

3. Кузнецов Ю. А., Шашков В. В. // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький, 1979. Вып. 3. С. 163—169.
4. Belleni-Morante A. // Nucl. Sci. Eng. 1976. Vol. 59, N 1. P. 65—78.
5. Рао С. V. // Appl. Anal. 1979. Vol. 9, N 2. P. 107—119.
6. Макин Р. С. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 3. С. 511—520.
7. Макин Р. С. // Об одной нелинейной многогрупповой диффузионной системе уравнений динамики реакторов. М., 1985. (Препринт / ЦНИИАтоминформ: 29(675)).
8. Макин Р. С. О бифуркации одной нелинейной системы уравнений динамики реакторов с распределительными параметрами. Димитровград, 1984. (Препринт/НИИАР: 27 (639)).
9. Рао С. V. // Pacific J. Math. 1979. Vol. 84, N 1. P. 191—197.
10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
11. Кузнецов Ю. А., Шашков В. В. // Прикл. задачи теории динамики систем. Горький, 1981. Вып. 4. С. 31—35.
12. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Соболевский П. Е. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 19—22.
13. Якубов С. Я. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1970. Т. 23. С. 37—60.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
15. Новиков В. М., Шихов С. Б. Теория параметрического воздействия на перенос нейтронов. М., 1982.
16. Макин Р. С. // Функци. анализ и его приложения. 1987. Т. 20, вып. 1. С. 80—81.
17. Далекций Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
18. Стумбур Э. А. Применение теории возмущений в физике ядерных реакторов. М., 1975.

г. Димитровград

Поступила в редакцию  
27 июня 1990 г.

УДК 517.95

В. Н. МАСЛЕННИКОВА, И. М. ПЕТУНИН

### О РАВНОМЕРНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ $t \rightarrow \infty$ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Изучаются асимптотические по времени свойства решения системы уравнений, описывающих процесс распространения линейных акустических и гравитационных волн в сжимаемой среде с учетом кориолисовых сил (а также волн в атмосфере и океане с учетом вращения земли).

В линейной постановке рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2[\vec{\Omega}, \vec{u}] + \nabla q &= \vec{F}(x), \\ \alpha^2 \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\vec{u}(x, t) = (u_1, u_2, u_3)$  — поле скоростей,  $\alpha^2 = 1/C^2$ ,  $C$  — скорость звука в среде,

$$\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega), \quad \vec{F}(x) = \nabla \frac{|[\vec{\Omega}, \vec{r}]|^2}{2} = (F_1, F_2, F_3) = \Omega^2(x_1, x_2, 0).$$

Система решается с начальными условиями

$$\vec{u}(x, t)|_{t=0} = \vec{v}^0(x), \quad q(x, t)|_{t=0} = \mathcal{P}^0(x). \quad (2)$$

Решение неоднородной системы (1) с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(x, t) &= \frac{\Omega}{2} x_1 \sin 2\Omega t + \frac{\Omega x_2}{2} (1 - \cos 2\Omega t), \\ \tilde{u}_2(x, t) &= -\frac{\Omega}{2} x_1 (1 - \cos 2\Omega t) + \frac{\Omega}{2} x_2 \sin 2\Omega t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3(x, t) &= 0, \\ \tilde{q}(x, t) &= -\frac{2}{2\alpha^2} (1 - \cos 2\Omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

которое получается преобразованием Фурье в  $S'(\mathbb{R}^3)$  системы (1).

Заметим, что решение задачи Коши (1), (2) единственно [1] в классе функций без ограничения роста на бесконечности ввиду гиперболичности системы (1).

После замены  $\vec{v} = \vec{u} - \tilde{u}(x, t)$ ,  $\mathcal{P} = q - \tilde{q}(x, t)$  получим систему (1) с нулевой правой частью, при этом начальные условия (2) не изменятся, так как (3) удовлетворяют нулевым начальным условиям.

Обозначая в дальнейшем вектор  $2\vec{\Omega}$  через  $\vec{\omega}$ , будем изучать задачу Коши для системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \vec{\omega}] + \text{grad } \mathcal{P} &= 0, \\ \alpha^2 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \text{div } \vec{v}(x, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

с начальными условиями (2) для вектора  $\vec{v}(x, t)$  и функции  $\mathcal{P}(x, t)$ .

Решение задачи (4), (2) было построено в работах [2, 3]. Если ввести обозначения для четырехмерных векторов:

$$\begin{aligned} \vec{U}(x, t) &= (\vec{v}, \mathcal{P}); \quad \vec{U}^0(x) = (\vec{v}^0, \mathcal{P}^0), \\ \vec{U}_0^0(x) &= (-\text{rot } \vec{v}^0 + \vec{\omega} \alpha^2 \mathcal{P}^0, v_3^0), \\ \vec{U}_1^0(x) &= \left( -\Delta \vec{v}^0 + \nabla \text{div } \vec{v}^0 - \alpha^2 [\nabla \mathcal{P}^0, \vec{\omega}] + \alpha^2 \vec{\omega} v_3^0, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial v_1^0}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2^0}{\partial x_1} + \alpha^2 \mathcal{P}^0 \right), \\ \vec{U}_2^0(x) &= \alpha^2 \left( [\vec{v}^0, \vec{\omega}] - \nabla \mathcal{P}^0, -\frac{1}{\alpha^2} \text{div } \vec{v}^0 \right), \\ \vec{U}_3^0(x) &= \alpha^2 (\vec{v}^0, \mathcal{P}^0), \end{aligned} \quad (5)$$

