

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ им. М.В. КЕЛДЫША

М.П. Галанин, В.В. Лукин

Разностная схема для решения двумерных задач
идеальной МГД на неструктурированных сетках

Москва — 2007

М.П. Галанин, В.В. Лукин

**Разностная схема для решения двумерных задач идеальной МГД на
неструктурированных сетках**

Аннотация

Построена разностная схема для решения двумерных нестационарных задач идеальной МГД. Использован прием расщепления по физическим процессам. Проведено последовательное построение схемы с использованием неструктурированных треугольных сеток. Полученная схема протестирована на ряде известных двумерных задач МГД.

M.P. Galanin, V.V. Lukin

**Finite-difference scheme for the two-dimensional ideal MHD problems using
unstructured grids**

Abstract

The finite-difference scheme for the two-dimensional non-stationary ideal MHD problems is constructed. Method of physical process division is used. Consistent construction of scheme using unstructured triangular grids is realized. The scheme is tested on several well-known two-dimensional MHD problems.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
3	Разностная схема	5
3.1	Расщепление по физическим процессам	5
3.2	Газовые уравнения в форме Эйлера	6
3.3	Уравнение Фарадея	7
3.4	Монотонизация схемы	8
3.5	Восполнение газовых переменных	10
3.6	Постановка граничных условий	10
4	Тестовые расчеты	12
4.1	Численная диссипация	12
4.2	Распространение циркулярно поляризованной альфвеновской волны	14
4.3	Задача Вгю-Ву	16
4.4	Вращение цилиндра в покоящейся среде	19
4.5	Вихрь Орзага-Танга	22
4.6	Регулярные и нерегулярные сетки	25
5	Заключение	26

1 Введение

В работе построена разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений идеальной магнитной гидродинамики (МГД) на неструктурированной треугольной сетке.

Одной из основных трудностей при построении схем для уравнений идеальной МГД в многомерном случае является необходимость соблюдения условия бездивергентности магнитного поля. Стандартные схемы для гиперболических систем [1] не позволяют в многомерном случае сохранить это свойство и приводят к накоплению магнитного заряда. Чтобы избежать нефизических значений величин (например, отрицательного давления), необходимо проводить удаление магнитного заряда [7], которое может оказаться достаточно трудоемким.

Другой подход состоит в непосредственной аппроксимации ротора в законе Фарадея изменения магнитного поля. Такой подход уже не позволяет решать МГД систему численно с помощью схем типа Годунова, и требует введения смещенных сеток. С другой стороны, решая отдельно уравнения, описывающие разные по природе и свойствам физические процессы, появляется дополнительная возможность выбора наиболее удобного и естественного способа описания каждого из этих процессов.

В работе проведено последовательное построение разностной схемы на неструктурированных треугольных сетках. Подобные сетки мало используются для решения МГД системы в консервативной форме прежде всего потому, что на подобных сетках сложность указанных процедур удаления магнитного заряда становится на порядок выше. Это связано с тем, что аппроксимация условия бездивергентности магнитного поля, достаточно простая и понятная на декартовой сетке, становится гораздо более неоднозначной при использовании, например, треугольных элементов.

В то же время, неструктурированные сетки особенно востребованы при решении задач в областях со сложной геометрией. Кроме того, подобный подход позволяет избежать зависимости точности схемы от геометрии начального распределения физических величин в расчетной области. В работе проведено построение разностной схемы для решения МГД задач на треугольных сетках общего вида, а также рассмотрен вопрос о влиянии процедуры

построения сетки на получаемое решение.

Полученные результаты тестовых расчетов показывают, что построенная таким образом схема оказывается достаточно эффективной и сравнима со схемами, основанными на консервативной форме МГД системы. Сравнение выполнено с результатами указанных схем на прямоугольных сетках.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00421).

2 Постановка задачи

Систему нестационарных уравнений идеальной магнитной гидродинамики составляют уравнения газовой динамики (уравнение неразрывности, законы сохранения импульса и энергии) и закон Фарадея изменения магнитного поля (далее везде выполнено правило суммирования по повторяющимся индексам, индексы i, j изменяются от 1 до 3):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \Phi(\mathbf{U}, \mathbf{B}), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.2)$$

где вектор консервативных газовых переменных $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T$, векторы потоков

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e + p)v \end{bmatrix},$$

правая часть газодинамической системы (функции типа источников-стоков)

$$\Phi(\mathbf{U}, \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \left(\frac{\partial B_x}{\partial x_i} + \frac{\partial B_i}{\partial x} \right) \\ B_i \left(\frac{\partial B_y}{\partial x_i} + \frac{\partial B_i}{\partial y} \right) \\ B_i \frac{\partial B_z}{\partial x_i} \\ \frac{\partial B_i}{\partial x_j} (v_i B_j - B_i v_j) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

ρ — плотность, $e = p/(\gamma - 1) + \rho\mathbf{v}^2/2$ — полная газовая энергия единицы объема, p — давление газа, вектор скорости $\mathbf{v} = [u, v, w]^T$, $\mathbf{v}^2 = u^2 + v^2 + w^2$, вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{B} = [B_x, B_y, B_z]^T$, $\mathbf{B}^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$, γ — показатель адиабаты. Все функции зависят от времени t и декартовых координат x и y , производные по z равны нулю.

