

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Мартынова, О применении метода последовательных приближений к расчету средних прогибов круглой пластинки, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, номер 4, 43–45

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

23 января 2025 г., 23:20:16



МЕХАНИКА

УДК 539.3

Е. Д. Мартынова

**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ
К РАСЧЕТУ СРЕДНИХ ПРОГИБОВ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ**

1. Рассмотрим задачу об осесимметричной деформации круглой упругой пластинки при действии на нее равномерной поперечной нагрузки. Считая края пластинки жестко зашечленными, из уравнений Кармана [1] получим следующие выражения для безразмерных величин радиального смещения u срединной поверхности пластинки и производной w' от прогиба w :

$$u = \frac{h}{a} \left\{ \frac{1-\nu}{4} \rho \int_0^1 \frac{1}{\rho} (w')^2 d\rho + \frac{1+\nu}{4\rho} \left[\rho^2 \int_0^1 \rho (w')^2 d\rho - \int_0^\rho \rho (w')^2 d\rho \right] \right\}, \quad (1)$$

$$w' \equiv \frac{dw}{d\rho} = -\frac{1}{2\rho} \left[(1-\rho^2) \int_0^\rho \rho^2 \varphi(\rho) d\rho + \rho^2 \int_0^1 (1-\rho^2) \varphi(\rho) d\rho \right] - \rho \rho (1-\rho^2),$$

$$\varphi(\rho) \equiv 3(1+\nu) w' \left[\frac{1-\nu}{\rho^2} \int_0^\rho \rho (w')^2 d\rho + (1+\nu) \int_0^1 \rho (w')^2 d\rho + (1-\nu) \int_0^1 \frac{1}{\rho} (w')^2 d\rho \right],$$

$$\rho \equiv \frac{3}{4} (1-\nu^2) \frac{qa^4}{Eh^4}, \quad \rho \equiv \frac{r}{a}, \quad u \equiv \frac{U}{h}, \quad w \equiv \frac{W}{h}.$$

Здесь h — толщина пластинки, a — ее радиус, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, q — нормальная поверхностная нагрузка, r — радиус произвольной точки пластинки, измеряемый от ее центра, U — радиальное смещение, W — прогиб пластинки.

Из формул (1) следует, что функции u и w можно определить, если известна величина w' . Для нахождения последней применим итерационный процесс, введя рекуррентные соотношения

$$w'^{(n+1)} = w'^{(0)} - \frac{1}{2\rho} \left[(1-\rho^2) \int_0^\rho \rho^2 \varphi^{(n)}(\rho) d\rho + \rho^2 \int_0^1 (1-\rho^2) \varphi^{(n)}(\rho) d\rho \right],$$

$$w'^{(0)} = -\rho \rho (1-\rho^2), \quad (2)$$

$$\varphi^{(n)}(\rho) = 3(1+\nu) w'^{(n)} \left[\frac{1-\nu}{\rho^2} \int_0^\rho \rho (w'^{(n)})^2 d\rho + (1+\nu) \int_0^1 \rho (w'^{(n)})^2 d\rho + (1-\nu) \int_0^1 \frac{1}{\rho} (w'^{(n)})^2 d\rho \right].$$

Здесь $w'^{(0)}$ — значение производной от w , соответствующее геометрически линейному решению.

Докажем сходимость процесса последовательных приближений, определенного формулами (2), при некоторых ограничениях на величину нагрузки p . Из формул (2) можно получить неравенство

$$\max_{\rho \in [0,1]} |\omega'^{(n+1)} - \omega'^{(n)}| \leq 3(1+\nu) \gamma c_n^2 \max_{\rho \in [0,1]} |\omega'^{(n)} - \omega'^{(n-1)}|, \quad (3)$$

где

$$\gamma = \max_{\rho \in [0,1]} \rho \left[\frac{7-4\nu}{3} (1-\rho) + (1-\nu) \rho \ln \rho \right],$$

$$c_n = \max_{\rho \in [0,1]} \{ |\omega'^{(n)}|, |\omega'^{(n-1)}| \}.$$

При нагрузке p , удовлетворяющей неравенству

$$p \leq \frac{8\sqrt{30}}{\sqrt{(1+\nu)(77-37\nu)}}, \quad (4)$$

оказалось, что $c_n < \max_{\rho \in [0,1]} |\omega'^{(0)}|$ при любом n . Теперь из неравенства (3) следует, что условие сходимости итерационного процесса будет иметь вид

$$\max_{\rho \in [0,1]} |\omega'^{(0)}| < \frac{1}{\sqrt{3(1+\nu)\gamma}}. \quad (5)$$

Из формул (2), (4), (5) получаем ограничение на величину нагрузки p , при котором имеет место сходимость процесса последовательных приближений, определенного формулами (2):

$$p < \min \left\{ \frac{8\sqrt{30}}{\sqrt{(1+\nu)(77-37\nu)}}, \frac{3}{2\sqrt{(1+\nu)\gamma}} \right\} = \frac{3}{2\sqrt{(1+\nu)\gamma}}. \quad (6)$$

Ограничение (6) при $\nu=0,25$ соответствует условию $\omega^{(0)}(0) < 0,55$.

