А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 4
Выпуск 2 Руководитель А.И.Мальцев 1965 г.

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЯХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Ю.Л.Ершов

I. В работе доказывается разрешимость элементарных теорий : а) поля формальных степенных рядов от одной переменной над алгебраически замкнутым полем характеристики 0; б) поля формальных степенных рядов от одной переменной над вещественно замкнутым полем; в) поля Q_p p -адических чисел (для любого простого числа p).

Разрешимость теории, указанной в пункте б), дает ответ на вопрос Р.Робинсона [I6] (так как, ввиду [4], разрешимость кольца и разрешимость поля формальных степенных рядов равносильны).

Разрешимость теорий полей формальных степенных рядов а) и б) опровергает гипотезу, высказанную в [6] .

Из разрешимости элементарной теории поля p -адических чисел следует разрешимость диафантовой проблемы над этим полем (недавний результат А.Нерода [I3]). Отметим еще, что на элементарном языке формулируются проблемы относительно поля Q_p , нерешенные в настоящее время. Так, локальная гипотеза Э.Артина [I]о представимости нуля формами (для фиксированной степени τ) есть элементарное предложение.

Доказательство проводится следующим образом. Указывается некоторая рекурсивная (но бесконечная) система аксиом (в каждом из указанных выше случаев), которая выполнима на соответствующих полях. Используя методы А.Робинсона [I4] доказывается полнота этой системы аксиом. Отсюда и следует разрешимость.

Предварительно устанавливаются некоторые вспомогательные алгебраические леммы, а также результаты, относящиеся к элементарной теории дискретных упорядоченных абелевых групп.

2. Леммы об алгебраически полных нормированиях x).

Если F - поле, v - нормирование поля F, то через F_v будем обозначать поле вычетов нормирования v.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\langle F, v\rangle$ - поле F и нормирование v поля F. Будем говорить, что $\langle F, v\rangle$ - алгебраически полное нормирование, если для любого конечного алгебраического расширения F' поля F:

I) v имеет единственное расширение до нормирования v' поля F';

2) если $n=[F':F]$, e - индекс ветвления нормирования v, $f=[F'_{v'}:F_v]$, то $n=f\cdot e$.

ЛЕММА I. Если $\langle F, v\rangle$ - алгебраически полное нормирование, то для v справедлива лемма Гензеля.

Эта лемма справедлива для любого нормирования $\langle F, v\rangle$, удовлетворяющего условию I) определения (см. лемма 3, стр.48 [II]).

ЛЕММА 2. Если $\langle F, v\rangle$ удовлетворяет условию I) определения и F_v имеет характеристику 0, то $\langle F, v\rangle$ - алгебраически полное нормирование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы I, нормирования, удовлетворяющие условию I) определения, являются относительно полными в смысле Островского [9]. Условие 2) достаточно проверить для нормальных расширений. Пусть F' - нормальное расширение F. По теореме 4 [I8] существует L такое, что xx)

$$F\subset L\subset F' \quad \text{и} \quad [F'_{v'}:F_v]=[L_{v''}:F_v]=[L:F],$$

L - максимальное неразветвленное расширение, содержащееся в F'. F' над L вполне разветвлено. Ввиду условия на поле вычетов F_v и теоремы II [9], группа Галуа $G(F'/L)$ изоморфна фактор-группе $\Gamma(F')/\Gamma(L)$, где $\Gamma(F')$, $\Gamma(L)$ - группы нормирований v' и v''. Следовательно, порядок группы Галуа равен индексу ветвления нормирования v'' (который равен индексу ветвления нормирования v потому, что L/F - неразветвленное расширение). Но $[F':L]$ равно порядку группы $G(F'/L)$ (F - поле характеристики 0).

---

x) Все определения, касающиеся нормирований полей, можно найти в книге [7].

xx) Здесь и в дальнейшем неопределяемые нормирования (v' и v'' в нашем случае) - это всегда те нормирования, которые либо индуцируются данными, либо единственно возможные расширения заданных нормирований.

Итак, имеем $n=[F':F]=[F':L]\cdot[L:F]=$
$=[\Gamma(F'):\Gamma(L)]\cdot[L_{v''}:F_v]=[\Gamma(F'):\Gamma(F)]\cdot[F'_{v'}:F_v]$,

здесь $\Gamma(F)$ - группа нормирования v и $\Gamma(F)=\Gamma(L)$, так как L/F неразветвлено. Итак, $n=f\cdot e$, где $f=[F'_{v'}:F_v]$, а $e=[\Gamma(F'):\Gamma(F)]$.

Лемма доказана.

Пусть v - составное нормирование ([7] стр. 60) $v=v_1\circ\bar{v}$, где v_1 - нормирование поля F, а $\bar{v}$ - нормирование поля F_v.

ЛЕММА 3. Пусть $\langle F,v\rangle$ - алгебраически полное нормирование, $v=v_1\circ\bar{v}$ - составное нормирование, тогда $\langle F,v_1\rangle$ и $\langle F_{v_1},\bar{v}\rangle$ - алгебраически полные нормирования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(\alpha)$ - алгебраическое расширение F. Так как $\langle F,v\rangle$ - алгебраически полное нормирование, то для v существует единственное расширение v^*, ввиду леммы 4 [7], стр. 72). Отсюда следует единственность расширения v_1^* нормирования v_1 и единственность расширения $\bar{v}_*$ (нормирования поля $F(\alpha)_{v_1*}$) нормирования $\bar{v}$. Итак, $\langle F,v_1\rangle$ и $\langle F_{v_1},\bar{v}\rangle$ имеют единственное расширение для любого алгебраического расширения соответствующего поля.

Пусть $n=[F(\alpha):F]$, пусть Γ - группа нормирования v, H - изолированная подгруппа группы Γ, соответствующая разложению $v=v_1\circ\bar{v}$. Пусть Γ^* - группа нормирования v^*, H^* - изолированная подгруппа, соответствующая v_1^*, $H^*\cap\Gamma=H$, $e=[\Gamma^*:\Gamma]$, $f=[F(\alpha)_{v*}:F_v]$. Пусть $\bar{n}=f_1=[F(\alpha)_{v_1*}:F_{v_1}]$,

$$\bar{e}=[H^*:H],\quad e_1=[\Gamma^*/H^*:\Gamma/H].$$

Ясно, что $e=e_1\cdot\bar{e}$, так как $\Gamma^*\supset\Gamma H^*\supset\Gamma\supset 0$ и

$$[\Gamma^*:\Gamma]=[\Gamma^*:\Gamma H^*]\cdot[\Gamma H^*:\Gamma],$$

$$\Gamma H^*/\Gamma\cong H^*/\Gamma\cap H^*=H^*/H,\qquad [\Gamma H^*:\Gamma]=[H^*:H]=\bar{e},$$

$$[\Gamma^*:\Gamma H^*]=[\Gamma^*/H^*:\Gamma H^*/H^*],$$

но $\Gamma H^*/H^*\cong\Gamma/\Gamma\cap H^*=\Gamma/H$, $[\Gamma^*:\Gamma H^*]=[\Gamma^*/H^*:\Gamma/H]=e_1$.

Теперь $\bar{n}\geq f\cdot\bar{e}$, $n\geq f_1\cdot e_1$ ([7] стр. 84), $e_1\cdot\bar{e}=e$, $n=f\cdot e$, $e_1\bar{n}\geq f\cdot\bar{e}\cdot e_1=f\cdot e=n$, но $e_1\cdot\bar{n}=e_1 f_1\leq n$, следовательно, всюду равенство: $\bar{n}=f\cdot\bar{e}$, $n=f_1\cdot e_1$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. (Обращение леммы 3). Пусть $\langle F,v\rangle$ - нормирование, $v=v_1\circ\bar{v}$ - такое разложение нормирования v, что нормирования $\langle F,v_1\rangle$ и $\langle F_{v_1},\bar{v}\rangle$ алгебраически полны, тогда и $\langle F,v\rangle$

алгебраически полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(\alpha)$ - алгебраическое расширение F, $[F(\alpha):F]=n$, v имеет единственное продолжение v^* на $F(\alpha)$, ввиду алгебраической полноты $\langle F,v_1\rangle$, $\langle F_{v_1},\bar{v}\rangle$ и леммы 4 ([7] стр.72). Пусть e - индекс ветвления v, $f=[F(\alpha)_{v^*}:F_v]$. Пусть e_1 - индекс ветвления v_1, $\bar{e}$ - индекс ветвления $\bar{v}$, $\bar{n}=f_1=[F(\alpha)_{v_1^*}:F_{v_1}]$. Имеем $e_1\cdot f_1=n$, $\bar{e}\cdot f=\bar{n}$, ввиду алгебраической полноты $\langle F,v_1\rangle$, $\langle F_{v_1},\bar{v}\rangle$. Как и в лемме 3, имеем $e_1\cdot\bar{e}=e$, $ef=e_1\bar{e}f=e_1\bar{n}=e_1f_1=n$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Если $\langle F,v\rangle$ - алгебраически полно и F_v имеет характеристику 0, то любое подполе F' поля F, изоморфно отображающееся в F_v, можно расширить до поля представителей поля вычетов F_v.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме I $\langle F,v\rangle$ удовлетворяет лемме Гензеля. Теперь достаточно применить рассуждения Капланского, МакЛейна [8],[10].

ЛЕММА 6. Пусть $\langle F,v\rangle$ - алгебраически полное нормирование, F_v имеет характеристику 0, $F'\subset F$ - подполе, алгебраически замкнутое в F, v' - нормирование F', индуцированное нормированием v, тогда $\langle F',v'\rangle$ - алгебраически полное нормирование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F'(\alpha)$ - алгебраическое расширение поля F'; тогда $F(\alpha)$ - алгебраическое расширение поля F. Пусть R_v - кольцо нормирования v. Тогда $R_{v'}=R_v\cap F'$. Пусть $\bar{R}_v$ - целое замыкание R_v в $F(\alpha)$. Так как $\langle F,v\rangle$ - алгебраически полное нормирование, то $\bar{R}_v$ есть кольцо нормирования v^*, являющегося единственным продолжением нормирования v. Но $\bar{R}_v\cap F'(\alpha)$ есть, с одной стороны, целое замыкание $R_{v'}$ в $F'(\alpha)$, с другой, кольцо некоторого нормирования v'^*. Следовательно, v' имеет единственное расширение на $F'(\alpha)$. Для доказательства леммы достаточно применить лемму 2.