то полученное в [3] решение записывается в виде

$$\begin{aligned} \vec{U}(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{r=t/\alpha} \left\{ \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha^2 \rho^2}{2r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \right) \vec{U}^0(x-y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha r} \vec{U}_2^0(x-y) \right\} ds_y + \frac{1}{4\pi} \int_{r \leq t/\alpha} \left\{ \frac{\partial G(y, t)}{\partial y_3} \vec{U}_0^0(x-y) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^k G(y, t)}{\partial t^k} \vec{U}_k^0(x-y) \right\} dy, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$G(y, t) = \frac{1}{\omega \rho} \int_0^{\omega \rho \sqrt{t^2 - \alpha^2 \rho^2} / r} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2 \omega^2 \rho^2}} J_0(\xi) d\xi,$$

$\rho^2 = y_1^2 + y_2^2$ ;  $r^2 = \rho^2 + y_3^2$ ;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль,  $J_0(\xi)$  — функция Бесселя нулевого порядка.

Асимптотическое поведение решения (6) при  $t \rightarrow \infty$  впервые изучено в работе [4]. Там, в частности, была доказана

**Теорема 1.** Если начальные данные  $(\vec{v}^0(x), \mathcal{P}^0(x)) \in C^0_\infty(\mathbb{R}^3)$ , то решение задачи (4), (2) убывает по  $t$  при  $t \rightarrow \infty$  как  $O(1/t)$  равномерно по  $x$ , принадлежащих любому компакту  $K \subset \mathbb{R}^3$ .

В [4] было получено и асимптотическое разложение решения по малому параметру  $1/t$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Затем в кандидатской диссертации Пал Прадипа Кумара, выполненной под руководством В. Н. Масленниковой, была получена

**Теорема 2.** Если  $\vec{v}^0(x) \in W_1^6(\mathbb{R}^3)$ ,  $\mathcal{P}^0(x) \in W_1^5(\mathbb{R}^3)$ , то для всех  $x \in \mathbb{R}^3$  при  $t \geq t_0 > 0$  имеют место оценки

$$|\vec{v}(x, t)| \leq \frac{C(1+|x|)}{t}; \quad |\mathcal{P}(x, t)| \leq \frac{C(1+|x|)}{t},$$

где  $C$  не зависит от  $x$  и  $t$ .

Такого же типа оценки были получены и для производных

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}.$$

Таким образом, вопрос о равномерной по  $x \in \mathbb{R}^3$  стабилизации к нулю решения задачи (4), (2) при  $t \rightarrow \infty$  оставался открытым.

Целью настоящей работы является исследование этого вопроса. Имеет место

**Теорема 3.** Если  $\bar{U}^0(x) \in W_1^3(\mathbb{R}^3) \cap W_2^2(\mathbb{R}^3)$ , то решение задачи Коши (4), (2) непрерывно по  $x$  и  $t$  и при  $t \geq t_0 > 0$  равномерно по  $x \in \mathbb{R}^3$  удовлетворяет оценке

$$|\bar{U}(x, t)| \leq \frac{C}{t} \|\bar{U}^0(x)\|_{W_1^3(\mathbb{R}^3)}, \quad (7)$$

где  $C$  — абсолютная постоянная.

**Замечание.** Если  $\alpha = 0$  (т.е. для системы Соболева), такого типа равномерные по  $x \in \mathbb{R}^3$  оценки (и асимптотическое разложение решения по параметру  $1/t$ ) были получены в [5]. Для доказательства теоремы 3 докажем ряд лемм об убывании при  $t \rightarrow \infty$  сверток, входящих в (6).

Для этого выпишем явно нужные нам производные от фундаментального решения  $G(y, t)$ , для сокращения записи положив  $\omega = 1$ . Отметим, что случай  $\omega = 0$  (при отсутствии кориолисовых сил) рассматривался в работах [3, 4].

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(y, t)}{\partial y_3} &= -\frac{y_3 t}{r^3} J_0, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{r} J_0, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= -\frac{\rho t}{r^2 \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} J_1, \\ \frac{\partial^3 G}{\partial t^3} &= -\frac{\rho}{r^2 \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} J_1 + \frac{t^2 \rho^2}{r^3 (t^2 - \alpha^2 r^2)} J_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где все функции Бесселя имеют сложный аргумент  $\rho \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} / r$ .

Для равномерных по  $x \in \mathbb{R}^3$  оценок сверток, входящих в (6), с использованием явных выражений (8) для фундаментальной матрицы решений, которую будем записывать в сферических координатах, нам удобно доказать ряд лемм.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{Q}_k(x, r, t, \vec{f}) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \{\delta_{k,0} t J_0(t \sin \theta) \cos \theta + \\ &+ (1 - \delta_{k,0}) r J_{k-1}(t \sin \theta) \sin^{k-1} \theta\} \sin \theta \vec{f}(x, r, \varphi, \theta) d\theta, \quad 0 \leq k \leq 3; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Phi_k(x, r, \vec{f}) = r \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_3^k} \vec{f} \left( x, r, \varphi, \frac{\pi}{2} \right) \right| d\varphi + \right.$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_3^k} \bar{f}(x, z, 0, \theta) \right| d\theta + r \sum_{|z|=k+1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |D_x^\alpha \bar{f}(x, r, \varphi, \theta)| \sin \theta d\theta, \quad k=0, 1, \quad (10)$$