При введении обозначений и записи уравнений принято предположение об идеальности газа, уравнение состояния которого имеет вид:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (2.4)$$

где ε — удельная внутренняя энергия.

Отметим, что при использовании приведенной формы закона Фарадея (2.2) нет необходимости дополнительно вводить в систему уравнений условие бездивергентности магнитного поля $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, т.к. при выполнении этого условия для начального распределения магнитного поля оно будет выполнено и в любой последующий момент времени. Действительно, чтобы доказать это достаточно применить оператор дивергенции к левой и правой частям уравнения (2.2).

Система уравнений (2.1)-(2.2) замыкается при задании начальных и граничных условий на функции плотности, скорости, магнитного поля и энергии.

3 Разностная схема

3.1 Расщепление по физическим процессам

При переходе с n временного слоя на $n + 1$ слой будем использовать следующую схему расщепления по физическим процессам [9]:

1. Газодинамическая система уравнений: $\mathbf{U}^n \mapsto \mathbf{U}^{n+1/2}$.
2. Закон Фарадея: $(\mathbf{U}^{n+1/2}, \mathbf{B}^n) \mapsto \mathbf{B}^{n+1}$.
3. Восполнение газовых переменных за счет действия электродинамических сил: $(\mathbf{U}^{n+1/2}, \mathbf{B}^{n+1}) \mapsto \mathbf{U}^{n+1}$.

На каждом этапе используются последние насчитанные значения величин. Таким образом, для вычисления газодинамических переменных на верхнем

временном слое необходимо сделать два шага (шаги 1 и 3), а для вычисления магнитного поля — один. Для повышения точности схемы относительно этапов 2 и 3 могут быть построены внешние итерации [11].

3.2 Газовые уравнения в форме Эйлера

На данном этапе решается однородная система газодинамических уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0. \quad (3.1)$$

Методы решения подобных систем подробно обсуждены в математической литературе, в частности, в работах [1] и [13]. Приведем только основные необходимые факты.

Система (3.1) является гиперболической, а матрицы Якоби потоков $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ диагонализируемы. Матрица Якоби потока $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathbf{v}^2 & (3 - \gamma)u & (1 - \gamma)v & (1 - \gamma)w & \gamma - 1 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ u\left(\frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathbf{v}^2 - h\right) & h - (\gamma - 1)u^2 & (1 - \gamma)uv & (1 - \gamma)uw & \gamma u \end{bmatrix},$$

где $h = (e + p)/\rho$ — энтальпия.

Матрица $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ может быть приведена к виду

$$\mathbf{A} = \Omega_R \Lambda \Omega_L,$$

где $\Lambda = \text{diag}[u - a, u, u, u, u + a]$, адиабатическая скорость звука $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$, матрица правых собственных векторов

$$\Omega_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ u - a & 0 & 0 & u & u + a \\ v & 1 & 0 & v & v \\ w & 0 & 1 & w & w \\ h - au & v & w & \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 & h + au \end{bmatrix},$$

матрица левых собственных векторов $\Omega_L = \Omega_R^{-1}$.

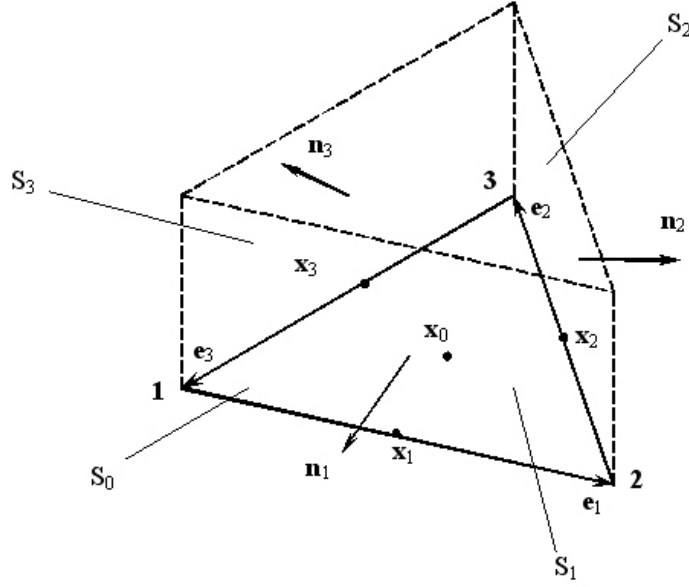


Рис. 1: Разностная ячейка.