ЛЕММА 6'. Пусть $\langle F,v\rangle$ - алгебраически полное нормирование, $F_v=FG(p)$ - поле вычетов по модулю простого числа p. Предположим, что Γ - группа нормирования v имеет изолированную подгруппу $\tilde{\Gamma}\subset\Gamma$, изоморфную группе Z целых чисел, и предположим, что $v(p)=v(\underbrace{1+\cdots+1}_{p})=a$ - образующей группы $\tilde{\Gamma}$. Тогда для любого подполя $F'\subset F$, алгебраически замкнутого

в F, и индуцированного нормирования v', $\langle F', v' \rangle$ - алгебраически полное нормирование. (Ясно, что тогда для $\langle F', v' \rangle$ выполняются и остальные требования, наложенные на $\langle F, v \rangle$ в условиях леммы).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 6, $\langle F', v' \rangle$ допускает единственное продолжение на любое алгебраическое расширение. Следовательно (лемма I), для $\langle F', v' \rangle$ справедлива лемма Гензеля.

Рассмотрим два случая.

I) $\tilde{\Gamma} = \Gamma$. Тогда v - дискретное нормирование ранга I. Если пополнить $\langle F, v \rangle$ по топологии нормы, то получим обычное поле Q_p p-адических чисел (теорема 3, стр.45 [I7]). Так как $\langle F, v \rangle$ - алгебраически полное нормирование, то F алгебраически замкнуто в Q_p, следовательно, и F', так как F' алгебраически замкнуто в F.

Любое алгебраическое расширение $F'(\alpha)$ порождает алгебраическое расширение $Q_p(\alpha)$ и $n = [F'(\alpha) : F'] = [Q_p(\alpha) : Q_p]$, ввиду алгебраической замкнутости F' в Q_p. Известно ([I7], стр. 38-39), что Q_p - алгебраически полно, $n = e \cdot f$. e - индекс ветвления, f - относительная степень расширения. Ввиду единственности расширения нормирования v' и свойств полных полей, $Q_p(\alpha)$ есть пополнение ([I7], стр. 40) $\langle F'(\alpha), v'^* \rangle$, в частности, поля частных у них совпадают, отсюда $f' = f$ и индексы ветвления $e' = e$.

Итак, $n = e' \cdot f'$.

2) $\tilde{\Gamma} \neq \Gamma$. Рассмотрим разложение нормирования $v = v_1 \circ \bar{v}$, соответствующее изолированной подгруппе $\tilde{\Gamma}$. По лемме 3 $\langle F, v_1 \rangle$ и $\langle F_{v_1}, \bar{v} \rangle$ алгебраически полны. Пусть $\langle F', v_1' \rangle$ и $\langle F'_{v_1'}, \bar{v}' \rangle$ - соответствующие нормирования, связанные с разложением $v' = v_1' \circ \bar{v}'$, соответствующим изолированной подгруппе $\tilde{\Gamma}$ (заметим, что $\tilde{\Gamma}$ содержится в группе нормирования v', ввиду условия $v(p) =$ образующей группы $\tilde{\Gamma}$).

$\langle F', v_1' \rangle$ - алгебраически полна ввиду леммы 6, так как $F'_{v_1'}$ - поле характеристики 0, и v_1' индуцируется v_1 на F', F' алгебраически замкнуто в F. Покажем, что и $\langle F'_{v_1'}, \bar{v}' \rangle$ алгебраически полно.

Пусть $\bar{F}$ - максимальное подполе из F', изоморфно отображающееся на поле вычетов $F'_{v_1'}$; $F'_{v_1'}$ - алгебраическое расширение образа $\bar{F}$; $\bar{F}$ алгебраически замкнуто в F'. Это подполе и в F изоморфно отображается в поле вычетов F_{v_1}. По лемме 5, $\bar{F} \subset \bar{\bar{F}}$, где $\bar{\bar{F}}$ - поле представителей для поля вычетов F_{v_1}, но $F'_{v_1'}$ можно естественным образом отождествить с подполем F_{v_1}, следовательно, в $\bar{\bar{F}}$ содержится $\bar{\bar{\bar{F}}} \supset \bar{F}$, изоморфно отображающееся на $F'_{v_1'}$. $\bar{\bar{\bar{F}}}$ алгебраично над $\bar{F}$, $\bar{F}$ алгебраически замкнуто в $\bar{F}'$, а $\bar{F}'$ алгебраически замкнуто в F, следовательно, $\bar{\bar{\bar{F}}} = \bar{F}$. Итак, в F'

существует поле представителей $\bar{F}$ для поля вычетов $F'_{v'_1}$.

Ввиду алгебраической полноты $\langle F_{v_1}, \bar{v} \rangle$ или, что то же самое, $\langle \bar{\bar{F}}, \tilde{v} \rangle$, $\tilde{v}$ - индуцируется v, и ввиду того, что $\bar{F}$ алгебраически замкнуто в $\bar{\bar{F}}$ по уже разобранному случаю, $\langle \bar{F}, \tilde{v}' \rangle$ или, что то же, $\langle F'_{v'_1}, \bar{v}' \rangle$ алгебраически полно. По лемме 4 $\langle F', v' \rangle$ алгебраически полно.

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. Пусть $F_1 \supset F_2$, v_1 и v_2 - нормирования полей F_1 и F_2, соответственно, причем v_1 есть расширение v_2 (в таком случае будем писать $\langle F_1, v_1 \rangle \supset \langle F_2, v_2 \rangle$). Будем говорить, что $\langle F_1, v_1 \rangle$ - непосредственное расширение $\langle F_2, v_2 \rangle$, если группы нормирований v_1 и v_2 и поля вычетов F_{1v_1} и F_{2v_2} совпадают. (Имеется естественное вложение группы нормирования v_2 в группу нормирования v_1 и также естественное вложение F_{2v_2} в F_{1v_1}, ввиду того, что v_1 есть расширение v_2; требуется, чтобы эти вложения были изоморфизмом).

Непосредственное расширение назовем максимальным, если оно не допускает собственных непосредственных расширений.

ЛЕММА 7. Пусть $\langle F_1, v_1 \rangle$ и $\langle F_2, v_2 \rangle$ - два непосредственных максимальных алгебраических расширения $\langle F, v \rangle$ и предположим, что либо: 1) F_v имеет характеристику 0, либо 2) $\langle F, v \rangle$ удовлетворяет условиям леммы 6', исключая требование алгебраической полноты.

Тогда $\langle F_1, v_1 \rangle$ и $\langle F_2, v_2 \rangle$ аналитически эквивалентны над $\langle F, v \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в первом случае $\langle F', v' \rangle$ и $\langle F'', v'' \rangle$ - непосредственные максимальные расширения $\langle F_1, v_1 \rangle$ и $\langle F_2, v_2 \rangle$, соответственно. Но $\langle F', v' \rangle$ и $\langle F'', v'' \rangle$ являются также непосредственными максимальными расширениями $\langle F, v \rangle$. По теореме единственности [8], существует аналитическая эквивалентность φ: $\langle F', v' \rangle \to \langle F'', v'' \rangle$ над $\langle F, v \rangle$, но F_1 - алгебраично над F и алгебраически замкнуто в F', аналогично для F_2, следовательно, φ переводит F_1 на F_2.

Пусть имеет место 2). Рассмотрим два случая: а) группа нормирования $\langle F, v \rangle$ равна Z. Тогда максимальные пополнения $\langle F, v \rangle$, $\langle F_1, v_1 \rangle$, $\langle F_2, v_2 \rangle$ совпадают (равны Q_p [17]) и $\langle F_1, v_1 \rangle$, $\langle F_2, v_2 \rangle$ совпадают с алгебраическим замыканием F в Q_p; б) группа нормирования Γ строго содержит Z. В этом случае достаточно доказать теорему о единственности максимального непосредственного расширения. (Дальнейшие рассуждения проводятся, как в случае 1)).

Рассмотрим $\langle F_1, v'_1 \rangle$, $\langle F_2, v'_2 \rangle$ и $\langle F, v' \rangle$, где штрихованные норми-

рования соответствуют группе Γ/Z. Рассмотрим максимальное непосредственное расширение $\langle \bar{F}, \bar{v} \rangle$ для $\langle F, v' \rangle$. По теореме Каплан - ского это расширение единственно с точностью до аналитической эквивалентности над F. Из теоремы о строении максимальных расширений [8] следует, что $\langle \bar{F}, \bar{v} \rangle$ есть поле формальных степенных рядов (обозначения см. [8]) $F_{v'}(t^{\Gamma/Z}, c_{\alpha,\beta} \in F_{v'})$.

Рассмотрим поле $Q_p(t^{\Gamma/Z}, c_{\alpha,\beta}), c_{\alpha,\beta} \in F_{v'} \subset Q_p$. Это поле содержит $\bar{F}$ и является максимальным непосредственным расширением для $\langle F, v \rangle$. Действительно, любое расширение $Q_p(t^{\Gamma/Z}, c_{\alpha,\beta})$ повлечет расширение поля вычетов (ввиду максимальности поля степенных рядов), то есть расширение поля Q_p или группы Γ/Z, ввиду максимальности поля степенных рядов, но Q_p не допускает непосредственных расши - рений. Покажем, что любое максимальное непосредственное расширение $\langle F, v \rangle$ изоморфно $Q_p(t^{\Gamma/Z}, c_{\alpha,\beta})$. Пусть $\langle \tilde{F}, \tilde{v} \rangle$ - такое расширение. Оно должно содержать подполе F', изоморфное непосредственному максимальному расширению $\langle F, v' \rangle$. F' аналитически изоморфно $\bar{F}$ над F. Поле $\tilde{F}_{\tilde{v}'}$ должно быть максимальным расширением $F_{v'}$, то есть $\tilde{F}_{\tilde{v}'} \cong Q_p$; выберем в F' в качестве поля представителей поля вычетов, образ соответствующего поля из $\bar{F}$ и элементы $\tilde{t}^{\alpha}$ как образы соответствующих элементов t^{α}. Расширим теперь поле представителей из F' до поля представителей $\bar{\bar{F}}$ для поля вычетов $\tilde{F}_{\tilde{v}'}$. Это поле $\bar{\bar{F}}$ изоморфно Q_p, отображения $t^{\alpha} \to \tilde{t}^{\alpha}$, и $Q_p \to \bar{\bar{F}}$ согласованы над F и порождают аналитический изоморфизм $Q_p(t^{\Gamma/Z}, c_{\alpha,\beta})$ на $\bar{\bar{F}}(\tilde{t}^{\Gamma/Z}, \tilde{c}_{\alpha,\beta})$, тождественный на F (так как $\tilde{F}$ обязательно есть поле рядов над полем представителей $\bar{\bar{F}}$, а элементы $\tilde{t}^{\alpha}$ выбраны так, что $\tilde{t}^{\alpha}\tilde{t}^{\beta} = \tilde{c}_{\alpha,\beta}\, \tilde{t}^{\alpha+\beta}$, где $\tilde{c}_{\alpha,\beta}$ соответствует $c_{\alpha,\beta}$ при изоморфизме Q_p на $\bar{\bar{F}}$).

