{\varsigma \in \mathcal{T}(t_*, x_*)} \inf_{w \in \mathcal{F}(t_*, x_*)} D_H \mathcal{T}(t_*, x_*; \varsigma, w) = 0. \quad (2.2)$$

Теорема 2 также доказывается в § 3.

Отметим одно достаточное условие того, что функция $c = (c_1, \dots, c_m) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ доставляет равновесие по Нэшу. Ниже используется следующее обозначение для $i \in \overline{1, m}$:

$$H_i(t, x, s) \triangleq \max_{\mu \in \mathcal{R}(t; P_i)} \min_{\nu \in \mathcal{R}(t; Q_i)} \int_{P_i} \int_{Q_i} \langle s, f(t, x, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_m) \rangle \mu(t, du_i) \nu(t, d(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_m)).$$

Если $c = (c_1, \dots, c_m) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, то модуль-производной функции c по Адамару в позиции $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ вдоль направления $w \in \mathbb{R}^n$ будем называть величину

$$d_{\text{abs}} c(t, x; w) \triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, w' \rightarrow w} \frac{|c_1(t + \delta, x + \delta w') - c_1(t, x)| + \dots + |c_m(t + \delta, x + \delta w') - c_m(t, x)|}{\delta}.$$

Следствие 2. Пусть функция $c = (c_1, \dots, c_m) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна, $c_i(\vartheta_0, \cdot) = \sigma_i(\cdot)$, $i \in \overline{1, m}$, функции c_i являются верхним решением дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + H_i(t, x, \nabla c_i) = 0, \quad (2.3)$$

и для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$

$$\inf_{w \in \mathcal{F}(t, x)} d_{\text{abs}} c(t, x; w) = 0.$$

Тогда для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ набор чисел $(c_1(t, x), \dots, c_m(t, x))$ является некоторым значением игры по Нэшу.

Следствие 2 вытекает из определений модуль-производных и того, что ω_i является наименьшим верхним решением уравнения (2.3) [7].

Далее мы покажем, что сформулированный результат является обобщением метода систем уравнений типа Гамильтона–Якоби. При некоторых условиях этот метод доставляет решение в классе непрерывных стратегий [6].

Предложение 2. Пусть функция $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема, $\varphi_i(\vartheta_0, \cdot) = \sigma_i(\cdot)$, $i = \overline{1, m}$. Пусть также функция φ удовлетворяет следующему условию: для каждой позиции $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ существуют $u_i^* \in P_i$, $i = \overline{1, m}$ такие, что

$$\begin{aligned} \max_{u_i \in P_i} \langle \nabla \varphi_i(t, x), f(t, x, u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_m^*) \rangle = \\ = \langle \nabla \varphi_i(t, x), f(t, x, u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*, u_{i+1}^*, \dots, u_m^*) \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial t} + \langle \nabla \varphi_i(t, x), f(t, x, u_1^*, \dots, u_m^*) \rangle = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.5)$$

Тогда функция φ удовлетворяет условиям следствия 2.

Данное предложение доказывается в § 3.

Если управления u_i^* , $i = \overline{1, m}$ можно выбрать однозначно для каждой позиции $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ и каждого набора направлений $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}^n$, то определены гамильтонианы \mathcal{H}_i по формуле

$$\mathcal{H}_i(t, x, s_1, \dots, s_m) \triangleq \langle s_i, f(t, x, u_1^*, \dots, u_m^*) \rangle, \quad i = 1, 2.$$

Тогда условие (2.5) эквивалентно тому, что функция $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ является решением системы дифференциальных уравнений типа Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \mathcal{H}_i(t, x, \nabla \varphi_1, \dots, \nabla \varphi_m) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

§ 3. Свойства значения дифференциальной игры по Нэшу

Доказательство следствия 1. Из [3, Теорема 6.2] следует, что само отображение \mathcal{N} удовлетворяет условиям (N1)–(N3). Таким образом, $\mathcal{N}(t_*, x) \subset \mathcal{T}^*(t, x)$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