Пользуясь приведенными данными, можно строить разнообразные численные схемы, основанные на приближенном решении задачи Римана на границе разностных ячеек — методы Куранта-Изаксона-Риса, Лакса-Фридрихса, HLL, HLLC. Применяя один из этих методов, получаем

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = P_U \mathbf{U}^n.$$

Ниже в тестовых расчетах используется метод HLLC, как дающий наиболее точный результат и лучше остальных удовлетворяющий условию монотонности, особенно важному при решении задач МГД.

3.3 Уравнение Фарадея

Получив вектор $\mathbf{U}^{n+1/2}$, фиксируем значения вектора скорости в вычислительных ячейках и аппроксимируем уравнение Фарадея. Для этого построим на разностной ячейке призму единичной высоты, проинтегрируем уравнение (2.2) по площадкам S_i (см. рис. 1) и воспользуемся формулой Стокса:

$$\iint_{S_i} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_i dS = \oint_{\partial S_i} \mathbf{v} \times \mathbf{B} d\mathbf{l}, \quad i = \overline{0, 3}. \quad (3.2)$$

Видно, что из (3.2) можно получить равенства для вычисления нормальных к площадкам S_i компонент вектора \mathbf{B} (смещенные сетки). Получаем

схему:

$$\partial_t B_z = \frac{1}{S_0} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \mathbf{e}_i), \quad (3.3)$$

$$\partial_t B_n^i = \frac{1}{l_i} ([\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_z^i - [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_z^{i+1}), \quad i = \overline{1, 3}, \quad i = 3 \Rightarrow i + 1 \mapsto 1, \quad (3.4)$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение векторов, ∂_t — обозначение разностной производной по времени, $[\cdot]_z^i$ вертикальная компонента вектора, заданного в i -й точке, l_i — длина i -й стороны ячейки. В правой части равенства (3.3) векторы \mathbf{v} и \mathbf{B} заданы в центрах сторон ячейки (точка \mathbf{x}_0), а в равенстве (3.4) — в угловых точках ячейки.

Таким образом, получаем значения B_z и B_n на новом временном слое. Для продолжения вычислений необходимо путем интерполяции получить значения B_z на ребрах ячейки, B_x, B_y в центре и вершинах ячейки. Значения B_x и B_y внутри ячейки получаются путем интерполяции B_n с использованием базисных функций Raviart-Thomas [12], обладающих свойством бездивергентности:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2S_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-1}), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$i = 1 \Rightarrow i - 1 \mapsto 3.$$

Вектор $\mathbf{b} = [B_x, B_y]^T$ в центре ячейки получаем из выражения:

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 B_n^i l_i \varphi_i(\mathbf{x}_0).$$

3.4 Монотонизация схемы

Схема вычисления магнитного поля в представленном виде не является монотонной, поэтому необходима процедура монотонизации. Она выполняется с помощью введения линейной реконструкции функций внутри разностных ячеек с использованием ограничителей на наклон. Такая реконструкция требуется при вычислении значений \mathbf{B} и \mathbf{v} в центрах ребер и в вершинах ячеек. Рассмотрим эту процедуру подробнее.

Пусть необходимо построить линейную реконструкцию функции ψ внутри ячейки G_0 с соседними ячейками $G_i, i = \overline{1, 3}$ (нумерация соответствует рис.1).

Известны значения сеточной функции в центрах ячеек ψ_i , $i = \overline{0, 3}$, радиус-векторы центров ячеек $\mathbf{y}^i = [y_1^i, y_2^i]^T$, $i = \overline{0, 3}$. Построим внутри ячейки G_i кусочно-линейное распределение сеточной функции в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi_i + (x_1 - y_1^i)\alpha_i + (x_2 - y_2^i)\beta_i, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in G_i$, а α_i и β_i – некоторые коэффициенты. Алгоритм построения α_i и β_i должен удовлетворять следующим условиям [1]:

- $\alpha_i = \alpha$ и $\beta_i = \beta$ для линейной функции $\psi(\mathbf{x}) = \psi_0 + \alpha x_1 + \beta x_2$;
- наклоны α_i и β_i должны быть ограничены таким образом, чтобы в одномерном случае схема переходила в TVD-схему.

Можно показать, что при определенных условиях этим требованиям удовлетворяет следующая процедура.