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть F - поле с нормированием v в группу Γ и пусть F' - расширение поля F такое, что F' имеет нормирование в расширение Γ' группы Γ, продолжающее нормирование v. Предположим, что $b = v(t), (t \in F')$ и $\{b\}$ не пересекается с Γ. Рассмотрим множество отношений $(*)$ $b < d, d < b$, для всех элементов $d \in \Gamma$, которые справедливы в Γ'. Тогда значение ограничения нормирования F' на $F(t)$ однозначно определено отношениями $(*)$ и группой нормирования $F(t)$ будет $\Gamma \cdot \{b\} \subset \Gamma'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $v(a_i t^i)$ и $v(a_j t^j), i \neq j, a_i, a_j \in F$,

и предположим, что $v(a_i t^i)=v(a_j t^j)$, тогда $v(a_i)+iv(t)=v(a_j)+jv(t)$, $(i-j)v(t)=v(a_j)-v(a_i)$, так как $i\neq j$, то это противоречит тому, что $\{v(t)\}$ не пересекается с Γ $(v(a_j)-v(a_i)\in\Gamma)$. Отсюда видно, что $v(a_0t^n+a_1t^{n-1}+\dots+a_n)=min(v(a_0t^n),\dots,v(a_n))$. Значение min можно найти, зная отношения $(*)$. Так как любой элемент из $F(t)$ имеет вид $\frac{P(t)}{Q(t)}$, $P(t), Q(t)$ – полиномы от t с коэффициентами в F, то $v(\frac{P(t)}{Q(t)})=v(P(t))-v(Q(t))$ – однозначно определено.

Лемма доказана.

3. Леммы о регулярных дискретных упорядоченных абелевых группах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Упорядоченная (линейно) абелева группа называется *регулярной дискретно упорядоченной* группой, если в этой группе существует наименьший положительный элемент a и выполняются следующие аксиомы (для любого целого положительного числа n): $\forall x\exists y(\bigvee_{i=0}^{n-1} x-ia=ny)$.

(Это измененный частный случай определения регулярной группы [I5], [2]).

ЛЕММА 9. *Пусть Γ – регулярная дискретно упорядоченная группа, пусть $Z=\{a\}$, a – наименьший положительный элемент группы Γ, тогда Γ/Z – полная группа без кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Z – выпуклая подгруппа, следовательно, Γ/Z – без кручения; полнота Γ/Z – частный случай леммы I7 из [2].

ЛЕММА I0. *Если регулярные дискретно упорядоченные группы рассматривать в сигнатуре $\sigma'=\langle +,\leq,P_0(x)\rangle$ ($P_0(a)=и \Longleftrightarrow a$ – наименьший положительный элемент группы), то элементарная теория таких групп модельно полна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma_1\subset\Gamma_2$ – две регулярные дискретно упорядоченные группы, Γ_1 вложено в Γ_2 как модель сигнатуры σ'. Пусть φ – примитивное предложение, определенное в Γ_1 и истинное в Γ_2. Нам нужно показать, что φ истинно и в Γ_1. Пусть $\varphi=\exists x_1x_2\dots x_n\, Z(x)$, $b_1,\dots,b_n\in\Gamma_2$ таковы, что $Z(b)$ справедливо. Рассмотрим подгруппу $\Gamma'=\Gamma_1\{b_1\}\cdots\{b_n\}\subseteq\Gamma_2$; Γ'/Γ_1 без кручения (так как Γ_1 сервантна в Γ_2, что следует из леммы 9 и выбора сигнатуры). Рациональный ранг r группы Γ'/Γ_1 не превосходит n. Пусть Γ'' – наименьшая сервантная подгруппа из Γ_2, содержащая Γ'. Тогда рациональный ранг Γ''/Γ_1 также равен r. Заметим, что в силу лем-

мы 17 из [2], Γ'' - также регулярная дискретно упорядоченная абелева группа. В Γ'' $\mathcal{Y}$ истинно, так как $b_1, \ldots, b_n \in \Gamma' \subseteq \Gamma''$.

Итак, можно предполагать, что Γ_2/Γ_1 имеет конечный рациональный ранг. Рассмотрим $\Gamma_1 = \Gamma^{(0)} \subset \Gamma^{(1)} \subset \cdots \subset \Gamma^{(r)} = \Gamma_2$ $(*)$, причем $\Gamma^{(i)}$ - сервантные подгруппы Γ_2, и $\Gamma^{(i+1)}/\Gamma^{(i)}$ имеет рациональный ранг 1. Так как $\Gamma^{(i)}$ - регулярные дискретно упорядоченные группы, то наше утверждение достаточно доказать для случая, когда Γ_2/Γ_1 - группа ранга 1, так как, ввиду $(*)$, это утверждение будет справедливо для любого Γ_2, если Γ_2/Γ_1 имеет конечный рациональный ранг.

Итак, пусть Γ_2/Γ_1 - группа ранга 1. Ввиду леммы 17 из [2], $\Gamma_2/\Gamma_1 \cong R$ -группе рациональных чисел.

Пусть $c \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ и $c > 0$. Рассмотрим систему аксиом $K^* = \mathcal{D}$ (= система аксиом регулярных дискретно упорядоченных абелевых групп) $\cup\, N$ (= диаграмма модели Γ_1) $\cup \{ d \neq c \,\&\, c \leq d, d \neq c \,\&\, d \leq c, T_{n,i_n}(c)$ $(\equiv \exists u(c + i_n a = nu))(0 \leq i_n < n)$, для всех $d \in \Gamma_1$, всех натуральных $n > 0$ и всех истинных отношений такого вида $\}$.

Пусть Γ^* удовлетворяет системе K^*, можно считать, что $\Gamma_1 \subset \Gamma^*$; пусть $\bar{c} \in \Gamma^*$ - элемент, удовлетворяющий всем условиям на c в K^*. Пусть $\bar{\Gamma}$ - наименьшая сервантная подгруппа в Γ^*, содержащая Γ_1 и $\bar{c}$; тогда $\bar{\Gamma}/\Gamma_1 \cong R$. Γ_2 и $\bar{\Gamma}$ являются расширениями Γ_1 с помощью R. Так как $T_{n,i_n}(\bar{c})$ выполняются в $\bar{\Gamma}$, то Γ_2 и $\bar{\Gamma}$ - эквивалентные расширения, причем существует изоморфизм $\varphi : \bar{\Gamma} \to \Gamma_2$, тождественный на Γ_1 и такой, что $\varphi(\bar{c}) = c$. Заметим ещё, что любой элемент из Γ_2 $(\bar{\Gamma})$ можно однозначно представить в виде:

$$d + r\frac{c + i_n a}{n} \cdot \left(d + r\frac{\bar{c} + i_n a}{n}\right),$$

где $d \in \Gamma_1, (r,n) = 1$, r - целое, $n > 0$ - целое. Остается проверить, что φ является не только алгебраическим изоморфизмом, но и сохраняет отношение порядка. Для этого достаточно показать, что отношения $c < d$, $c > d$ $(*)$ и порядок подгруппы Γ_1 однозначно определяют порядок в Γ_2. Покажем, как, используя отношения $(*)$, можно определить, когда

$$\alpha = d + r\frac{c + i_n a}{n} > 0,$$

предполагая, что $r \neq 0$, так как, в противном случае, $\alpha \in \Gamma_1$.

Имеем $\alpha > 0 \Leftrightarrow n\alpha > 0$ $(n > 0)$, следовательно, достаточно выяснить, когда $d' + rc > 0$, $d' \in \Gamma_1$, $r \neq 0$. Так как $c \notin \Gamma_1 \supseteq Z$ и $c > 0$, то $c > ka$ для любого k (потому что $Z = \{a\}$ выпукла в Γ_1 и Γ_2), следовательно,

$$d' + rc > 0 \quad \text{в } \Gamma_2 \Leftrightarrow \frac{d' + rc}{Z} > 0 \text{ в } \Gamma_2/Z \;;$$

но

$$\frac{d'+\tau c}{z}>0 \text{ в } \Gamma_2/z \Leftrightarrow \frac{1}{|\tau|}\,\frac{d'+\tau c}{z}=\frac{d''\pm c}{z}>0 \text{ в } \Gamma_2/z \Leftrightarrow c>\mp d'' \text{ в } \Gamma_2,$$

а справедливость последнего отношения можно узнать из отношения $(*)$.

Итак, Γ_2 и $\bar{\Gamma}$ изоморфны, как модели сигнатуры σ', следовательно, $\mathcal{Y}$ справедливо в $\bar{\Gamma}$ и в $\Gamma^* \supseteq \bar{\Gamma}$. Отсюда $K^* \vdash \mathcal{Y}$

$$\mathcal{D} \cup N \vdash (\exists x)(\mathop{\&}_{i=1}^{n} x<d_i \mathop{\&}_{i=n+1}^{N} x>d_i \mathop{\&}_{j=1}^{s} T_{n_j, i_{n_j}}(x)) \longrightarrow \mathcal{Y}.$$

Покажем, что посылка формулы справедлива в Γ_1, если она была справедлива в некотором расширении (в нашем случае посылка выполняется элементом c в Γ_2). Пусть

$$d=\min_{i=1,\dots,n} d_i, \quad b=\max_{i=n+1,\dots,N} d_i$$

Нам нужно найти такой x в Γ_1, что $b<x<d$, причем нужно, чтобы выполнялись условия $T_{n_j, i_{n_j}}(x)$. Если $n \neq 0$, то есть, если d определено и если b определено, то есть $N>n$, то $d \neq b+ka$ для всех натуральных k, так как ввиду выбора сигнатуры, если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ и $x \in \Gamma_2$, $b<x<d$ и $d=b+ka$, $k>0$, то $x=b+s'a \in \Gamma_1$, $0<s'<k$. Но в Γ_2 c, являющееся решением $b<c<d$, не принадлежит Γ_1.