где  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера и в полярных координатах  $\bar{f}(x, r, \varphi, \theta) = \bar{f}(x_1 - r \cos \varphi \sin \theta, x_2 - r \sin \varphi \sin \theta, x_3 - r \cos \theta)$ . В доказываемых ниже леммах 1 и 2, вообще говоря,  $\bar{f}$  является произвольной вектор-функцией, удовлетворяющей некоторым условиям гладкости. В дальнейшем при использовании лемм 1, 2 в доказательстве теоремы 3 в качестве  $\bar{f}$  в зависимости от индекса  $k$  будут браться вектор-функции  $\bar{V}_k^0$ , определенные в (5). Методом, который дан в работе [5], доказывается

**Лемма 1.** Если  $\bar{f} \in W_1^2(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\mathbb{R}^3)$ , то равномерно по  $x \in \mathbb{R}^3$  при  $t \geq t_0 > 0$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\bar{Q}_k(x, r, t, \bar{f})| &\leq \frac{C}{t} \Phi_0(x, r, \bar{f}), \quad k=1, 2, 3, \\ |\bar{Q}_0(x, r, t, \bar{f})| &\leq \frac{C}{t} \Phi_1(x, r, \bar{f}), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $C$  — абсолютная постоянная.

**Доказательство.** Утверждение леммы при  $0 \leq k \leq 2$  содержится в работе [5] (ср. члены  $\bar{Q}_k$ ,  $0 \leq k \leq 2$ , с членами  $\bar{Q}_1(x, t)$ ,  $\bar{Q}_2(x, t)$  и  $\bar{q}_3(x, t)$  из § 1 работы [5]). Поэтому докажем лемму в случае  $k=3$ , т. е. для  $\bar{Q}_3(x, r, t, \bar{f})$ . Обозначим

$$\bar{I}(x, r, t, \varphi, \bar{f}) = \int_0^\pi J_2(t \sin \theta) \sin^3 \theta \bar{f}(x, r, \varphi, \theta) d\theta. \quad (12)$$

Используя известные интегральные представления функции Бесселя  $J_2(z)$ :

$$J_2(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha \cos(z \sin \alpha) d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 \alpha) \cos(z \sin \alpha) d\alpha,$$

сделав замены  $\alpha \rightarrow z: \sin \theta \sin \alpha = z$ ,  $\theta \rightarrow \xi: \cos \theta = \xi$  и  $\xi \rightarrow \mu: \xi = \sqrt{1-z^2} \mu$ , поменяв при этом порядок интегрирования относительно  $z$  и  $\xi$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{I}(x, r, t, \varphi, \bar{f}) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 \alpha) \cos(t \sin \theta \sin \alpha) d\alpha \right] \times \\ &\times \sin^3 \theta \bar{f}(x, r, \varphi, \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ \int_0^{\sin \theta} \left( 1 - \frac{2z^2}{\sin^2 \theta} \right) \times \right. \\ &\times \cos(tz) \frac{dz}{\sqrt{\sin^2 \theta - z^2}} \left. \right] \sin^3 \theta \bar{f}(x, r, \varphi, \theta) d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \left( 1 - \frac{2z^2}{1-\xi^2} \right) \cos(tz) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2-\xi^2}} \right] \times \\ &\times (1-\xi^2) \bar{f}(x, r, \varphi, \arccos \xi) d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \frac{1-\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2-z^2}} \left( 1 - \frac{2z^2}{1-\xi^2} \right) \bar{f}(x, r, \varphi, \arccos \xi) d\xi \right] \times \\ &\times \cos(tz) dz = -\frac{2}{\pi} \int_0^1 \left[ \int_{-1}^1 \bar{f}(x_1 - r \cos \varphi \sqrt{1-\mu^2(1-z^2)}, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_2 - r \sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2(1 - z^2)}, \quad x_3 - r\mu \sqrt{1 - z^2} \left. \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \right] z^2 \cos(zt) dz + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left[ \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \mu^2} \bar{f}(x_1 - r \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2(1 - z^2)}, \right. \\
& \left. x_2 - r \sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2(1 - z^2)}, \quad x_3 - r\mu \sqrt{1 - z^2} \right) d\mu (1 - z^2) \cos(tz) dz \equiv \\
& \equiv \sum_{k=1}^2 \bar{I}_k(x, r, t, \varphi, \bar{f}). \tag{13}
\end{aligned}$$

Теперь проинтегрируем по частям по  $z$  в обоих интегралах  $\bar{I}_k$ . После такого интегрирования по частям выделяем множитель  $1/t$ , а оставшиеся двойные интегралы получаются сходящимися. Так как каждый из  $\bar{I}_k$ ,  $k=1, 2$ , исследуется одинаково, то рассмотрим только  $\bar{I}_1$ . Получаем