Из соотношения (3) вытекает, что доказанная сходимость итерационного процесса равномерная. Из нее следует равномерная сходимость прогибов w в силу равенства

$$w(\rho) = \int_1^{\rho} w' d\rho. \quad (7)$$

2. Проведем дополнительный анализ сходимости используемого процесса последовательных приближений.

Рассматривая разности $|\omega'^{(n+1)} - \omega'^{(n)}|$ и $|\omega'^{(n+1)} - \omega'^{(n-1)}|$ с учетом того, что $|\omega'^{(n)}| \leq |\omega'^{(0)}|$ для любого n , можно показать, что определенный формулами (2) итерационный процесс сходится немонотонно: четные приближения $\omega'^{(n)}$ образуют монотонно убывающую и ограниченную снизу последовательность, а нечетные — монотонно возрастающую и ограниченную сверху последовательность. Это обстоятельство позволяет при вычислении каждой пары соседних приближений находить последовательно уточняющиеся двусторонние оценки точного решения задачи.

Исходя из формулы (7), легко показать, что из немонотонной сходимости производных следует немонотонная сходимость прогибов пластинки.

3. Аналогично решается геометрически нелинейная задача и для шарнирно опертой пластинки. В этом случае сходимость при $\nu=0,25$ имеет место по крайней мере до значений $\omega^{(0)}(0) < 0,31$.

4. Предложенный метод последовательных приближений использован при проведении расчетов на БЭСМ-6. В таблице приведены значения максимальных прогибов пластины, полученных итерационным ме-

тодом для разных значений коэффициента Пуассона при предельных нагрузках. Эти величины максимальных прогибов соответствуют большим значениям нагрузок, чем те, которые найдены по формуле (6). Указанное различие объясняется тем, что условие (6) является достаточным, но не необходимым.

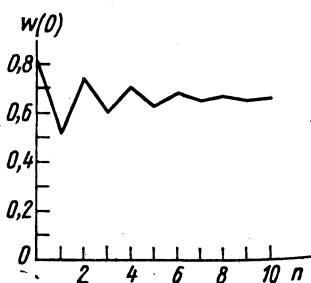
ν	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$w(0)$	0,825	0,790	0,785	0,780	0,775	0,746

Сравнение решения, рассмотренного в настоящей работе, с решением Уэя [1] поставленной задачи, полученным в рядах, показало, что при $p \leq 4,17$ они полностью совпадают.

Результаты численного счета подтвердили немонотонную сходимость предложенного итерационного процесса. Значения $w(0)$ в различных приближениях при $p=3,29$ приведены на рисунке (n — число приближений).

5. Полученное выше решение геометрически нелинейной задачи использовано при решении задачи с физической и геометрической нелинейностями в предположении, что материал пластинки описывается теорией малых упругопластических деформаций и несжимаем. Полученные уравнения равновесия решены методом упругих решений, причем в нулевом приближении задача была физически и геометрически линейной. Реализация этого метода на ЭВМ показала, что он сходится лишь при малых значениях нагрузки, когда геометрическая нелинейность незначительна. Это обстоятельство подтвердило отмеченную ранее исследователями (см., например, [2]) целесообразность применения к решению задач изгиба физически и геометрически нелинейных круглых пластин других итерационных методов.

6. Заметим, что условие (6) расширяет возможность решения поставленной задачи по сравнению с условиями, полученными ранее в работах [3, 4], в которых рассмотрен лишь случай жесткого защемления по границе. На возможность увеличения пределов изменения нагрузки указано в работе [5], в которой для этой цели рекомендован модифицированный метод итераций. Однако последний требует применения более громоздких вычислений и не позволяет получить двусторонние оценки решения при определении последовательных приближений.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., 1963.
2. Горлач Б. А. Упругопластическое состояние пластины при конечных прогибах. — В кн.: Исследование по теории пластин и оболочек, вып. 6—7. Казань, 1970.
3. Панов Ю. Д. О больших прогибах круглой пластины. — Тр. Центр. аэро-гидродинам. ин-та, 1939, № 450.
4. Копченова Н. В. Оценка погрешности метода последовательных приближений при определении прогибов пластины. — Инж. журнал. Механ. тверд. тела, 1966, № 2, 132—135.
5. Копченова Н. В. К нелинейной теории изгиба круглых пластин. — Прикл. механика, 1972, 8, вып. 9, 41—48.

Поступила в редакцию
14.04.82