Пусть Φ – наименьшее общее кратное чисел n_j $(j=1,\dots,s)$. Пусть $0 \le \tau < \Phi$ таково, что $T_{\Phi,\tau}(-b)$. Найдем целое $s_0>0$, такое, чтобы $T_{n_j, i_{n_j}}((\tau+s_0)a)$ $(j=1,\dots,s)$. Пусть $0 \le s_0 < \Phi$ таково, что $T_{\Phi, s_0}(-b-c)$. Покажем, что это s_0 желаемое. Итак, $-(b+c)+s_0 a=\Phi d_1$, $b+\tau a=\Phi d_2$, $c+i_\Phi a=\Phi d_3$, $(\tau+s_0+i_\Phi)a=\Phi d_5$ $(d_5=d_1+d_2+d_3)$. Остаток от деления i_Φ на n_j для $j=1,\dots,s$ равен i_{n_j}; $i_\Phi=i_{n_j}+n_j k_j$, $(\tau+s_0+i_n)a=\Phi d_5-n_j k_j a$, а так как n_j/Φ, то имеем $T_{n_j, i_{n_j}}((\tau+s_0)a)$. Если возьмем $x=b+(s_0+\Phi)a$, то $b<x<d$ и $T_{n_j, i_{n_j}}(x)$, так как $b-\tau a=\Phi d'$

$$b+(s_0+\Phi)a=\tau a-\Phi d'+(s_0+\Phi)a=(\tau+s_0)a+\Phi d'',$$

а n_j/Φ и $T_{n_j, i_{n_j}}((\tau+s_0)a)$. Если b не определено, то в качестве b можно взять 0, так как в случае, если d определено, то $d>ka$ для всех k. Итак, посылка формулы

$$(\exists x)(\mathop{\&}_{i=1}^{n} x<d_i \mathop{\&}_{i=n+1}^{N} x>d_i \mathop{\&}_{j=1}^{s} T_{n_j, i_{n_j}}(x)) \longrightarrow \mathcal{Y}$$

справедлива в Γ_1, следовательно, и $\mathcal{Y}$ справедливо в Γ_1.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ – регулярные дискретно упорядоченные абелевы группы (вложение, как моделей сигнатуры σ'), то Γ_1 сервантна в Γ_2.

Это было замечено в начале доказательства леммы I0.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ - регулярные дискретно упорядоченные абелевы группы (вложение, как моделей сигнатуры σ'), и $a \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$, то $\{a\} \cap \Gamma_1 = 0$.

Это непосредственно следует из сервантности Γ_1 в Γ_2.

4. Система аксиом

Будем рассматривать модели вида $\langle F, v, \Gamma \rangle$, где F - поле, v - нормирование поля F, Γ - группа нормирования v. Эти модели можно рассматривать как одноосновные модели с сигнатурой

$$\sigma_0 = \langle F(x), \Gamma(x), V(x,y), Q'(x,y), S'(x,y,z), S(x,y,z), P(x,y,z) \rangle,$$

как это рассматривалось А.Робинсоном ([14] стр. 74). Содержательно эти предикаты означают следующее: F выделяет элементы поля, Γ выделяет элементы группы нормирования, $V(x,y)$ означает, что $v(x)=y$ (причем $F(x) \& \Gamma(y)$), S' - предикат сложения в группе Γ, Q' - порядок в группе Γ, S и P - предикаты сложения и умножения в поле F.

Наша система аксиом будет состоять из нескольких групп:

1. Системы аксиом для справедливости вышеуказанных интерпретаций предикатных символов из σ_0, и еще аксиомы $\forall x [(F(x) \vee \Gamma(x)) \& \& (\neg F(x) \vee \neg \Gamma(x))]$ (см. [14] стр. 47-49).

В дальнейшем $\langle F, v, \Gamma \rangle$ будет всегда обозначать модель, удовлетворяющую первой группе аксиом.

2. Системы аксиом для поля вычетов нормирования. Три разные системы:

K_1. Поле вычетов - алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

K_2. Поле вычетов - вещественно замкнутое поле.

K_{3p}. Поле вычетов - простое поле характеристики $p \neq 0$.

3. Системы аксиом относительно групп Γ. Γ - регулярная дискретно упорядоченная абелева группа.

4. Системы аксиом об алгебраической полноте нормирования $\langle F, v \rangle$. Для любого конечного алгебраического расширения поля F целое замыкание кольца нормирования v есть кольцо нормирования заданного расширения и имеет место равенство $n = f \cdot e$, где n - степень расширения, e - индекс нормирования, f - степень расширения поля вычетов.

5_p. $v(p) = v(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p})$ равно наименьшему положительному элементу группы Γ.

Обозначим через K_1, K_2, K_3 системы всех аксиом в зависимости от различных случаев в 2 и 5.

Все аксиомы из I, 2, 3 и 5, очевидно, элементарны (могут быть записаны с помощью систем формул УИП сигнатуры σ_0).

Покажем, что и система аксиом 4 также элементарна.

Пусть X^n обозначает $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{nn})$. Тогда $\forall X^n$ и $\exists X^n$ имеют очевидный смысл.

$$X^n \cdot Y^n = Z^n \quad \text{означает} \quad \mathop{\&}_{i,j} \left(z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj}\right);$$

$$X^n + Y^n = Z^n \quad \text{означает} \quad \mathop{\&}_{i,j} (z_{ij} = x_{ij} + y_{ij}).$$

Рассмотрим формулу

$$\mathfrak{A}(A^n, X^n) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \forall Y^n (Y^n A^n = A^n Y^n \to Y^n X^n = X^n Y^n).$$

Если матрица A^n такова, что алгебра $\mathfrak{A}_{A^n}$, порожденная матрицей A^n в алгебре всех матриц порядка n над полем скалярных матриц, является простой, то матрицы X^n, удовлетворяющие $\mathfrak{A}(A^n, X^n)$, как раз и есть элементы $\mathfrak{A}_{A^n}$. Это следует из теоремы симметрии [3].

Действительно, пусть $\mathfrak{A}_{A^n}$ – алгебра, порожденная A^n, то есть это – множество многочленов от A^n (со скалярными коэффициентами). Любая матрица, перестановочная с A^n, перестановочна и с любым элементом из $\mathfrak{A}_{A^n}$, следовательно, из теоремы симметрии вытекает, что только многочлены от A^n и удовлетворяют формуле $\mathfrak{A}(A^n, X^n)$. Наше утверждение справедливо в частном случае, когда $\mathfrak{A}_{A^n}$ – поле.

Пусть L/K – алгебраическое расширение поля K степени n. Тогда в алгебре матриц порядка n существует подполе, изоморфное L; если L/K сепарабельно (это всегда выполняется, когда поле K имеет характеристику 0), то это поле порождается одной матрицей.

Рассмотрим формулы:

$$C_K(X^n) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \mathop{\&}_{i \neq j} x_{ij} = 0 \mathop{\&}_{i,j} x_{ii} = x_{jj};$$

$$\mathcal{L}_n(A^n) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists X_1^n \cdots X_n^n \forall Y_1^n \cdots Y_n^n \left(\mathop{\&}_i C_K(Y_i^n) \mathop{\&}_i \mathfrak{A}(A^n, X_i^n) \mathop{\&}_i \sum X_i^n Y_i^n = 0 \to \mathop{\&} Y_i^n = 0\right);$$

$$\mathcal{L}_n(A^n) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \forall X^n Y^n (\mathfrak{A}(A^n, X^n) \& \mathfrak{A}(A^n, Y^n) \& X^n Y^n = 0 \to X^n = 0 \vee Y^n = 0);$$

$$\mathcal{D}_n(X^n) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists Y_1^n \cdots Y_n^n \Big[\mathop{\&}_i (C_K(Y_i^n) \& v(Y_i^n) \geq 0) \& ((X^n)^n + Y_1^n (X^n)^{n-1} +$$

$$+ \cdots + Y_n^n = 0\Big].$$

$$\mathcal{B}_n \overset{df}{\Longleftrightarrow} \forall A^n(\mathcal{L}_n(A^n) \& \mathcal{L}_n(A^n) \& (\forall X^n Y^n(\mathfrak{A}(A^n, X^n) \&$$

$$\& \mathfrak{A}(A^n, Y^n) \to X^n Y^n = Y^n X^n) \to \forall X^n Y^n(\mathfrak{A}(A^n, X^n) \& \mathfrak{A}(A^n, Y^n) \& \vartheta(X^n) \&$$

$$\& \vartheta(Y^n) \to (v^*(X^n Y^n) > 0 \to v^*(X^n) > 0 \vee v^*(Y^n) > 0)),$$

где $v(y_i^n) \geq 0$, это $\underset{i}{\&}\, v(y_{ii}) \geq 0$,

а $v^*(X^n) > 0 \overset{df}{\Longleftrightarrow} \forall Y^n(\mathfrak{A}(A^n, X^n) \& \mathfrak{A}(A^n, Y^n) \& \vartheta_n(X^n) \&$

$$\& \vartheta_n(Y^n) \to X^n Y^n \neq 1).$$

Формула $\mathcal{B}_n$ утверждает, что для любого алгебраического расширения степени n (если такое существует) целое замыкание кольца нормирования v есть кольцо нормирования v^*.

Аналогично можно записать требование $n = f \cdot e$, для любого расширения степени n.

Модели систем аксиом K_i будем рассматривать в следующих сигнатурах σ_i:

$\sigma_1 = \sigma_0 \cup \{P_0(X)\}$, $\sigma_2 = \sigma_0 \cup \{P_0(X), Q(X,Y)\}$,

$\sigma_{3p} = \sigma_0 \cup \{P_0(X)\}$, $P_0(X) \Leftrightarrow \Gamma(X) \& X > 0 \&$

$\& \forall Y(Y < X \to Y \leq 0)$; $Q(X,Y) \Leftrightarrow X \leq Y$

в поле вычетов (в вещественно замкнутом поле имеется естественный и формульный порядок).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle \subset \langle F_2, v_2, \Gamma_2\rangle \subset \langle F_3, v_3, \Gamma_3\rangle$ вложены как модели сигнатуры σ_i, пусть $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$ и $\langle F_3, v_3, \Gamma_3\rangle$ удовлетворяют системе аксиом K_i $(i = 1, 2, 3p)$, а F_2 алгебраически замкнуто в F_3, тогда:

I. F_1 алгебраически замкнуто в F_3.

2. $\langle F_2, v_2, \Gamma_2\rangle$ удовлетворяет системе аксиом K_i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Пусть $\alpha \in F_3 \setminus F_1$ и α алгебраичен над F_1; рассмотрим $\langle F_1(\alpha), v_1', \Gamma_1'\rangle$; так как $\langle F_1, v_1\rangle$ алгебраически полно, то либо $[\Gamma_1' : \Gamma_1] > 1$, либо расширяется поле вычетов.

Предположим второе: $[F_1(\alpha)_{v_1'} : F_{1v_1}] > 1$, $F_1(\alpha)_{v_1'}$ алгебраично над F_{1v_1}. В случае K_1 F_{1v_1} алгебраически замкнуто, следовательно, не допускает алгебраических расширений, в случае K_2 F_{1v_1} вещественно замкнуто и допускает единственное алгебраическое расширение, но $F_{1v_1} \subset F_1(\alpha)_{v_1'} \subseteq F_{3v_3}$ и F_{3v_3} вещественно замкнуто, следовательно, $[F_1(\alpha)_{v_1'} : F_{1v_1}]$ должно равняться I, в случае K_{3p} имеем $FG(p) = F_{1v_1} \subseteq F_1(\alpha)_{v_1'} \subseteq F_{3v_3} = FG(p)$, следовательно, $F_{1v_1} = F_1(\alpha)_{v_1'} = FG(p)$.