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1(x, r, t, \varphi, \bar{f}) = & - \frac{2}{t} \sin(tz) \bar{f}(x_1 - r \cos \varphi, x_2 - r \sin \varphi, x_3) + \\
& + \sum_{k=1}^4 \bar{I}_1^*(x, r, t, \varphi, \bar{f}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1^* = & - \sin\left(\frac{\pi k}{2} - \varphi\right) \frac{2r}{\pi t} \int_0^1 z^2 \sin(tz) \left( \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} \times \right. \\
& \times \left. \frac{\mu^2 z}{\sqrt{1 - \mu^2(1 - z^2)}} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \right) dz, \quad k=1, 2; \\
\bar{I}_1^3 = & \frac{2r}{\pi t} \int_0^1 z^2 \sin(tz) \left( \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_3} \frac{\mu z}{\sqrt{1 - z^2}} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \right) dz, \tag{14} \\
\bar{I}_1^4 = & \frac{4}{\pi t} \int_0^1 z \sin(tz) \left( \int_{-1}^1 \bar{f} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \right) dz,
\end{aligned}$$

опущенные аргументы у функций  $\bar{f}$  и ее производных те же, что и в (13).

Оценим по модулю каждый из членов  $\bar{I}_1^*$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , в формуле (14).

С помощью замены  $\mu \rightarrow \xi$ :  $\xi = \mu \sqrt{1 - z^2}$  и перемены порядка интегрирования получаем для  $k=1, 2$

$$\begin{aligned}
|\bar{I}_1^k(x, r, t, \varphi, \bar{f})| \leq & \frac{2r}{\pi t} \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} (x_1 - r \cos \varphi \sqrt{1 - \xi^2}, \right. \\
& \left. x_2 - r \sin \varphi \sqrt{1 - \xi^2}, \quad x_3 - r\xi \right) \left| \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \int_0^{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{z dz}{\sqrt{1 - \xi^2 - z^2}} \right|,
\end{aligned}$$

или после замены  $\xi = \cos \theta$  и вычисления внутреннего интеграла окончательно имеем

$$\begin{aligned}
|\bar{I}_1^k(x, r, t, \varphi, \bar{f})| \leq & \frac{2r}{\pi t} \int_0^\pi \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} (x_1 - r \cos \varphi \sin \theta, \right. \\
& \left. x_2 - r \sin \varphi \sin \theta, \quad x_3 - r \cos \theta \right) \left| \sin \theta d\theta \right|, \quad k=1, 2. \tag{15}
\end{aligned}$$

Точно таким же путем получаем оценку

$$|\bar{I}_1^3(x, r, t, \varphi, \bar{f})| \leq \frac{2r}{t} \int_0^\pi \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_3} \right| \sin \theta d\theta. \tag{16}$$

Интеграл  $\bar{I}_1^*$  фактически оценен в работе [5, с. 55], поэтому для него, интегрируя по  $\varphi$ , сразу имеем

$$\left| \int_0^{2\pi} \bar{I}_1^*(x, r, t, \varphi, \bar{f}) d\varphi \right| \leq \frac{C}{rt^2} \Phi_0(x, r, \bar{f}), \quad (17)$$

где  $\Phi_0(x, r, \bar{f})$  определено в (10). Используя (15)–(17), окончательно имеем

$$\left| \int_0^{2\pi} \bar{I}_1(x, r, t, \varphi, \bar{f}) d\varphi \right| \leq \frac{C}{rt} \Phi_0(x, r, \bar{f}).$$

Аналогичную оценку получаем для  $\bar{I}_2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |Q_3(x, r, t, \bar{f})| &= \left| r \int_0^{2\pi} \bar{I}(x, r, t, \bar{f}) d\varphi \right| = \left| r \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^2 \bar{I}_k(x, r, t, \bar{f}) d\varphi \right| \leq \\ &\leq \frac{C}{t} \Phi_0(x, r, \bar{f}), \end{aligned}$$

где  $C$  — абсолютная постоянная. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** При выполнении условий леммы 1 справедливы неравенства

$$\int_0^\infty \Phi_k(x, r, \bar{f}) dr \leq C \|\bar{f}\|_{W^{k+1}(\mathbb{R}^3)}, \quad k=0,1,$$

равномерно по  $x \in \mathbb{R}^3$ , где  $C$  — абсолютная постоянная.

**Доказательство.** Используя явный вид функций  $\Phi_k$  в (10) и переходя от полярных и сферических координат к декартовым, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Phi_1(x, r, \bar{f}) dr &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left| \frac{\partial \bar{f}(x' - y', x_3)}{\partial x_3} \right| + \left| \frac{\partial \bar{f}(x_1 - y_2, x_2, x_3 - y_1)}{\partial x_3} \right| \right\} dy' + \\ &+ \sum_{|\alpha|=2} \int_{\mathbb{R}^3} |D_x^\alpha \bar{f}(x - y)| dy. \end{aligned}$$

Произведя сдвиг по переменным интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Phi_1(x, r, \bar{f}) dr &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x_3} \right| dx_1 dx_2 + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x_3} \right| dx_1 dx_3 + \sum_{|\alpha|=2} |D_x^\alpha \bar{f}(x)| dx. \end{aligned}$$

Используя теорему вложения  $W_1^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow L_1(\mathbb{R}^2)$ , получаем утверждение леммы при  $k=1$ . Для  $k=0$  доказательство аналогично. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 3.** Система (4) является симметрической гиперболической системой. Тогда при выполнении условий теоремы решение задачи (4), (2) единственно и принадлежит классу  $C(t \geq 0; W_2^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(t > 0; W_1^1(\mathbb{R}^3))$  (см., например, [6]). Отметим также, что для системы (4) оценки решения задачи Коши в  $W_p^1$ ,  $p \geq 1$ , и смешанных задач в  $W_2^1$  были получены в работах [3, 7].