Теперь докажем, что $\text{Cl}[\mathcal{N}] = \mathcal{N}$. В самом деле, пусть $\varsigma \in \text{Cl}[\mathcal{N}](t_*, x_*)$. Тогда существует последовательность $\{(t^k, x^k, \varsigma^k)\}_{k=1}^\infty$ такая, что $\varsigma^k = (\varsigma_1^k, \dots, \varsigma_m^k) \in \mathcal{N}(t^k, x^k)$, $(t^k, x^k, \varsigma^k) \rightarrow (t_*, x_*, \varsigma)$, $k \rightarrow \infty$. Для каждого k существует $z^k(\cdot) \in \text{Sol}(t^k, x^k)$ со свойством:

$$\varsigma_i^k = \sigma_i(z^k(\vartheta_0)) \geq \omega_i(t, z^k(t)), \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (3.1)$$

Из последовательности $\{z^k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ можно выделить сходящуюся. Без ограничения общности можно считать, что сама последовательность $\{z^k(\cdot)\}$ сходится к некоторому движению $z(\cdot)$. Заметим, что $z(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$. Переходя к пределу в (3.1), получаем, что

$$\varsigma_i = \sigma_i(z(\vartheta_0)) \leq \omega_i(z(\vartheta_0)), \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Рассмотрим многозначное отображение \mathcal{T}^\diamond , определяемое по правилу:

$$\mathcal{T}^\diamond(t, x) = \begin{cases} \{\varsigma\}, & t \in [t_*, \vartheta_0], \quad x = z(t), \\ \emptyset, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу предложения 1 имеем, что $\mathcal{T}^\diamond(t, x) \subset \mathcal{N}(t, x)$. Следовательно, $\varsigma \in \mathcal{N}(t_*, x_*)$.

Также из предложения 1 следует, что $\mathcal{T}^\diamond(t, x) \subset \mathcal{N}(t, x)$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Имеем, что для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{N}(t, x) \subset \mathcal{T}^*(t, x) = \text{Cl}[\mathcal{T}^\diamond](t, x) \subset \text{Cl}[\mathcal{N}](t, x) = \mathcal{N}(t, x).$$

Отсюда получаем заключение следствия 1. \square

Доказательство теоремы 1. Если условие (N3) выполнено, то в теореме 1 можно выбрать $\theta = \vartheta_0$.

Пусть теперь для всех (t_*, x_*) , $\varsigma \in \mathcal{T}(t_*, x_*)$ существуют такие θ и $y(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$, что

$$\varsigma \in \mathcal{T}(t, y(t)), \quad t \in [t_*, \theta]. \quad (3.2)$$

Пусть Θ — множество тех моментов θ , для которых (3.2) выполнено при некотором $y(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$. Обозначим через $\tau \triangleq \sup \Theta$. Покажем, что $\tau \in \Theta$. В самом деле, пусть $\theta_k \in \Theta$, $\theta_k \rightarrow \tau$, $k \rightarrow \infty$. Можно считать, что $\theta_k < \theta_{k+1} \leq \tau$. Для каждого k (3.2) верно при $\theta = \theta_k$, $y(\cdot) = y_k(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$. В силу компактности пучка решений можно считать, что $y_k(\cdot) \rightarrow y^*(\cdot)$, $k \rightarrow \infty$, здесь $y^*(\cdot)$ — некоторый элемент $\text{Sol}(t_*, x_*)$. В силу замкнутости отображения \mathcal{T} имеем, что $\varsigma \in \mathcal{T}(\theta_k, y^*(\theta_k))$. Та же замкнутость дает, что $\varsigma \in \mathcal{T}(\tau, y^*(\tau))$. Обозначим $x^* = y^*(\tau)$.

Покажем, что $\tau = \vartheta_0$. Если $\tau < \vartheta_0$, то по условию существуют движение $\hat{y}(\cdot) \in \text{Sol}(\tau, x^*)$ и момент $\theta' > \tau$ такие, что $\varsigma \in \mathcal{T}(t, \hat{y}(t))$, $t \in [\tau, \theta']$. Введем в рассмотрение движение

$$\tilde{y}(t) \triangleq \begin{cases} y^*(t), & t \in [t_*, \tau], \\ \hat{y}(t), & t \in [\tau, \theta']. \end{cases}$$

Из определения θ' следует, что условие (3.2) верно при $\theta = \theta'$, $y(\cdot) = \tilde{y}(\cdot)$. Таким образом, $\theta' \in \Theta$, что противоречит выбору τ . Следовательно, $\tau = \vartheta_0$ и условие (N3) выполнено. \square