Итак, второй случай невозможен. Следовательно, должно происходить ветвление. $[\Gamma_1':\Gamma_1]=[F_1(\alpha):F_1]=n$, $\Gamma_1\subset\Gamma_1'\subseteq\Gamma_3$, в Γ_1 и Γ_3 есть совпадающие минимальные изолированные подгруппы Z (совпадение следует из включения предиката P_0 в сигнатуру). Z сервантна и в Γ_1'; имеем $Z\subseteq\Gamma_1\subseteq\Gamma_1'$ и $[\Gamma_1':\Gamma_1]=[\Gamma_1'/Z:\Gamma_1/Z]=n$, но в силу регулярности Γ_1, Γ_1/Z -полная группа, а полная группа без кручения не допускает конечных расширений, являющихся группами без кручения. Следовательно, $[\Gamma_1':\Gamma_1]=1$ и $\Gamma_1'=\Gamma_1$. Итак, F_1 алгебраически замкнуто в F_2.

2. Докажем второе утверждение предложения. Системы аксиом I, 5_p, очевидно, выполняются. Выполнимость четвертой группы аксиом следует для K_1 и K_2 из леммы 6 и для случая K_{3p} из леммы 6' (достаточно заметить, что поле вычетов $F_{2v_2}=FG(p)$, так как $FG(p)=F_{1v_1}\subseteq F_{2v_2}\subseteq F_{3v_3}=FG(p)$, Γ_2 содержит наименьшую изолированную подгруппу, изоморфную Z, так как $Z\subseteq\Gamma_1\subseteq\Gamma_2\subseteq\Gamma_3$ и Z изолирована как в Γ_1, так и в Γ_3, а $v_2(p)$ равно образующей группы Z).

Проверим выполнимость аксиом второй группы для случая K_1 и K_2, для случая K_{3p} это уже проверено выше. Так как $\langle F_2,v_2\rangle$ алгебраически полно, то для поля вычетов F_{2v_2} существует поле представителей $\bar F\subseteq F_2$ (лемма 5). $\bar F$ в F_3 можно расширить до поля представителей $\bar{\bar F}\supseteq\bar F$ для F_{3v_3}, $\bar{\bar F}$ - алгебраически (или вещественно) замкнутое поле, $\bar F$ алгебраически замкнуто в F_2, а F_2 алгебраически замкнуто в F_3, следовательно, $\bar F$ агебраически замкнуто в F_3 и в $\bar{\bar F}$, отсюда $\bar F$ - алгебраически (вещественно) замкнуто и $F_{2v_2}\cong\bar F$ алгебраически (вещественно) замкнуто.

Проверим выполнимость системы аксиом третьей группы. Достаточно проверить сервантность группы Γ_2 в Γ_3. Рассмотрим случай K_1 и K_2.

Пусть $x\in\Gamma_2$ и $\exists y\in\Gamma_3\ (x=ny)$. Пусть $a\in F_2, v_2(a)=v_3(a)=x$; пусть $b\in F_3$, $v_3(b)=y$ и $v_3(a)=v_3(b^n)$. Рассмотрим $\frac{a}{b^n}$, $v(\frac{a}{b^n})=0$. Пусть $\bar c$ - элемент поля вычетов F_{3v_3}, являющийся образом $\frac{a}{b^n}$. Тогда $\bar c=\pm d^n$ (минус может появиться в случае K_2 и n четного), тогда $a=\pm\varepsilon(bd)^n$, где образ ε в K_{3v_3} есть единица. По лемме Гензеля (лемма I) $\varepsilon=\eta^n$. Итак, $a=\pm(\eta bd)^n$. Получаем, что уравнение $x^n\pm a=0$ разрешимо в F_3, но F_2 алгебраически замкнуто в F_3, следовательно, существует $d\in F_2$, такое, что $\pm d^n=a$; $v(d^n)=v(a)=nv(a)$. Итак, $v(d)$ есть решение уравнения $x=ny$.

Рассмотрим случай K_{3p}.

Пусть $\langle F_1,v_1'\rangle, \Gamma_1/Z\rangle\subset\langle F_2,v_2',\Gamma_2/Z\rangle\subset\langle F_3,v_3',\Gamma_3/Z\rangle$. Достаточно показать, что Γ_2/Z - полна ($\Gamma_1/Z\subseteq\Gamma_2/Z\subseteq\Gamma_3/Z$). Γ_3/Z полна по лемме 9. Заметим предварительно следующее: $F_{3v_3^*}/F_{3v_3}$ - полная группа ($*$ обозна-

чает рассмотрение мультипликативной группы соответствующего поля). Ранее мы (лемма 6) заметили, что $F_{3v_3'}$ можно рассматривать как подполе поля Q_p p-адических чисел, алгебраически замкнутое в нем. В частности, $F^*_{3v_3'}$ сервантна в Q^*_p, то же справедливо и для $F^*_{2v_2'}$, ввиду алгебраической замкнутости $F_{2v_2'}$ в $F_{3v_3'}$ (это доказывается путем перехода к полю представителей). Известно строение группы Q^*_p: $Q^*_p = z_{p-1} + \varprojlim z_{p^\alpha}$ (в случае $p \neq z$) и $Q^*_z = z_2 + \varprojlim z_2^\alpha$. Но $F^*_{2v_2'}$ содержит z_{p-1} (это решения уравнения $x^{p-1}-1=0$) и содержит элемент (а именно, p), не делящийся на p. Отсюда следует, что $F^*_{2v_2'}$ и Q^*_p имеют равные элементарные характеристики [5]. Ввиду сервантности $F^*_{2v_2'}$ в Q^*_p, имеем: $Q^*_p/F_{2v_2'}$ - полна, но $F^*_{2v_2'} \subseteq F^*_{3v_3'} \subseteq Q^*_p$ и $F^*_{3v_3'}$ сервантна в Q^*_p, следовательно, и $F^*_{3v_3'}/F^*_{2v_2'}$ - полна.

Пусть $x \in \Gamma_2/z$. Докажем, что для любого n существует $y \in \Gamma_2/z$ такой, что $x = ny$. Пусть $a \in F_2$, $v_3'(a) = v_2'(a) = x$, в Γ_3/z существует y такой, что $x = ny$; пусть $b \in F_3$, $v_3'(b) = y$, $v_3'(b^n) = ny = x$, $v_3'(a/b^n) = 0$; пусть $\bar{c} \in F_{3v_3'}$ таков, что образ a/b^n в $F_{3v_3'}$ равен $\bar{c}$; пусть $\bar{c}' \in F_{2v_2'}$ таков, что $\bar{c} = \bar{c}'\bar{d}^n$. Такое $\bar{c}'$ найдется, ввиду доказанного выше свойства полноты $F^*_{3v_3'}/F^*_{2v_2'}$. Тогда $a = \varepsilon c'(bd)^n$, $c' \in F_2$, ε - такой элемент в F_3, что его образ в $F_{3v_3'}$ равен единице. Тогда по лемме Гензеля $\varepsilon = \eta^n$. Итак, $a = c'(\eta bd)^n$, следовательно, в F_3 разрешимо уравнение $c'x^n - a = 0$, c', $a \in F_2$; ввиду алгебраической замкнутости F_2 в F_3, существует $d \in F_2$, такой, что

$$c'd^n = a; \quad x = v_2'(a) = v_2'(c'd^n) = v_2'(c') + v_2'(d^n) = nv_2'(d),$$

итак, $v_2'(d) \in \Gamma_2$ желаемый.

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\langle F, v, \Gamma \rangle$ удовлетворяет системе аксиом K_i, то и максимальное непосредственное расширение также удовлетворяет системе аксиом K_i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поле вычетов и группа нормирования - одни и те же, поэтому выполнимость аксиом из групп 1,2,3,5p тривиальна. Выполнимость четвертой группы аксиом в случаях K_1, K_2 следует из справедливости леммы Гензеля для максимальных расширений (лемма 2). В случае K_{3p} это следует из справедливости аксиом четвертой группы для Q_p.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\langle F, v, \Gamma \rangle$ удовлетворяет системе аксиом K_i и пусть $F' \subseteq F$ алгебраически замкнуто в F и содержит элемент $c \in F'$ такой, что $v(c)$ есть ми-

нимальный положительный элемент группы Γ. Тогда $\langle F', v', \Gamma' \rangle$, v' - нормирование, индуцированное на F' нормированием v, а Γ' - соответствующая подгруппа группы также удовлетворяет системе аксиом K_i.

Доказательство аналогично доказательству второго утверждения предложения I.

5. Основные теоремы

ТЕОРЕМА I. Система аксиом K_i $(i=1,2,3p)$, рассматриваемая в сигнатуре σ_i, модельно полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться методами А.Робинсона [I4]. Пусть $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle \subset \langle F_2, v_2, \Gamma_2 \rangle$ как модели сигнатуры σ_i, $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$ и $\langle F_2, v_2, \Gamma_2 \rangle$ удовлетворяют системе аксиом K_i. Пусть φ - примитивное предложение сигнатуры σ_i, определенное в первой модели и истинное во второй. Нам нужно доказать, что φ истинно в первой модели. φ имеет вид: $\exists y_1 \ldots y_n Z(y_1, \ldots, y_n)$, Z - не содержит кванторов. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ - те элементы $\langle F_2, \Gamma_2 \rangle$, для которых истинно $Z(a_i, \ldots a_n)$. Тогда существует конечное расширение $F_1(b_1, \ldots, b_r)$ в F_2 такое, что φ истинно в $\langle F_1(b_1, \ldots, b_r), v_1', \Gamma_1' \rangle$.

Рассмотрим алгебраическое замыкание F_3 поля $F_1(b_1, \ldots b_r)$ в F_2; v_3 и Γ_3 - соответственно ограничение нормирования v и подгруппа Γ_2. По предложению I $\langle F_3, v_3, \Gamma_3 \rangle$ удовлетворяет системе аксиом K_i и φ справедливо в $\langle F_3, v_3, \Gamma_3 \rangle$. F_3 имеет конечную степень трансцендентности над F_1. Покажем, что достаточно ограничиваться рассмотрением случая, когда степень трансцендентности равна I.

Рассмотрим последовательность полей $F_1 = F^{(0)} \subseteq F^{(1)} \subseteq \ldots \subseteq F_3$, причем все $F^{(s)}$ алгебраически замкнуты в F_3 и $F^{(k+1)}$ имеет степень трансцендентности I над полем $F^{(k)}$. Пусть $F^{(k+1)}$ - наименьшее поле, для которого φ выполняется. Тогда рассмотрим пару $F^{(k)} \subseteq F^{(k+1)}$ и будем иметь пару полей (которые вместе с индуцированными нормированиями и соответсвующими группами нормирований удовлетворяют системе аксиом K_i по предложению I) и предложение φ такое, что φ справедливо в $F^{(k+1)}$ (по определению $F^{(k+1)}$), но не справедливо в $F^{(k)}$, причем степень трансцендентности $F^{(k+1)}$ над $F^{(k)}$ равна I. Поэтому в дальнейшем всегда предполагается, что F_2 имеет степень трансцендентности I над F_1 (F_2 не может быть алгебраическим над F_1, так как, по предложению I, F_1 алгебраически замкнуто в F_2).