Из (4), (2) следует равенство

$$\|\bar{v}(x, t)\|_{W_2^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \alpha^2 \|\mathcal{S}\|_{W_2^1(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\bar{v}^0(x)\|_{W_2^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \alpha^2 \|\mathcal{S}^0\|_{W_2^1(\mathbb{R}^3)}^2,$$

откуда вытекает оценка

$$|\bar{U}(x, t)| \leq C \|\bar{U}^0\|_{W_2^1(\mathbb{R}^3)}, \quad t \geq 0. \quad (18)$$

Пусть  $t \geq t_0 > 0$  и предположим, что  $\bar{U}^0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . В дальнейшем избавимся от этого ограничения.

Обозначим через  $\mathcal{K}_i(x, t)$  свертки по шару  $|x| \leq t/\alpha$  вектор-функций  $\bar{U}_i^0(x)$ ,  $0 \leq i \leq 3$ , с производными от фундаментального решения  $G(x, t)$ , задаваемыми формулами (6). В представлениях  $\mathcal{K}_i(x, t)$  перейдем к сферическим координатам. Для  $\mathcal{K}_0(x, t)$  с использованием (8) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{r \leq t/\alpha} \frac{\partial G(y, t)}{\partial y_3} \bar{U}_0^0(x-y) dy = \\ &= -\frac{t}{4\pi} \left( \int_0^{t/2\alpha} + \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta J_0(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \times \\ &\quad \times \bar{U}_0^0(x, r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta \equiv \sum_{n=1}^2 \mathcal{K}_{0n}(x, t). \end{aligned}$$

Используя введенные обозначения (9), (10) и леммы 1, 2, оценим  $\mathcal{K}_{01}$ . Получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_{01}(x, t)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{t/2\alpha} |Q_0(x, r, \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}, \bar{U}_0^0)| dr \leq \\ &\leq \frac{C}{4\pi} \int_0^{t/2\alpha} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} \Phi_1(x, r, \bar{U}_0^0) dr \leq \\ &\leq \frac{C}{2\sqrt{3}\pi t} \int_0^\infty \Phi_1(x, r, \bar{U}_0^0) dr \leq \frac{C_1}{t} \|\bar{U}_0^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)} \leq \\ &\leq \frac{C_1}{t} \|\bar{U}_0^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для оценки  $\mathcal{K}_{02}(x, t)$  применим неравенство  $|J_0(z)| \leq 1$ , перейдем к декартовым координатам и сделаем сдвиг по переменной интегрирования. Получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_{02}(x, t)| &\leq \frac{t}{4\pi} \int_{t/2\alpha}^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta}{(t/2\alpha)^2} |\bar{U}_0^0(x, r, \varphi, \theta)| dr d\varphi d\theta \leq \\ &\leq \frac{\alpha^2}{\pi t} \|\bar{U}_0^0(x-y)\|_{L_1(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\alpha^2}{\pi t} \|\bar{U}_0^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из оценок (19), (20) при  $t \geq t_0 > 0$  следует оценка

$$|\mathcal{K}_0(x, t)| \leq \frac{C}{t} \|\bar{U}_0^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)}. \quad (21)$$

Свертка  $\mathcal{K}_1(x, t)$ , имеющая вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{r \leq t/\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \bar{U}_1^0(x-y) dy = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin \theta J_0(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \bar{U}_1^0(x, r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta, \end{aligned}$$

оценивается таким же путем, как  $\mathcal{K}_0(x, t)$ , и для нее  $\forall t \geq t_0 > 0$  равномерно по  $x$  справедлива оценка

$$|\mathcal{K}_1(x, t)| \leq \frac{C}{t} \|\bar{U}_1^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)} \quad (22)$$

с абсолютной постоянной  $C$ .

Изучим свертку  $\mathcal{K}_2(x, t)$ , которая имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{r \leq t/\alpha} \frac{\partial^2 G(y, t)}{\partial t^2} \bar{U}_2^0(x-y) dy = \\ &= -\frac{t}{4\pi} \left( \int_0^{t/2\alpha} + \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \frac{r}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} \times \\ &\times J_1(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \bar{U}_2^0(x, r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta = \sum_{n=1}^2 \mathcal{K}_{2n}(x, t). \end{aligned}$$

Член  $\mathcal{K}_{21}(x, t)$  оценивается, как и ранее, при помощи лемм 1 и 2:

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_{21}(x, t)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{t/2\alpha} \frac{t}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} |Q_2(x, r, \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}, \bar{U}_2^0)| dr \leq \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \int_0^{t/2\alpha} |Q_2(x, r, \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}, \bar{U}_2^0)| dr \leq \\ &\leq \frac{C}{2\sqrt{3}\pi} \int_0^{t/2\alpha} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} \Phi_0(x, r, \bar{U}_2^0) dr \leq \frac{C_1}{t} \|\bar{U}_2^0\|_{W^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