Доказательство теоремы 2. Заметим, что условие, сформулированное в теореме 1, может быть переформулировано следующим образом: график \mathcal{T} — множество

$$\text{gr } \mathcal{T} \triangleq \{(t, x, \varsigma) : (t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n, \varsigma \in \mathcal{T}\}$$

— слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varsigma}_1 \\ \vdots \\ \dot{\varsigma}_m \end{pmatrix} \in \widehat{\mathcal{F}}(t, x) \triangleq \text{co} \left\{ \begin{pmatrix} f(t, x, u, v) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : u \in P, v \in Q \right\}.$$

Условие слабой инвариантности графика \mathcal{T} относительно дифференциального включения $\widehat{\mathcal{F}}$ формулируется (см. [7, 8]) следующим образом:

$$D_t(\text{gr } \mathcal{T})(t, x, \varsigma_1, \dots, \varsigma_m) \cap \widehat{\mathcal{F}}(t, x) \neq \emptyset \quad (3.3)$$

для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $\varsigma \in \mathcal{T}(t, x)$. Здесь D_t обозначает производную многозначного отображения по времени: если $\mathcal{G} \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^{n+m}$, $\mathcal{G}[t]$ — сечение множества по времени

$$\mathcal{G}[t] \triangleq \{w \in \mathbb{R}^m : (t, w) \in \mathcal{G}\},$$

а символ d обозначает евклидово расстояние от точки до множества, то

$$(D_t \mathcal{G})(t, y) \triangleq \left\{ h \in \mathbb{R}^{n+m} : \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{d(y + \delta h; \mathcal{G}[t + \delta])}{\delta} = 0 \right\}.$$

Покажем, что условия (2.2) и (3.3) эквивалентны.

Заметим, что условие (2.2) эквивалентно тому, что для каждой пары $\varsigma \in \mathcal{T}(t, x)$

$$\inf_{w \in \mathcal{F}(t, x)} \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta} = 0.$$

Нижняя грань по w в формуле

$$\inf_{w \in \mathcal{F}(t, x)} \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta}$$

достигается для каждого элемента $\varsigma \in \mathcal{T}(t, x)$. В самом деле, пусть $\{w^r\}_{r=1}^\infty$ — минимизирующая последовательность. В силу компактности $\mathcal{F}(t, x)$ можно считать, что $w^r \rightarrow w^*$, $r \rightarrow \infty$, $w^* \in \mathcal{F}(t, x)$. Покажем, что

$$\begin{aligned} \tilde{b} &\triangleq \inf_{w \in \mathcal{F}(t, x)} \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta} \\ &= \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w^* + \gamma))]}{\delta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В самом деле, для каждого $r \in \mathbb{N}$ существуют последовательности $\{\delta^{r,k}\}_{k=1}^\infty$, $\{\gamma^{r,k}\}_{k=1}^\infty$ такие, что $\delta^{r,k}, \|\gamma^{r,k}\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ и

$$b^r \triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, t + \delta(w^r + \gamma))]}{\delta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta^{r,k}, t + \delta^{r,k}(w^r + \gamma^{r,k}))]}{\delta^{r,k}}.$$

Пусть $\hat{k}(r)$ — такой номер, что

$$\delta^{r, \hat{k}(r)}, \|\gamma^{r, \hat{k}(r)}\|, \left| \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta^{r, \hat{k}(r)}, t + \delta^{r, \hat{k}(r)}(w^r + \gamma^{r, \hat{k}(r)}))]}{\delta^{r, \hat{k}(r)}} - b^r \right| < 2^{-r}.$$

Положим $\hat{\delta}^r \triangleq \delta^{r, \hat{k}(r)}$, $\hat{\gamma}^r \triangleq \gamma^{r, \hat{k}(r)} + w^r - w^*$. Заметим, что $\hat{\delta}^r, \|\hat{\gamma}^r\| \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$.

Имеем, что

$$\begin{aligned} &\inf_{w \in \mathcal{F}(t, x)} \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta} \\ &\leq \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w^* + \gamma))]}{\delta} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \hat{\delta}^r, x + \hat{\delta}^r(w^* + \hat{\gamma}^r))]}{\hat{\delta}^r}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \hat{\delta}^r, x + \hat{\delta}^r(w^* + \hat{\gamma}^r))]}{\hat{\delta}^r} \\ &= \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta^{r, \hat{k}(r)}, x + \delta^{r, \hat{k}(r)}(w^* + \gamma^{r, \hat{k}(r)} + w^r - w^*))]}{\delta^{r, \hat{k}(r)}} \\ &= \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta^{r, \hat{k}(r)}, x + \delta^{r, \hat{k}(r)}(w^k + \gamma^{r, \hat{k}(r)}))]}{\delta^{r, \hat{k}(r)}} \leq b^r + 2^{-r} \rightarrow \tilde{b}, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Имеем, что в (3.5) правая и левая части равны; это означает, что (3.4) верно.