Рассмотрим системы аксиом K_1 и K_2. Возможны три случая:

I. $\langle F_2, v_2, \Gamma_2 \rangle$ есть непосредственное расширение $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$. Пусть $c \in F_2 \setminus F_1$, c – трансцендентный элемент над F_1. Так как F_1 алгебраически замкнуто в F_2, то F_2 алгебраично над $F_1(c)$. По теореме I из [8] c есть предел некоторой псевдосходящейся последовательности $\{a_\tau\}$ элементов из F_1, не имеющей предела в F_1. Заметим, что последовательность $\{a_\tau\}$ есть последовательность трансцендентного типа [8], так как, в противном случае, по теореме 3 из [8] $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$ допускало бы непосредственное алгебраическое расширение, что противоречит алгебраической полноте $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$.

Пусть $K^* = K_i \cup N$ (N – диаграмма модели $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$) $\cup \{a \neq c$ для всех $a \in F_1$, $v(c-a) = b$, $b \in \Gamma_1$, $a \in F_1$ для всех справедливых равенств такого типа $\}$. Пусть $\langle F, v, \Gamma \rangle$ – модель системы аксиом K^*. Можно считать, что $F_1 \subseteq F$. Пусть $\bar{c} \in F$ удовлетворяет написанным выше аксиомам для c.

Рассмотрим $F_1(\bar{c})$. Так как $v(c-a) = v(\bar{c}-a)$, то $\bar{c}$ – также предел последовательности $\{a_\tau\}$, по теореме 2 из [8]; $F_1(c)$ и $F_1(\bar{c})$ аналитически изоморфны над F_1. Пусть F' – алгебраическое замыкание $F_1(\bar{c})$ в F. Тогда F' есть максимальное непосредственное алгебраическое расширение $F_1(\bar{c})$, потому что $\langle F', v' \rangle$ удовлетворяет системе аксиом K_i и, в частности, алгебраически полно. Но и F_2 есть максимальное непосредственное алгебраическое расширение $F_1(c)$. Ввиду изоморфизма $F_1(\bar{c})$ и $F_1(c)$ и леммы 7, F' и F_2 аналитически изоморфны над F_1. Следовательно, φ истинно в $\langle F, v, \Gamma \rangle$.

Итак, $K_i \cup N \cup \{a \neq c,\ v(c-a) = b\} \vdash \varphi$

или $K_i \cup N \vdash \mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} (c \neq a_i) \mathop{\&}\limits_{i=k+1}^{e} (v(c-a_i) = b_i) \rightarrow \varphi$,

или $K_i \cup N \vdash \exists x (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} (x \neq a_i) \mathop{\&}\limits_{i=k+1}^{e} v(x-a_i) = b_i) \rightarrow \varphi$.

Для доказательства справедливости φ в $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$ достаточно показать, что $\exists x (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} (x \neq a_i) \mathop{\&}\limits_{i=k+1}^{e} (v(x-a_i = b_i))$ справедливо в $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$. Из бесконечности поля вычетов и рассуждений А.Робинсона ([14] стр. 56–59) следует справедливость этого предложения в $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$.

II. Расширяется поле вычетов, то есть $F_{2v_2} \supset F_{1v_1}$. Тогда $\Gamma_1 = \Gamma_2$, так как в случае расширения степени трансцендентности I либо расширяется поле вычетов, либо группа нормирования, либо ни то, ни другое не расширяется, а если расширяются, то не одновременно.

Имея в виду случай I, можно предполагать, что $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$ мак-

симально, то есть оно не допускает собственных непосредственных расширений. Действительно, пусть $\langle F, v, \Gamma_1\rangle$ – максимальное непосредственное расширение $\langle F_2, v_2, \Gamma_2\rangle$ и $\langle \bar F, \bar v, \Gamma_1\rangle$ – подполе в $\langle F, v, \Gamma_1\rangle$, являющееся максимальным непосредственным расширением $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$. Имеем $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle \subset \langle \bar F, \bar v, \Gamma_1\rangle \subset \langle \bar F F_2, v', \Gamma_1\rangle \subset \langle F, v, \Gamma_1\rangle$, $\langle F, v, \Gamma_1\rangle$ удовлетворяет аксиомам K_i (предложение 2). Тогда и замыкание $\bar{\bar F}$ поля $\bar F F_2$ в F также удовлетворяет аксиомам K_i, $\bar F F_2$ имеет степень трансцендентности I над $\bar F$, следовательно, и $\bar F$ имеет степень трансцендентности I над $\bar{\bar F}$. Итак,

$$\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle \begin{matrix} \subset \langle \bar F, \bar v, \Gamma_1\rangle \subset \\ \subset \langle F_2, v_2, \Gamma_2\rangle \subset \end{matrix} \langle \bar{\bar F}, \bar{\bar v}, \Gamma_1\rangle ,$$

$\mathcal{Y}$ справедливо в $\langle F_2, v_2, \Gamma_2\rangle$, а следовательно, и в $\langle \bar{\bar F}, \bar{\bar v}, \Gamma_1\rangle$; но если бы $\mathcal{Y}$ было справедливо в $\langle \bar F, \bar v, \Gamma_1\rangle$, то, по случаю I, $\mathcal{Y}$ было бы справедливо и для $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$. Итак, нужно рассматривать $\langle \bar F, \bar v, \Gamma_1\rangle \subset \langle \bar{\bar F}, \bar{\bar v}, \Gamma_1\rangle$, причем $\langle \bar F, \bar v, \Gamma_1\rangle$ максимально.

Пусть $L_1 \subset F_1$ – поле представителей для поля вычетов и $F_1 = L_1(t^{\Gamma_1}, c_{\alpha,\beta} \in L_1)$ – поле формальных степенных рядов (так как $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$ максимально, ввиду результатов И.Капланского [8]). Пусть $L_2 \supset L_1$ – поле представителей для поля вычетов F_{2v_2}. Пусть $c \in L_2 \setminus L_1$.

Рассмотрим

$$K^* = \begin{cases} K_1 \cup N \cup \{v(c-\ell) = 0 \text{ для всех } \ell \in L_1\}, \\ K_2 \cup N \cup \{v(c-\ell) = 0, c < \ell, c > \ell \text{ для всех } \ell \in L_1 \text{ и всех верных отношений} \end{cases}$$

указанного вида, отношение порядка – это то отношение, которое определяется структурой вещественно замкнутого поля $\}$.

Пусть $\langle F, v, \Gamma\rangle$ – модель K^*. Можно считать, что $F_1 \subset F$. Рассмотрим $L \supseteq L_1$ – поле представителей для поля вычетов F_v, L – собственное расширение поля L_1, ввиду существования $\bar c$, $v(\bar c - \ell) = 0$ для всех $\ell \in L_1$. Пусть $\bar{\bar c} \in L \setminus L_1$, причем $\bar{\bar c}$ удовлетворяет всем неравенствам, которым удовлетворял c (в случае K_2). Рассмотрим $F_1(\bar{\bar c})$. Очевидно, что группой нормирования $F_1(\bar{\bar c})$ будет Γ_1. Пусть F' – алгебраическое замыкание $F_1(\bar{\bar c})$ в F. Тогда F' и F_2 аналитически изоморфны над F_1. Достаточно рассмотреть максимальные непосредственные расширения F_2 и F'. Поля вычетов у них изоморфны, причем при соответствии $c \to \bar{\bar c}$, так как в случае K_1 это просто алгебраические замыкания простых трансцендентных расширений одного и того же алгебраически замкнутого поля, а в случае K_2 – вещественные замыкания двух изоморфных упорядоченных полей, а в качестве t^{Γ_1} можно взять имеющиеся уже элементы в F_1. Так что существует изоморфизм этих расширений, тождественный на F_1 и переводящий c в $\bar{\bar c}$, F_2 и F' будут алгебраи-

чески замкнуты в этих расширениях (предложение I) и, следовательно, аналитически изоморфны над F_1.

Итак, $K^* \vdash Y$.

а) $K_1 \cup N \vdash \exists x(\mathop{\&}_{i=1}^{k}(v(x-e_i)=0)) \to Y$, $(\exists x)(\mathop{\&}_{i=1}^{k}(v(x-e_i)=0)$

тривиально выполнимо в $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$, так как поле вычетов бесконечно. Следовательно, Y выполнимо в $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$.

б) $K_2 \cup N \vdash \exists x(\mathop{\&}_{i=1}^{k} v(x-e_i)=0 \mathop{\&}_{i=k+1}^{s} x<e_i \mathop{\&}_{i=s+1}^{t} x>e_i) \longrightarrow Y$.

Но в поле представителей L_1 поля вычетов F_{1v_1}, которое вещественно замкнуто, найдется элемент $x \neq e_i$, $i=1,\dots,k$ и $x<e_i$, $i=k+1,\dots,s$, $x>e_i$, $i=s+1,\dots,t$ так как эта система разрешима в некотором вещественно замкнутом расширении поля L_1 (см. [I4], стр. 45).

Случай П рассмотрен.

Ш. Поля вычетов совпадают, но $\Gamma_2 \supset \Gamma_1$.

Так как поле F_2 имеет степень трансцендентности I над полем F_1, то Γ_2/Γ_1 имеет рациональный ранг, равный I (он не больше I, ввиду следствия на стр. 68 в [7], а по лемме 9 он не меньше I).

Пусть $c \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$. Тогда любой элемент из Γ_2 однозначно представим в виде $d+r\frac{c-k_n a}{n}$, r – целое, n – натуральное >0, $(r,n)=1$, k_n – целое ($0 \leq k_n < n$) такое, что $c-k_n a$ делится на n, $d \in \Gamma_1$, a – наименьший положительный элемент групп Γ_1 и Γ_2. Будем, как и в случае П, предполагать, что $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$ максимально.

Пусть $K^* = K_1 \cup N \cup \{d<c, c<d, \exists y(c-k_n a=ny))$ для всех $d \in \Gamma_1$, $n>0$, и всех отношений указанного вида, справедливых для c в $\Gamma_2\}$.

Пусть $\langle F, v, \Gamma\rangle$ – модель K^*, $F_1 \subseteq F$, пусть $\bar{c} \in \Gamma$ удовлетворяет всем аксиомам для c. Тогда $\Gamma_1(\bar{c}) \supset \Gamma_1$, пусть $t \in F$ таково, что $v(t)=\bar{c}$. Пусть F' – замыкание $F_1(t)$ в F, v' и Γ' – соответственно индуцированное нормирование и группа этого нормирования. Итак, F' имеет степень трансцендентности I над F_1, $\Gamma' \supset \Gamma(\bar{c})$ и так как для $\bar{c}$ выполняются условия $\exists y(c-k_n a=ny)$ (в Γ), и Γ' – регулярная группа (и подгруппа Γ), то Γ' изоморфна Γ_2 (как в доказательстве леммы I0).