В члене  $\mathcal{K}_{22}(x, t)$  проинтегрируем по частям по  $r$ . Получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{22}(x, t) &= -\frac{t}{4\pi} \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \frac{r}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} \times \\ &\times J_1(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \bar{U}_2^0(x, r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta = \\ &= -\frac{t}{4\pi\alpha^2} \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \bar{U}_2^0(x, r, \varphi, \theta) d\varphi d\theta d_r (J_0(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2})) = \\ &= -\frac{t}{4\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \bar{U}_2^0(x, t/\alpha, \varphi, \theta) d\varphi d\theta + \\ &+ \frac{t}{4\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta J_0\left(\frac{t\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right) \bar{U}_2^0(x, t/2\alpha, \varphi, \theta) d\varphi d\theta + \\ &+ \frac{t}{4\pi\alpha^2} \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta J_0(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial r} \bar{U}_2^0(x, r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta = \sum_{i=1}^3 \mathcal{K}_{22}^i(x, t). \end{aligned}$$

Член  $\mathcal{K}_{22}^3(x, t)$  оценивается так же, как член  $\mathcal{K}_{02}(x, t)$  (см. (20)). Оценим член  $\mathcal{K}_{22}^1(x, t)$ . Получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{22}^1(x, t) &= -\frac{t}{4\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \bar{U}_2^0(x, t/\alpha, \varphi, \theta) d\varphi d\theta = \\ &= -\frac{\alpha}{4\pi t^2} \int_0^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \frac{d}{ds} (s^3 \bar{U}_2^0(x, s, \varphi, \theta)) d\varphi d\theta ds = \\ &= -\frac{3\alpha}{4\pi t^2} \int_0^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta s^2 \bar{U}_2^0(x, s, \varphi, \theta) d\varphi d\theta ds - \end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha}{4\pi t^2} \int_0^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta s^3 \frac{d}{ds} \bar{U}_2^0(x, s, \varphi, \theta) d\varphi d\theta ds.$$

Переходя к декартовым координатам, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{22}^1(x, t) = & -\frac{3\alpha}{4\pi t^2} \int_{|y| \leq t/\alpha} \bar{U}_2^0(x-y) dy + \\ & + \frac{\alpha}{4\pi t^2} \sum_{i=1}^3 \int_{|y| \leq t/\alpha} y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_2^0(x-y) dy. \end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых:

$$\begin{aligned} \left| \frac{3\alpha}{4\pi t^2} \int_{|y| \leq t/\alpha} \bar{U}_2^0(x-y) dy \right| & \leq \frac{3\alpha}{4\pi t^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{U}_2^0(x-y)| dy \leq \\ & \leq \frac{C}{t^2} \|\bar{U}^0\|_{W^1(\mathbb{R}^3)}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{4\pi t^2} \sum_{i=1}^3 \int_{|y| \leq t/\alpha} y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_2^0(x-y) dy \right| & \leq \\ & \leq \frac{1}{4\pi t} \sum_{i=1}^3 \int_{|y| \leq t/\alpha} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_2^0(x-y) \right| dy \leq \frac{C}{t} \|\bar{U}^0\|_{W^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим член  $\mathcal{K}_{22}^2(x, t)$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{22}^2(x, t) & = \frac{t}{4\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta J_0\left(t \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right) \bar{U}_2^0(x, t/2\alpha, \varphi, \theta) d\varphi d\theta = \\ & = \frac{2\alpha}{\pi t^2} \int_0^{t/2\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \frac{d}{ds} (s^3 J_0(\alpha s \sqrt{3} \sin \theta) \bar{U}_2^0(x, s, \varphi, \theta)) ds d\varphi d\theta = \\ & = \frac{6\alpha}{\pi t^2} \int_0^{t/2\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta s^2 J_0(\alpha s \sqrt{3} \sin \theta) \bar{U}_2^0(x, s, \varphi, \theta) ds d\varphi d\theta + \\ & + \frac{2\alpha}{\pi t^2} \int_0^{t/2\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta s^3 J_0(\alpha s \sqrt{3} \sin \theta) \frac{d}{ds} \bar{U}_2^0(x, s, \varphi, \theta) ds d\varphi d\theta - \\ & - \frac{2\alpha^2 \sqrt{3}}{\pi t^2} \int_0^{t/2\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi s^3 \sin^2 \theta J_1(\alpha s \sqrt{3} \sin \theta) \bar{U}_2^0(x, s, \varphi, \theta) ds d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

При получении последнего соотношения мы воспользовались формулой  $J_0'(x) = -J_1(x)$ . Переходя в (24) к декартовым координатам, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{22}^2(x, t) & = \frac{6\alpha}{\pi t^2} \int_{|y| \leq t/2\alpha} J_0(\alpha \sqrt{3}|y'|) \bar{U}_2^0(x-y) dy - \\ & - \frac{2\alpha}{\pi t^2} \int_{|y| \leq t/2\alpha} \sum_{i=1}^3 y_i J_0(\alpha \sqrt{3}|y'|) \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_2^0(x-y) dy - \\ & - \frac{2\alpha^2 \sqrt{3}}{\pi t^2} \int_{|y| \leq t/2\alpha} |y'| J_1(\alpha \sqrt{3}|y'|) \bar{U}_2^0(x-y) dy. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя неравенство  $|J_\nu(x)| \leq 1, \nu \geq 0$ , и рассуждая так же, как и при получении (23), оценим каждое из слагаемых в (25):

