А. Ф. Вакуленко, Многомерные неравенства Харди и отсутствие положительных собственных значений у оператора Шредингера с комплексным потенциалом, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1984, том 138, 33–34

Вакуленко А.Ф.

МНОГОМЕРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ И ОТСУТСТВИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ У ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Цель этой заметки – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\psi \in L_2(R^n)$ – решение уравнения

$$-\Delta\psi + v\psi = \lambda\psi ,$$

где $\lambda > 0$, v – комплексная функция, т.ч. $|v(x)(1+|x|)^{1+\varepsilon}| < \infty$. Тогда $\psi \equiv 0$.

Для вещественных v подобный результат впервые был получен Като, историю вопроса можно найти в [I] . В одномерном случае ($n=1$) утверждение теоремы есть следствие вольтерровости соответствующего интегрального уравнения. Наше доказательство состоит в уточнении некоторых оценок в методе Агмона (см. [I]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $\lambda=1$. Введем обозначение

$$\|\varphi\|_a^2 = \int_{R^n} |x|^{2a} |\varphi(x)|^2 dx .$$

Агмон показал, что для решения ψ, $\|\psi\|_a < \infty$ при всех $a > 0$. Ниже мы докажем неравенство

$$\|\Delta\varphi + \varphi\|_{a+1} \geqslant C(a) \|\varphi\|_a , \tag{I}$$

где $C(a) \to \infty$, при $a \to \infty$. Для решения ψ имеем оценку

$$\|\psi\|_a \geqslant C \|v\psi\|_{a+1} = C \|\Delta\psi + \psi\|_{a+1} \geqslant C C(a) \|\psi\|_a ,$$

и, следовательно, $\psi \equiv 0$.

Заметим, что при $n=1$ неравенство (I) есть прямое следствие неравенства Харди, причем константу $C(a)$ можно выбрать равной $|a-\frac{1}{2}|$. Неравенство (I) докажем разложением по сферическим гармоникам. Для фиксированной гармоники оно выглядит так

$$\|r^{a+1}(\varphi'' + \varphi - b r^{-2}\varphi)\|_{L^2} \geqslant C(a) \|r^a \varphi\|_{L^2} , \tag{2}$$

где b – вещественное число. Будем считать, что φ – гладкая вещественная функция с компактным в $(0,\infty)$ носителем. Положим $g = r^a \varphi$, тогда (2) примет следующий вид

$$\|r g'' - 2a g' + (a(a+1) - b) r^{-1} g + r g\| \geqslant C(a) \|g\| .$$

Левую часть этого неравенства обозначим через $\mathcal{H}(a,b)$. Имеем

$$\mathcal{H}^2(a,b)=\int_0^\infty \{r^2 g''^2+r^2g^2-2r^2g'^2+$$

$$+((a^2-b)^2-a^2)r^{-2}g^2+2(a^2+b)g'^2+2((a+1)^2-b)g^2\}\,dr\,.$$

Все слагаемые под знаком интеграла, за исключением последнего, четны по a, поэтому

$$\mathcal{H}^2(a,b)=\mathcal{H}^2(-a,b)+4a\int_0^\infty g^2\,dr \geqslant 4a\|g\|^2\,.$$

Тем самым в неравенстве (I) можно положить $C(a)=2\sqrt{a}$. В размерностях $n\geqslant 5$ неравенство (I) автоматически замыкается на все функции из области определения оператора Лапласа. При $n<5$ следует воспользоваться неравенством (2) при фиксированном b, при этом $C(a)$ будет порядка a.

Теорему I можно также доказать, используя следующее неравенство

$$\|e^{a|x|}(\Delta\varphi+\varphi)\| \geqslant a\,\|e^{a|x|}\frac{1}{|x|}\varphi\|\,.$$

Это неравенство отличается от соответствующего одномерного присутствием веса $\frac{1}{|x|}$.

Литература

I. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.4. М., 1982