Покажем, что условиями $F_1 \subset F'$, $\Gamma' \cong \Gamma_2$ и F', имеющей степень трансцендентности I над F, $\langle F', v', \Gamma'\rangle$ определяется однозначно с точностью до аналитической эквивалентности над F_1. Так как $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$ максимально, то $F_1 = L_1(t^{\Gamma_1}; c_{\alpha,\beta} \in L_1)$, L_1 – поле представителей для поля вычетов. Покажем, что такое представление можно выбрать всегда так, что $c_{\alpha,\beta}=1$ для всех α, β. Действительно, $L_1^*\{t^\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_1}$ есть расширение мультипликативной группы поля L_1 с помощью группы Γ_1, но L_1^* – либо полная группа (в

случае K_1), либо имеет вид $Z_2 \times S$, где S – полная группа (в случае K_2). В обоих случаях любое расширение L_1^* с помощью группы без кручения расщепляемо, а это и означает, что можно выбрать t^α так, что $c_{\alpha,\beta}=1$. Более того, в F' можно расширить множество t^{Γ_1} до t^{Γ_2} так, что $c_{\alpha,\beta}=1$ ($\alpha,\beta \in \Gamma_2$). Это можно доказать так: дополним t^{Γ_1} до t^{Γ_2} каким-нибудь способом (например, как у Капланского [8] лемма 13 стр. 315). Тогда мультипликативную группу F'^* можно представить в виде $F'^* \cong E \times E'$, где $L_1^* \subset E'$ и $E'/L_1^* \cong \Gamma_2$, а E – группа единиц, $E' \supset E'' \supset L_1^*$, причем $E''/L_1^* \cong \Gamma_1$ и $E'' = L_1^* \times \Gamma_1$. Итак, $E'/L_1^* \times \Gamma_2 \cong R$.

Рассмотрим $Ext(R, L_1^* \times \Gamma_1)$. $Ext(R, L^* \times \Gamma_1) = Ext(R, L_1^*) \times Ext(R, \Gamma_1) = Ext(R, \Gamma_1)$, то есть любое расширение $L_1^* \times \Gamma_1$ с помощью R индуцируется некоторым расширением Γ_1 с помощью R, следовательно, $\Gamma'^* \cong E \times L_1^* \times \tilde{\Gamma}$, но так как $F'^*/E \times L_1^* \cong \Gamma_2$, то $\tilde{\Gamma} \cong \Gamma_2$.

Итак, можно выбрать t^{Γ_2} так, что $c_{\alpha,\beta}=1$ для всех $\alpha,\beta \in \Gamma_2$, причем $t^{\Gamma_1} \subset t^{\Gamma_2}$. Рассмотрим максимальное расширение $\langle F', v', \Gamma_2 \rangle$. Это поле $L_1(t^{\Gamma_2})$, причем $L_1(t^{\Gamma_1}) = F_1$ и F' есть замыкание $F_1(t^c)$ в $L_1(t^{\Gamma_2})$. Аналогично рассматривая максимальное расширение $\langle F_2, v_2, \Gamma_2 \rangle$, получаем, что F_2 изоморфно алгебраическому замыканию $F_1(t^c)$ в $L_1(t^{\Gamma_2})$. Итак, F' и F_2 аналитически изоморфны над F_1. Следовательно, в $\langle F', v', \Gamma_2 \rangle$, а также в $\langle F, v, \Gamma \rangle$ выполняется $\mathcal{Y}$.

$$K^* \vdash \mathcal{Y},\ K_i \cup N \vdash (\exists x)(\mathop{\&}_{i=1}^{k} x < a_i \mathop{\&}_{i=k+1}^{e} a_i < x \mathop{\&}_{i=e+1}^{s} (\exists y)(x - k_{n_i} a = n_i y)) \to \mathcal{Y}.$$

Так как уравнение

$$(\exists x)(\mathop{\&}_{i=1}^{k} (x < a_i \mathop{\&}_{i=k+1}^{e} a_i < x \mathop{\&}_{i=e+1}^{s} (\exists y)(x - k_{n_i} a = ny))$$

разрешимо в некотором регулярном дискретно упорядоченном расширении Γ_1, то оно разрешимо и в Γ_1 (лемма 10). Следовательно, $\mathcal{Y}$ справедливо в $\langle F_1, v_1, \Gamma_1 \rangle$.

В случаях K_1 и K_2 теорема доказана.

В случае системы аксиом $K_{зр}$ имеем также три возможности:

I. $\langle F_2, v_2', \Gamma_2/Z \rangle$ непосредственное расширение $\langle F_1, v_1', \Gamma_1/Z \rangle$.

Доказательство в этом случае аналогично доказательству в случае I, так как там используются только факты алгебраической полноты (что выполняется в нашем случае по лемме 3) и бесконечность поля вычетов.

II. Расширяется поле вычетов $F_{1v_1'}$, $\Gamma_2/Z = \Gamma_1/Z$.

Как и выше, можно предполагать, что $\langle F_1, v_1', \Gamma_1/Z \rangle$ максимально. Рассмотрим в F_1 поле L_1 представителей для поля вычетов $F_{1v_1'}$. Пусть $L_2 \supset L_1$ – поле представителей $F_{2v_2'}$, $c \in L_2 \setminus L_1$. Пусть $K^* = K_{зр} \cup N \cup$

$\cup\{v(c-\ell)=n_\ell$, для всех $\ell\in L_1$, $n_\ell\in Z$ и всех истинных для C условий такого вида $\}$.

Пусть $\langle F, v, \Gamma\rangle$ - модель системы аксиом K^* , $F_1\subseteq F$,пусть L - поле представителей для $F_{v'}$, причем $L\supset L_1$; так как в F существует элемент $\bar{c}$ такой, что $v(\bar{c}-\ell)=n_\ell$ для всех $\ell\in L$, $n_\ell\in Z$, то и в поле представителей L найдется элемент $\bar{\bar{c}}$ и притом единственный с желаемыми свойствами.

Пусть F_3 - алгебраическое замыкание $F_1(\bar{\bar{c}})$ в F . Тогда $\langle F_3, v_3, \Gamma_1\rangle$ аналитически эквивалентна $\langle F_2, v_2, \Gamma_2\rangle$ над F_1 .Это показывается, как и в вышерассмотренном случае П (нужно воспользоваться тем, что если $L_1\subset Q_p$, то элемент $c\in Q_p$ с условиями $v(c-\ell_i)=n_{\ell_i}$ для всех $\ell_i\in L$ единствен , если только он существует).

Итак, $K^*\vdash Y$, $K_{зр}\cup N\vdash\exists x(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} v(x-\ell_i)=n_{\ell_i})\longrightarrow Y$.

Покажем, что $\exists x(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} v(x-\ell_i)=n_{\ell_i})$ истинно в F_1 , при условии, что оно было истинно в некотором расширении.

Рассмотрим в F_1 поле представителей L_1 поля вычетов $F_{1v_1'}$. L_1 - алгебраически замкнутое в Q_p подполе этого поля. Нужно найти x такой, что $v(x-\ell_i)=n_{\ell_i}$ $(i=1,\dots,k)$, причем известно , что эта система разрешима в некотором расширении $L_1\subset L_2\subset Q_p$. Как у А.Робинсона ([I4] стр. 56-59) нашу систему приведем к виду:

$$\begin{cases} v(y)=0\ , \\ v(y-c_i)=0\ ,\ v(c_i)=0\ , \text{ причем эта система разрешима в } L_2\ . \end{cases}$$

Рассмотрим y , являющийся решением этой системы в L_2 , и пусть $0<k<p$ таково, что $v(y-k)>0$; тогда,очевидно, и k есть решение этой системы, но k принадлежит и L_1 . Итак, Y справедливо в $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$.

Ш. Поле вычетов не расширяется, но расширяется группа нормирования $\Gamma_2\supset\Gamma_1$.

Используя случаи I и П, можно считать, что $\langle F_1, v_1, \Gamma_1\rangle$ максимально, то есть $F_{1v_1'}\cong Q_p$ и $\langle F_1, v_1', \Gamma_1/Z\rangle$ - поле формальных степенных рядов $Q_p(t^{\Gamma_1/Z}, c_{\alpha,\beta})$. Пусть, как и в вышерассмотренном случае Ш, $c\in\Gamma_2\setminus\Gamma_1$ и k_n - такие числа $0\leq k_n<n$,что $\exists y(c-k_n a=ny)$.

Пусть $K^*=K_{зр}\cup N\cup\{\alpha<c, c<\alpha, \exists y(c-k_n a=ny)$, для всех $\alpha\in\Gamma_1$, натуральных $n>0$ и всех верных для c отношений указанного вида $\}$.

Пусть $\langle F, v, \Gamma\rangle$ - модель K^*, $F_1\subset F$, $\Gamma\subset\Gamma_1$. Пусть $\bar{c}\in\Gamma\setminus\Gamma_1$ удовлетворяет всем условиям на c , пусть $t\in F\setminus F_1$, $v(t)=\bar{c}$. Рассмотрим $F_1(t)$; $F_1(t)$ имеет в качестве группы нормирования $\Gamma_1\{\bar{c}\}$ (по лемме 8); тогда F' , алгебраическое замыкание $F_1(t)$

в F, имеет в качестве группы нормирования группу Γ', изоморфную над Γ_1 группе Γ_2 (Γ' - регулярная группа по предложению I и содержит $\bar{C}$, удовлетворяющий условиям, которые однозначно определяют регулярное расширение рационального ранга I над Γ_1).

Покажем, что F_2 и F' аналитически эквивалентны над F_1.