Таким образом, условие (2.2) эквивалентно тому, что для всех $\varsigma \in \mathcal{T}(t, x)$ существует некоторое $w \in \mathcal{F}(t, x)$ со свойством

$$\begin{aligned} &\liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta} \\ &= \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \inf \left\{ \frac{|\zeta_1 - s_1| + \dots + |\zeta_m - s_m|}{\delta} : (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma)) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Теперь докажем, что это условие эквивалентно условию (3.3).

Предположим вначале, что выполнено условие (3.3). Это означает, что существуют последовательности $\{\delta^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, $\{\gamma^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$, $\{\varepsilon_1^k\}_{k=1}^\infty, \dots, \{\varepsilon_m^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ такие, что

- $\delta^k, \|\gamma^k\|, \varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_m^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$;
- $(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k), s_1 + \delta^k \varepsilon_1^k, \dots, s_m + \delta^k \varepsilon_m^k) \in \text{gr } \mathcal{T}$.

Второе условие можно переформулировать в виде

$$(\varsigma_1 + \delta^k \varepsilon_1^k, \dots, \varsigma_m + \delta^k \varepsilon_m^k) \in \mathcal{T}(t + \delta^k, t + \delta^k(w + \gamma^k)).$$

Таким образом,

$$\inf \left\{ \frac{|\zeta_1 - \varsigma_1| + \dots + |\zeta_m - \varsigma_m|}{\delta^k} : (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathcal{T}(t + \delta^k, x + \delta(w + \gamma^k)) \right\} = \varepsilon_1^k + \dots + \varepsilon_m^k.$$

В силу выбора последовательностей $\{\varepsilon_1^k\}, \dots, \{\varepsilon_m^k\}$ получаем, что (3.6) выполняется.

Пусть теперь верно (3.6), докажем, что выполняется (3.3). В самом деле, пусть $\{\delta^k\}_{k=1}^\infty, \{\gamma^k\}_{k=1}^\infty$ — минимизирующая последовательность. В силу компактности образов $\mathcal{T}(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k))$ для каждого k найдутся такие $\varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_m^k$, что

$$(\varsigma_1 + \delta^k \varepsilon_1^k, \dots, \varsigma_m + \delta^k \varepsilon_m^k) \in \mathcal{T}(t, x + \delta^k(w + \gamma^k)).$$

Из (3.6) следует, что $\varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_m^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Оценим $d((w + \delta^k w, \varsigma_1, \dots, \varsigma_m), \text{gr } \mathcal{T}[t + \delta^k])$.

В самом деле,

$$(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k), \varsigma_1 + \delta^k \varepsilon_1^k, \dots, \varsigma_m + \delta^k \varepsilon_m^k) \in \text{gr } \mathcal{T}.$$

Отсюда следует, что

$$d((w + \delta^k w, \varsigma_1, \dots, \varsigma_m), \text{gr } \mathcal{T}[t + \delta^k]) \leq \delta^k \sqrt{\|\gamma^k\|^2 + (\varepsilon_1^k)^2 + \dots + (\varepsilon_m^k)^2}.$$

Сходимость $\delta^k, \|\gamma^k\|, \varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_m^k \rightarrow 0$ дает включение

$$(w, 0, \dots, 0) \in D_t(\text{gr } \mathcal{T})(t, x, \varsigma_1, \dots, \varsigma_m).$$

В силу того, что $\widehat{\mathcal{F}}(t, x) = \mathcal{F} \times \{(0, \dots, 0)\}$, заключаем, что (3.3) верно. \square

