В. П. Танана, Т. Н. Рудакова, Об оценке погрешности оптимального метода решения некорректных задач в гильбертовых пространствах при дополнительных ограничениях на погрешность оператора,
Вестник ЧелГУ, 1991, выпуск 1, 108–112

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ГИЛБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОГРЕШНОСТЬ ОПЕРАТОРА

Танана В. П., Рудакова Т. Н.

В работе [1] показано, что условие коммутируемости операторов $A_h - A$ и A_h значительно повышает точность методов решения некорректных задач. А повышение точности регуляризующих алгоритмов позволяет в какой-то мере избежать стирания «тонкой структуры» решения [12, стр. 120].

Во многих задачах, возникающих в различных разделах математической физики [3, стр. 184], в качестве исходной информации имеются асимптотические условия. Их учет наряду с условием коммутируемости операторов, как показано ниже, позволяет еще повысить точность регуляризующих алгоритмов. Доказана оптимальность метода М. М. Лаврентьева [4] и метода проекционной регуляризации [5].

1. Постановка задачи. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — линейный ограниченный самосопряженный оператор, действующий из H в H, со спектром целиком заполняющим отрезок $[0, \|A\|]$.

Рассмотрим операторное уравнение первого рода:

$$Au = f, \ u, \ f \in H. \tag{1}$$

Допустим, что при $f = f_0$ существует точное решение уравнения (1),

$$u_0 \in M_r, \ M_r = BS(0, r), \text{ где } S(0, r) = \{v : \|v\| \leqslant r\},$$

B — линейный ограниченный самоспоряженный оператор, действующий из H в H. Точные значения f_0 и оператора A неизвестны. Вместо них даны f_δ такой, что $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$ и линейный самосопряженный взаимно-однозначный оператор A_h, отображающий H в H со спектром целиком заполняющим отрезок $[0, \|A_h\|]$. Дополнительно предположим, что операторы B, $A_h - A$ являются функциями оператора A_h, то есть

$$B = g(A_h), \ A_h - A = \varphi_h(A_h), \text{ где } \sup\{|\varphi_h(\lambda)|: \lambda \in [0, \|A_h\|]\} \leqslant h,$$

$$\text{и для любого } h\,|\varphi_h(\lambda)| < Ch\psi(\lambda), \ \lambda \in [0, \|A_h\|]. \tag{2}$$

Функция $\psi(\lambda)$ известна и удовлетворяет следующим условиям:

ψ1) $\psi(\lambda)$ — монотонно возрастающая функция;

ψ2) $\psi(\lambda) \to 0, \ \lambda \to 0$;

ψ3) $\sup\{|\psi(\lambda)|: \lambda \in [0, 2\|A_h\|]\} \leqslant 1$.

Функция $g(\lambda)$ также известна и удовлетворяет требованиям:

g1) $g(0) = 0$;

g2) $g(\lambda)$ — строго возрастающая;

g3) $\dfrac{g(\lambda)\,\psi(\lambda)}{\lambda}$ — монотонно убывающая (в нестрогом смысле) функция.

Требуется по f_δ и A_h найти приближенное решение $u_{\delta h}$ уравнения (1) в некотором смысле близкое к точному решению u_0.

2. Определение оптимального линейного алгоритма. Линейным алгоритмом для задачи, поставленной выше, будем называть линейный ограниченный оператор P, отображающий пространство $H \times \{A_h\}$ в H, который начальным данным $\{f_\delta, A_h\}$ ставит в сответствие приближенное решение $u_{\delta h} = P(f_\delta, A_h)$ уравнения (1).

Введем количественную характеристику точности алгоритма P на классе M_r:

$$\bar{\Delta}(P) = \sup_{u, A, f_\delta} \{\|u - P(f_\delta, A_h)\| : u \in M_r,\ A_h - A = \varphi_h(A_h),\ \varphi_h \in \Phi_h,$$
$$\|Au - f_\delta\| \leqslant \delta\},$$

где Φ_h — множество действительных кусочно-непрерывных функций φ_h, определенных на отрезке $[0, \|A_h\|]$ и таких, что $|\varphi(\lambda)| \leqslant \leqslant Ch\psi(\lambda)$, $\lambda \in [0, \|A_h\|]$, $\sup\{|\varphi_h(\lambda)| : \lambda \in [0, \|A_h\|]\} \leqslant h$, где $\psi(\lambda)$ удовлетворяет условиям $\psi 1) - \psi 3)$ п. 1, C — константа.

Напомним определение оптимального линейного алгоритма, введенного в [1, стр. 107].

Линейный алгоритм P_{opt} будем называть *оптимальным на классе* M_r, если

$$\bar{\Delta}(P_{opt}) = \inf\{\bar{\Delta}(P) : P \in (H \times \{A_h\} \to H)\}.$$

Здесь $(H \times \{A_h\} \to H)$ — пространство линейных ограниченных операторов, отображающих пространство $H \times \{A_h\}$ в H.

Линейный алгоритм $\hat{P}$ называется *оптимальным по порядку на классе M_r,* если

$\bar{\Delta}(\hat{P}) \sim \bar{\Delta}(P_{opt})$.