В представлении $F_1 = Q_p(t^{\Gamma_1/Z}, c_{\alpha,\beta})$ можно считать $c_{\alpha,\beta} = p^{n_{\alpha,\beta}}$. Действительно, $F_1^* = \{Q_p^*, t^\alpha;\ \alpha \in \Gamma_1/Z\} \times E$, E - группа единиц $\langle F_1, v_1', \Gamma_1/Z\rangle$, полная по лемме Гензеля. Имеем

$$0 \subset Q_p^* \subset \{Q_p^*, t^\alpha;\ \alpha \in \Gamma_1/Z\},\ \{Q_p^*, t^\alpha;\ \alpha \in \Gamma_1/Z\}/Q_p^* \cong \Gamma_1/Z,$$

$$Q_p^* = Z_{p-1} \times \varprojlim Z_{p\alpha} \times Z \quad (p \neq 2) \quad Q_2^* = Z_2 \times \varprojlim Z_{2\alpha} \times Z,$$

где $Z = \{p^n\}_{n=0,\pm1,\dots}$. Рассмотрим $Ext(\Gamma_1/Z, Q_p^*)$;

$$Ext(\Gamma_1/Z, Q_p^*) = Ext(\Gamma_1/Z, Z_{p-1}\ (\text{или } Z_2)) \times$$

$$\times Ext(\Gamma_1/Z, \varprojlim Z_{p\alpha}) \times Ext(\Gamma_1/Z, Z),\ Ext(\Gamma_1/Z, Z_1) = 0.$$

ЛЕММА. Пусть S - полная группа без кручения. Тогда $Ext(S, \varprojlim Z_{pn}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \to \varprojlim Z_{p\alpha} \to A \to S \to 0$ - точная последовательность. Построим гомоморфизм A в $\varprojlim Z_{p\alpha}$. Пусть $\varprojlim Z_{p\alpha} \subset A$ отображается тождественно. Зафиксируем $1 \in \varprojlim Z_{p\alpha}$, для любого элемента $a \in A$, a сравнимо с $(a_n p^n + \dots + a_0)1 \in A$ для некоторых $a_1, \dots, a_n (0 \le a_i < p)$ в фактор-группе $A/p^n A$; поставим в соответствие элементу a элемент $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots$, принадлежащий $\varprojlim Z_{p\alpha}$. Нетрудно проверить, что это отображение есть гомоморфизм. Рассмотрим ядро этого гомоморфизма. Легко видеть, что это ядро полно. Следовательно, последовательность $0 \to \varprojlim Z_{p\alpha} \to A \to S \to 0$ расщепляема, что и доказывает лемму.

Итак, $Ext(\Gamma_1/Z, Q_p^*) = Ext(\Gamma_1/Z, Z)$, то есть любое расширение Q_p^* с помощью Γ_1/Z индуцируется расширением Z с помощью Γ_1/Z, это и означает, что можно выбрать $c_{\alpha,\beta} = p^{n_{\alpha,\beta}} \in Z$, причем, очевидно, что $\{Z, t^{\Gamma_1/Z}\}$ изоморфна Γ_1.

В F_2 и F' выберем расширение $\{t^{\Gamma_2/Z}, p^{n_{\alpha,\beta}}\} \supset \{t^{\Gamma_1/Z}, p^{n_{\alpha,\beta}}\}$ с одинаковыми $n_{\alpha,\beta}$. Это можно сделать ввиду изоморфизма Γ_2 и Γ' и равенства $Ext(\Gamma_2/Z, Q_p^*) = Ext(\Gamma_1/Z, Z)$ с условием $\{Z, t^{\Gamma_2/Z}, p^{n_{\alpha,\beta}}\} \cong \Gamma_2 \cong \Gamma'$.

Дальнейшие рассуждения проводятся, как и в вышерассмотренном случае Ш.

Итак, F_2 и F' аналитически эквивалентны над F_1.

$$K^* \vdash Y,\ K_{3p} \cup N \vdash \exists x (\mathop{\&}_{i=1}^{k} d_i < x \mathop{\&}_{k+1}^{s} x < d_i \mathop{\&}_{i=s+1}^{\ell} \exists y (x - K_{n_i} \cdot a = ny)) \longrightarrow Y.$$

Но формула

$$\exists x(\mathop{\&}_{i=1}^{k} d_i < x \mathop{\&}_{i=k+1}^{s} x < d_i \mathop{\&}_{i=s+1}^{l} \exists y\,(x - K_{n_i} a = ny))$$

справедлива в регулярном расширении группы Γ_1, следовательно, она справедлива и в Γ_1 (смотри доказательство леммы I0).

Доказательство теоремы закончено.

ТЕОРЕМА 2. Система аксиом K_i $(i=1,2,3p)$ определяет полную теорию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что ввиду теоремы I, существует минимальная модель (prime model в терминологии А.Робинсона [I4]).

В случае K_1 рассмотрим в поле формальных степенных рядов от одной переменной x над полем A всех алгебраических чисел (минимальным алгебраически замкнутым полем) алгебраическое замыкание поля $A(x)$. Это поле с естественным нормированием по предложению 3 удовлетворяет системе аксиом K_1. Нетрудно видеть, что в любом поле, удовлетворяющем системе аксиом K_1, найдется подполе, изоморфное построенному. Для этого достаточно взять элемент $\bar{x}$, норма которого равна наименьшему положительному элементу группы нормирования, и рассмотреть замыкание $A(\bar{x})$ (A - содержится в рассматриваемом поле, потому что существует поле представителей для поля вычетов) в нашем поле, $\bar{x}$ – трансцендентный элемент над A, следовательно, $A(x)$ и $A(\bar{x})$ изоморфны (вместе с нормированиями). По лемме 7 их максимальные непосредственные алгебраические расширения, которые и являются алгебраическими замыканиями $A(x)$ и $A(\bar{x})$ в соответствующих полях, изоморфны.

В случае K_2 рассмотрение аналогично, только вместо поля A необходимо рассмотреть поле $B \subset A$ всех вещественных алгебраических чисел.

В случае K_{3p} минимальной моделью является алгебраическое замыкание поля рациональных чисел в Q_p - поле p - адических чисел. Из рассуждений леммы 6′ следует, что в любом поле, удовлетворяющем системе аксиом, K_{3p} есть подполе, изоморфное вместе с нормированием подполю поля Q_p, алгебраически замкнутому в Q_p. Отсюда следует, что указанное выше поле содержится в любой модели системы аксиом K_{3p}. Остается заметить, что алгебраическое замыкание поля рациональных чисел в Q_p удовлетворяет аксиомам K_{3p}, что следует из предложения 3.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Теории: а) поля формальных степенных рядов от одной переменной над алгебраически замкнутым

полем характеристики 0, б) поля формально степенных рядов от одной переменной над вещественно замкнутым полем, в) поля Q_p p-адических чисел (для любого простого p), разрешимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что каждая из теорий K_i ($i=1,2,3p$) рекурсивно аксиоматизируема. В теореме 2 установлена полнота этих теорий, но рекурсивно аксиоматизируемые полные теории разрешимы. Известно [17], что указанные выше поля являются алгебраически полными относительно очевидных нормирований этих полей, группы нормирований этих полей изоморфны Z, то есть являются регулярными дискретно упорядоченными абелевыми группами. Следовательно, они являются моделями соответствующих K_i ($i=1,2,3p$).

Теорема доказана.

6. Следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Класс колец вычетов $\{Z/p^nZ\}_{n=0,1,\dots}$ для фиксированного простого числа p имеет разрешимую теорию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все кольца вычетов указанного вида и только они получаются путем факторизации кольца нормирования поля Q_p p-адических чисел (то есть кольца целых p-адических чисел) по главным идеалам. Поэтому существует очевидная эффективная процедура переработки формул теории указанного класса и формулы теории поля p-адических чисел (вместе с нормированием), которая перерабатывает истинные формулы в истинные и опровержимые в классе $\{Z/p^nZ\}_{n=0,1,\dots}$ в ложные на Q_p. Ввиду разрешимости теории поля, разрешима теория указанного класса колец.

СЛЕДСТВИЕ 2. Кольцо сходящихся рядов (в окрестностях нуля) с вещественными (комплексными) коэффициентами имеет разрешимую теорию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Рассмотрим поле частных указанного кольца, которое лежит в поле формальных степенных рядов над полем вещественных (комплексных) чисел. Из результатов, указанных в [12], следует, что поле алгебраически замкнуто в поле формальных степенных рядов, а из предложения 3 и теоремы 2 следует, что эти поля имеют одинаковые элементарные теории.

Теорема 3, последнее замечание и предложение 3 из [4] влекут желаемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Разрешима теория любого локального поля характеристики 0 с конечным полем вычетов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все такие поля есть конечные алгебраические расширения поля p -адических чисел.

Аналогично доказательству разрешимости поля p -адических чисел можно доказать, что р а з р е ш и м а теория абсолютно не разветвленного локального поля характеристики 0 с алгебраически замкнутым полем вычетов характеристики $p \neq 0$. В доказательстве нужно использовать алгебраическую компактность мультипликативной группы U единиц такого поля F , для установления равенства:

$$Ext(R, F^*) = Ext(R, Z) .$$

Поступила в редакцию
2.IУ. .1965 г.

Л и т е р а т у р а

I. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел, Наука, Москва (1964).

2. Гуревич Ю.Ш. Элементарные свойства упорядоченных абелевых групп, Алгебра и логика, Ш №I, 5-40, (1964).

3. Джекобсон Н. Теория колец, ИЛ, Москва, (1947).

4. Ершов Ю.Л. Неразрешимость некоторых полей, ДАН СССР (в печати).

5. Каргаполов М.И. Об элементарной теории абелевых групп, Алгебра и логика, I, № 6, 26-36, (1963).

6. Мальцев А.И. О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей, Сиб. мат. журнал, I, 7I-77, (1960).

7. Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, тП, ИЛ Москва, (1963).

8. Kaplanski I. Maximal fields with valuations. Duke Math.Journ vol.9, №2, 303-321 (1942).

9. Schilling O.F.G. Normal extension of relatively complete fields. Amer.J. of Math.,vol.65,№2,309-334, (1943).

10. Mac Lane S. The uniqueness of the power series representations of certain fields with valuations. Ann.of Math.,vol.39, 370-382 (1938).

11. Nagata M. On the theory of Henselian rings. Nagoya Math. Journ., vol.5, 45-58 (1953).

12. Nagata M. Local rings. Inter.tr. in math.,№13 (1962).

13. Nerode A. A decision method for p-adic integral zeroes of diophantine equations. Bull.Amer.M.S.,vol.69, №4, 513-577 (1963).

14. Robinson A., Complete theory. Amsterdam (1956).

15. Robinson A. Zakon E. Elementary properties of ordered Abelian groups. Tr.Amer.Math.Soc.,96, 222-236(1960)

16. Robinson R.M. Undecidable rings. Tr.Amer.Math.Soc.,70, 137-199, (1951).

17. Serre J.-P. Corps locaux. Paris,Hermann, (1962).

Примечание автора. После сдачи работы в редакцию, А.И.Мальцев сообщил мне о работах J.Ax'a , S.Kochen'a "Diophantine problems over local fields I,II,III",в которых среди других результатов доказаны и теоремы I, 2, 3 моей работы.Указанные работы J.Ax'a S.Kochen'a в периодической печати не опубликованы и присланы А.И.Мальцеву в ротапринтной форме (о них я узнал I0 апреля 1965 г.).

Методы доказательств J.Ax'a , S.Kochen'a и мои различны , в частности, J.Ax и S.Kochen в доказательстве используют континуум-гипотезу, исключая её потом с помощью результатов К.Гёделя.