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 2. Из (2.4) и представления мер-управлений как выпуклых комбинаций следует, что

$$\begin{aligned} \langle \nabla \varphi_1(t, x), f(t, x, u_1^*, \dots, u_m^*) \rangle &\geq \max_{\mu \in \mathcal{R}(t; P_i)} \min_{\nu \in \mathcal{R}(t; Q_i)} \\ &\int_{P_i} \int_{Q_i} \langle s, f(t, x, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_m) \rangle \mu(t, du_i) \nu(t, d(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_m)) \\ &= H_1(t, x, \nabla \varphi_1(t, x)). \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\langle \nabla \varphi_i(t, x), f(t, x, u_1^*, \dots, u_m^*) \rangle \geq H_i(t, x, \nabla \varphi_i(t, x)), \quad i = \overline{2, m}.$$

Отсюда и из условия (2.5) заключаем, что

$$\frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial t} + H_i(t, x, \nabla \varphi_i(t, x)) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Поскольку функция φ_i дифференцируема, то ее субдифференциал в позиции (t, x) равен $\{\partial \varphi_1(t, x)/\partial t, \nabla \varphi_1(t, x)\}$. Следовательно, функция φ_1 является верхним решением уравнения (2.3) при $i = 1$ (см. [7, условие (U4)]). Аналогично, функция φ_2 является верхним решением уравнения (2.3) при $i = 2$.

Покажем, что $d_{\text{abs}}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)(t, x; w) = 0$ для некоторого $w \in \mathcal{F}(t, x)$. А именно, для $w = f(t, x, u_1^*, \dots, u_m^*)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} &d_{\text{abs}}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)(t, x; w) \\ &= \liminf_{\delta \downarrow 0, \|\gamma\| \rightarrow 0} \frac{|\varphi_1(t + \delta, x + \delta(w + \gamma)) - \varphi_1(t, x)| + \dots + |\varphi_m(t + \delta, x + \delta(w + \gamma)) - \varphi_m(t, x)|}{\delta}. \end{aligned}$$

Пусть $\{\delta^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, $\{\gamma^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ — минимизирующие последовательности. Тогда

$$\begin{aligned} & d_{abs}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)(t, x; w) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varphi_1(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k)) - \varphi_1(t, x)| + \dots + |\varphi_m(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k)) - \varphi_m(t, x)|}{\delta^k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta^k} \left[\left| \frac{\partial \varphi_1(t, x)}{\partial t} \delta^k + \langle \nabla \varphi_1(t, x), \delta^k(w + \gamma^k) \rangle + o(\delta^k) \right| + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial \varphi_m(t, x)}{\partial t} \delta^k + \langle \nabla \varphi_m(t, x), \delta^k(w + \gamma^k) \rangle + o(\delta^k) \right| \right] \\ &= \left| \frac{\partial \varphi_1(t, x)}{\partial t} + \langle \nabla \varphi_1(t, x), w \rangle \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2(t, x)}{\partial t} + \dots + \langle \nabla \varphi_m(t, x), w \rangle \right|. \end{aligned}$$

В силу выбора $w = f(t, x, u_1^*, \dots, u_m^*)$ и условия (2.5) имеем, что оба модуля равны 0. Таким образом, $d_{abs}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)(t, x; w) = 0$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
2. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985. — 518 с.
3. Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. — Екатеринбург: Наука. Уральское отделение, 1993. — 185 с.
4. Кононенко А. Ф., Чистяков Ю. Е. О равновесных позиционных стратегиях в дифференциальных играх многих лиц // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 299, №5. — С. 1053–1056.
5. Чистяков С. В. О бескоалиционных дифференциальных играх // Доклады АН СССР. — 1981. — Т. 259, №5. — С. 1052–1055.
6. Basar T., Olsder G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory. London/New York: Academic Press, 1995. — 535 p.
7. Субботин А. И. Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Перспективы динамической оптимизации. — Ижевск: РХД, 2003. — 336 с.
8. Guseinov H. G., Subbotin A. I., Ushakov V. N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Probl. Contr. Inform. Theory. — 1985. — Vol. 14, № 3. — P. 155–167.

Поступила в редакцию 09.12.10

Yu. V. Averboukh

Infinitesimal characterization of Nash equilibrium for differential games with many players

We study Nash equilibrium for a differential game with many players. The condition on a multivalued map under which any value of this map is a set of Nash equilibrium payoffs is obtained. This condition is written in infinitesimal form. The sufficient condition for the given complex of continuous functions to provide a Nash equilibrium is obtained. This condition is a generalization of the method based on system of Hamilton–Jacobi equations.

Keywords: Nash equilibrium, differential games, generalized derivatives.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 91A10, 49L25

Авербух Юрий Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН. 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: ayv@imm.uran.ru