$$\begin{aligned} \frac{6\alpha}{\pi t^2} \left| \int_{|y| \leq t/2\alpha} J_0(\alpha\sqrt{3}|y'|) \bar{U}_2^0(x-y) dy \right| &\leq \frac{C}{t^2} \|\bar{U}^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)}, \\ \frac{2\alpha}{\pi t^2} \left| \int_{|y| \leq t/2\alpha} \sum_{i=1}^3 y_i J_0(\alpha\sqrt{3}|y'|) \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_2^0(x-y) dy \right| &\leq \\ &\leq \frac{C}{t} \|\bar{U}^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)}; \\ \frac{2\alpha^2\sqrt{3}}{\pi t^2} \left| \int_{|y| \leq t/2\alpha} |y'| J_1(\alpha\sqrt{3}|y'|) \bar{U}_2^0(x-y) dy \right| &\leq \frac{C}{t} \|\bar{U}^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Из (25) и полученных неравенств следует оценка члена  $\mathcal{K}_{22}^2(x, t)$ .

Таким образом, при  $t \geq t_0 > 0$  равномерно по  $x$  справедлива оценка

$$|\mathcal{K}_2(x, t)| \leq \frac{C}{t} \|\bar{U}^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)} \quad (26)$$

с абсолютной постоянной  $C$ .

Изучим свертку  $\mathcal{K}_3(x, t)$ , которая может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{r \leq t/\alpha} \frac{\partial^3 G(y, t)}{\partial t^3} \bar{U}_3^0(x-y) dy = \\ &= \frac{\alpha^2}{4\pi} \int_{r \leq t/\alpha} \frac{\partial^3 G(y, t)}{\partial t^3} \bar{U}^0(x-y) dy = \frac{\alpha^2}{4\pi t} \int_{r \leq t/\alpha} \frac{\partial^2 G(y, t)}{\partial t^2} \times \\ &\times \bar{U}^0(x-y) dy = \frac{(\alpha t)^2}{4\pi} \left( \int_0^{t/2\alpha} + \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin^3 \theta \times \\ &\times \frac{J_2(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2})}{t^2 - \alpha^2 r^2} \bar{U}^0(x, r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta = \sum_{n=0}^2 \mathcal{K}_{3n}(x, t). \end{aligned}$$

Член  $\mathcal{K}_{30}(x, t)$  оценивается так же, как и свертка  $\mathcal{K}_2(x, t)$ . Член  $\mathcal{K}_{31}(x, t)$  оценивается, как и ранее, при помощи лемм 1 и 2 (см. обозначение (9)):

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_{31}(x, t)| &\leq \frac{\alpha^2}{2\pi} \int_0^{t/2\alpha} \frac{t^2}{t^2 - \alpha^2 r^2} |Q_3(x, r, \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}, \bar{U}^0)| dr \leq \\ &\leq \frac{\alpha^2}{3\pi} \int_0^{t/2\alpha} |Q_3(x, r, \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}, \bar{U}^0)| dz \leq \\ &\leq \frac{C\alpha^2}{3\pi} \int_0^{t/2\alpha} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} \Phi_0(x, r, \bar{U}^0) dr \leq \frac{C_1}{t} \|\bar{U}^0\|_{W_1^1(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

В члене  $\mathcal{K}_{32}(x, t)$  проинтегрируем по частям по  $r$ . Получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{32}(x, t) &= \frac{t^2}{4\pi} \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \bar{U}^0(x, r, \varphi, \theta) d\varphi d\theta \times \\ &\times dr \left( \frac{J_1(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2})}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} \right) = \frac{t^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \bar{U}^0(x, t/\alpha, \varphi, \theta) d\theta d\varphi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{t}{2\pi\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\theta \bar{U}^0(x, t/2\alpha, \varphi, \theta) J_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \sin\theta\right) d\varphi d\theta - \\
& - \frac{t^2}{4\pi} \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\theta \frac{J_1(\sin\theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2})}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} \frac{d}{dr} \bar{U}^0(x, r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta \equiv \\
& \equiv \sum_{i=1}^3 \mathcal{K}_{32}^i(x, t). \tag{27}
\end{aligned}$$

Отметим, что при получении (27) мы воспользовались значением предела  $\lim_{z \rightarrow +0} J_1(az)/z = a/2$ .

Рассмотрим каждый из интегралов в (27). Перейдем к декартовым координатам в интеграле  $\mathcal{K}_{32}^1(x, t)$ . Получим

$$\mathcal{K}_{32}^1(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{r=t/\alpha} \frac{\alpha^2 \rho^2}{2r^2} \bar{U}^0(x-y) dS_y;$$

нетрудно заметить, что он сокращается со вторым слагаемым в поверхностном интеграле в (6). Поверхностный интеграл  $\mathcal{K}_{32}^2(x, t)$  оценивается так же, как и  $\mathcal{K}_{22}^2(x, t)$  (см. (24), (25)), и равномерно по  $x$  есть  $O(1/t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