Лемма 1. *Пусть*

$$\bar{\Omega}(\delta, h, r) = \sup_{u', u'', A, A''} \{\|u' - u''\| : u', u'' \in M_r,\ A_h - A' = \varphi_h(A_h),$$
$$A_h - A'' = \tilde{\varphi}_h(A_h),\ \varphi_h, \tilde{\varphi}_h \in \Phi_h,\ \|A'u' - A''u''\| \leqslant \delta\}.$$

Тогда имеет место неравенство:

$$\inf\{\bar{\Delta}(P) : P \in (H \times \{A_h\} \to H)\} \geqslant \frac{1}{2}\bar{\Omega}(2\delta, h, r). \tag{3}$$

Для оценки погрешности введем следующую функцию:

$$\bar{\omega}_{A_h}(\delta, h, r) = \sup_{u, A} \{\|u\| : u \in M_r,\ A_h - A = \varphi_h(A_h),$$
$$\varphi_h \in \Phi_h,\ \|Au\| \leqslant \delta\}.$$

Непосредственно из определений функций $\bar{\Omega}(\delta, h, r)$ и $\bar{\omega}_{A_h}(\delta, h, r)$ следует, что

$$\bar{\omega}_{A_h}(\delta, h, r) \leqslant \bar{\Omega}(\delta, h, r) \tag{4}$$

3. Вычисление функции $\bar{\omega}_{A_h}(\delta, \mathrm{h}, \mathrm{r})$. Рассмотрим соотношение

$$\mathrm{rg}(\sigma) = \sqrt{2}(\mathrm{rg}(\sigma)\,\mathrm{h}\psi(\sigma) + \delta)/\sigma. \tag{5}$$

Если

$$\sqrt{2}\,\mathrm{rg}(\|A_h\|)\,\mathrm{h}\psi(\|A_h\|) + \delta < \mathrm{rg}(\|A_h\|)\|A_h\|,$$

то соотношение (5) определяет однозначную неявную функцию

$$\sigma = \sigma(\delta, \mathrm{h}, \mathrm{r}).$$

Теорема 1. Пусть

$$\sqrt{2}\,\mathrm{rg}(\|A_h\|)\,\mathrm{h}\psi(\|A_h\|) + \delta < \mathrm{rg}(\|A_h\|)\|A_h\|,$$

тогда имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}\mathrm{rg}(\sigma, (\delta, \mathrm{h}, \mathrm{r})) \leqslant \bar{\omega}_{A_h}(\delta, \mathrm{h}, \mathrm{r}) \leqslant \mathrm{Crg}(\sigma(\delta, \mathrm{h}, \mathrm{r})).$$

4. Построение линейного оптимального по порядку алгоритма.

Рассмотрим регуляризующее семейство операторов, используемое в методе проекционной регуляризации [5]:

$$P_\alpha^h f = \int_\alpha^{\|A_h\|} \frac{1}{\sigma}\,dE_\sigma f, \quad 0 < \alpha \leqslant \|A_h\|.$$

Рассмотрим оценку $\bar{\Delta}(P_\alpha^{(h)})$ уклонения приближенного решения

$$u_{\delta h}^\alpha = P_\alpha^{(h)} f_\delta$$

уравнения (1) от точного решения u_0 на классе M_r:

$$\bar{\Delta}(P_\alpha^{(h)}) = \sup_{u,\ A,\ f_\delta} \{\|u_{\delta h}^\alpha - u\| : u \in M_r,\ A_r - A = \varphi_h(A_h),\ \varphi_h \in \Phi_h,$$
$$\|Au - f_\delta\| \leqslant \delta\}.$$

Теорема 2. *Если*

$\sqrt{2}\,\mathrm{rg}(\|A_h\|)\,\mathrm{h}\psi(\|A_h\|) + \delta < \mathrm{rg}(\|A_h\|)\|A_h\|$, *то для метода проекционной регуляризации* $P_{d(\delta,\ h,\ r)}^{(h)}$ *с параметром* $\alpha(\delta, \mathrm{h}, \mathrm{r})$, *удовлетворяющим соотношению (5), справедлива оценка:*

$$\bar{\Delta}(P_{\alpha(\delta,\ h,\ r)}^{(h)}) \leqslant (C+1)\,\mathrm{rg}(\alpha(\delta, \mathrm{h}, \mathrm{r}), \mathrm{h}). \tag{6}$$

Из (3), (4), теорем 1, 2 следует, что оценка (6) является точной по порядку, а метод проекционной регуляризации $P_{\alpha(\delta,\ h,\ r)}^{(h)}$ с параметром $\alpha(\delta, \mathrm{h}, \mathrm{r})$, удовлетворяющим соотношению (5), является оптимальным по порядку и

$$\bar{\Delta}(P^{(h)}_{\alpha(\delta,\ h,\ r)} = \hat{C}\inf\{\bar{\Delta}(P)\colon P \in (H \times \{A_h\} \to H)\},$$

где $\hat{C}$ — некоторая константа, не зависящая от δ и h.

Сравним по точности предложенный метод с оптимальным методом $\hat{P}^{(h)}_{\alpha(\delta,\ h,\ r)}$, в котором учитывается только коммутируемость операторов, без дополнительного условия (2). Для этого положим, что

$$g(\lambda) = \lambda^p,\ 0 < p < 1,\ \delta = 0,\ \psi(\lambda) = \lambda^{1-p}.$$

Тогда $\bar{\Delta}(\hat{P}^{(h)}_{\alpha(\delta,\ h,\ r)}) \sim h^p$, $h \to 0$ [2, стр. 56],

$$\bar{\Delta}(P^{(h)}_{\alpha(\delta,\ h,\ r)}) \sim h,\ h \to 0.$$

Сравнение этих оценок показывает, что учет коммутируемости операторов с дополнительным асимптотическим условием (2) значительно повышает точность решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Танана В. П. Оптимальные методы решения некорректных задач с дополнительной информацией и приложение их к решению задачи γ-картажа скважин, «Исслед. по функц. анализу». Свердловск, УрГУ, 1978, с. 101—121.
2. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Иванов В. К. О применении метода Пикара к решению интегральных уравнений первого рода.//Bul. Inst. Politehn. Iasi. 1968. V. 14, № 3/4.