В члене  $\mathcal{K}_{22}^3(x, t)$  проинтегрируем по частям по  $r$ . Будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{32}^3(x, t) &= - \frac{t^2}{4\pi\alpha^2} \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r} \frac{d}{dr} \bar{U}^0(x, r, \varphi, \theta) d\varphi d\theta \times \\
& \times d_r(J_0(\sin\theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2})) = - \frac{t}{4\pi\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta \frac{d}{dr} \bar{U}^0(x, r, \varphi, \theta) \Big|_{r=t/\alpha} d\varphi d\theta + \\
& + \frac{t}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta J_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \sin\theta\right) \frac{d}{dr} \bar{U}^0(x, r, \varphi, \theta) \Big|_{r=t/2\alpha} d\varphi d\theta + \\
& + \frac{t^2}{4\pi\alpha^2} \int_{t/2\alpha}^{t/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta J_0(\sin\theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \frac{1}{r} \left[ \frac{d^2}{dr^2} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] \bar{U}^0(x, r, \varphi, \theta) d\varphi d\theta dr. \tag{28}
\end{aligned}$$

Поверхностные интегралы в (28) оцениваются так же, как и  $\mathcal{K}_{22}^2(x, t)$  (см. (24)), а объемный интеграл так же, как и член  $\mathcal{K}_{02}(x, t)$  (см. (20)).

В результате будем иметь, что при  $t \geq t_0 > 0$  равномерно по  $x$  справедлива оценка

$$\left| \mathcal{K}_3(x, t) - \frac{\alpha^2}{8\pi t^2} \int_{r=t/\alpha} \rho^2 \bar{U}^0(x-y) dS_y \right| \leq \frac{C}{t} \|\bar{U}^0\|_{W_1^2(\mathbb{R}^3)} \tag{29}$$

с абсолютной постоянной  $C$ .

Рассмотрим поверхностные интегралы в представлении (6) решения задачи. При этом, как уже было отмечено, второе слагаемое в поверхностном интеграле сократилось с членом  $\mathcal{K}_{32}^1(x, t)$ . Оставшиеся поверхностные интегралы могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{r=t/\alpha} \left\{ \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \right) \bar{U}^0(x-y) + \frac{1}{\alpha r} \bar{U}_2^0(x-y) \right\} dS_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \bar{U}^0(x, t/\alpha, \varphi, \theta) d\varphi d\theta + \frac{t}{4\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \times \\ \times \bar{U}_2^0(x, t/\alpha, \varphi, \theta) d\varphi d\theta - \frac{\alpha}{4\pi t} \int_{r \leq t/\alpha} \Delta_y \bar{U}^0(x-y) dy. \quad (30)$$

Первые два слагаемых в (30) оцениваются так же, как и член  $\mathcal{K}_{22}^2(x, t)$ . Оценим последнее слагаемое:

$$\frac{\alpha}{4\pi t} \left| \int_{r \leq t/\alpha} \Delta_y \bar{U}^0(x-y) dy \right| \leq \frac{\alpha}{4\pi t} \int_{r \leq t/\alpha} |\Delta_y \bar{U}^0(x-y)| dy \leq \\ \leq \frac{\alpha}{4\pi t} \int_{\mathbf{R}^3} |\Delta_y \bar{U}^0(x-y)| dy \leq \frac{\alpha}{4\pi t} \|\bar{U}^0\|_{W_1^2(\mathbf{R}^3)}.$$

Из полученных оценок следует доказательство теоремы 3 в случае, когда  $\bar{U}^0 \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ . Избавимся от этого ограничения.

Для начальных данных  $\bar{U}^0 \in W_2^2(\mathbf{R}^3) \cap W_1^3(\mathbf{R}^3)$  существует последовательность  $\bar{U}^{0,n} \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ , сходящаяся при  $n \rightarrow \infty$  к  $\bar{U}^0(x)$  как по норме  $W_2^2(\mathbf{R}^3)$ , так и по норме  $W_1^3(\mathbf{R}^3)$ . Пусть  $\bar{U}_n(x, t)$  — последовательность решений задачи (4), (2) с гладкими начальными данными. Тогда в силу (18) и доказанных оценок будем иметь

$$|\bar{U}(x, t)| \leq |\bar{U}_n(x, t)| + |\bar{U}_n - \bar{U}| \leq \frac{C}{t} \|\bar{U}^{0,n}\|_{W_1^3(\mathbf{R}^3)} + \\ + C_1 \|\bar{U}^{0,n} - \bar{U}^0\|_{W_2^2(\mathbf{R}^3)}$$

равномерно по  $x \in \mathbf{R}^3$  при  $t \geq t_0 > 0$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем утверждение теоремы.

**С л е д с т в и е.** *Рассмотрим систему (1) с начальными условиями (2). Из теоремы 3 и решения (3) для неоднородной системы (1) со стационарной и растущей линейно правой частью  $\bar{F}(x)$ , соответствующей центробежным силам, следует, что решение неоднородной системы (1) с ненулевыми начальными условиями (2) выходит на периодический по времени режим (3) со скоростью  $O(1/t)$ ; полученное решение так же, как и правая часть  $\bar{F}(x)$ , линейно растет по  $x$  (для компонент скорости  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ ).*

### Литература

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958. Вып. 3.
2. Масленникова В. Н. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 1. С. 135—160.
3. Масленникова В. Н. // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13. С. 612—628.
4. Масленникова В. Н. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 85—96.
5. Масленникова В. Н., Боговский М. Е. // Тр. сем. С. Л. Соболева. Новосибирск, 1976. Вып. 2. С. 49—68.
6. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М., 1977.
7. Масленникова В. Н. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 2. С. 271—298.

Университет дружбы народов  
им. Патриса Лумумбы

Поступила в редакцию  
10 сентября 1990 г.