Решим следующие три системы линейных уравнений относительно $\alpha_0^{(i)}$ и $\beta_0^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \psi_0 + (y_1^i - y_1^0)\alpha_0^{(i)} + (y_2^i - y_2^0)\beta_0^{(i)} &= \psi_i, \\ \psi_0 + (y_1^{i+1} - y_1^0)\alpha_0^{(i)} + (y_2^{i+1} - y_2^0)\beta_0^{(i)} &= \psi_{i+1}, \\ i &= 1, 2, 3; \quad i = 3 \Rightarrow i + 1 \mapsto 1. \end{aligned}$$

Будем ограничивать полученные наклоны с помощью лимитера:

$$\alpha_0 = \text{minmod}(\alpha_0^1, \alpha_0^2, \alpha_0^3), \quad (3.6)$$

$$\beta_0 = \text{minmod}(\beta_0^1, \beta_0^2, \beta_0^3), \quad (3.7)$$

где лимитер

$$\text{minmod}(a, b, c) = \begin{cases} \min(|a|, |b|, |c|), & \text{если } \text{sign}(a) = \text{sign}(b) = \text{sign}(c), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пользуясь реконструкцией (3.5) с наклонами (3.6)-(3.7), находим значения функции ψ справа (ψ_R) и слева (ψ_L) от ребра ячейки. Значение сеточной функции на ребре далее можно получить как полусумму

$$\psi_{LR} = \frac{\psi_L + \psi_R}{2} \quad (3.8)$$

или как среднее по Роу

$$\psi_{LR}^{Roe} = \frac{\psi_L \sqrt{\rho_L} + \psi_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (3.9)$$

где ρ_L и ρ_R плотность газа соответственно слева и справа от ребра.

Процедура монотонизации с использованием формулы (3.9) оказывается более эффективной, чем с использованием (3.8). Вообще говоря, схемы типа Роу (с усреднением (3.9)) в полной постановке могут приводить к возникновению нефизичных ударных волн разрежения, существование которых в дифференциальном случае запрещает теорема Цемплена [16]. В данном же случае подобного эффекта не возникает, так как построенная разностная схема в целом обладает положительной схемной вязкостью, гасящей возникающие искажения.

3.5 Восполнение газовых переменных

После расчета переноса вещества по газодинамическим законам и вычисления магнитного поля \mathbf{V}^{n+1} необходимо учесть влияние электродинамических сил на структуру течения. Для этого используется разностная задача

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n+1/2}}{\tau} = \Phi(\mathbf{U}^{n+1/2}, \mathbf{V}^{n+1}). \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) интегрируется по разностной ячейке, в результате несложных преобразований получаем явную схему для вычисления \mathbf{U}^{n+1} .

3.6 Постановка граничных условий

Проведенные исследования показали, что численные методы решения задач МГД оказываются особенно критичны к аппроксимации граничных условий. Это связано прежде всего с тем, что возможные флуктуации значений газовых переменных при численном моделировании будут подхвачены и усилены действием магнитного поля. Другими словами, ошибки вычисления газовых переменных приводят к нефизической перестройке магнитного поля, которое само приводит к возникновению дополнительных течений в расчетной области.

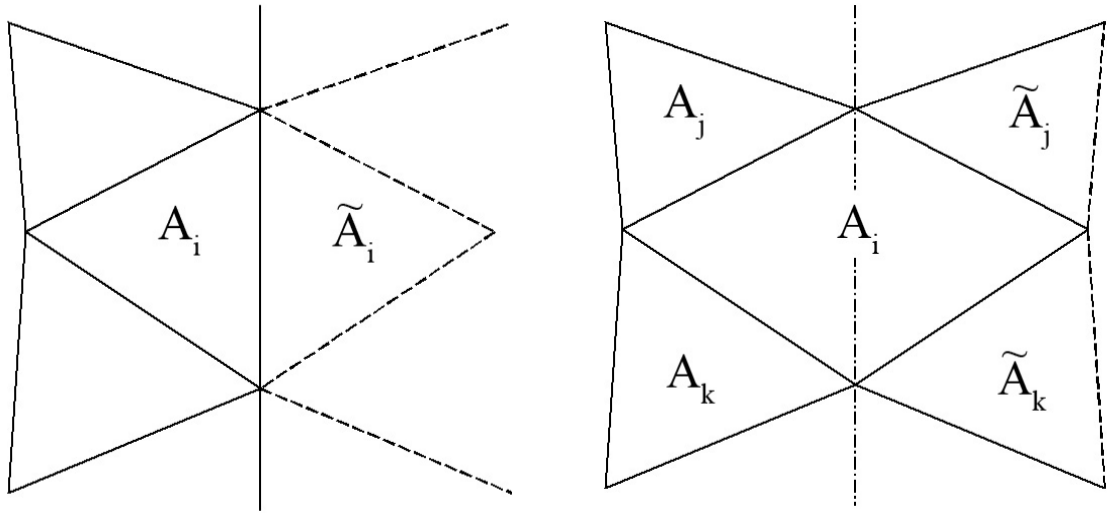


Рис. 2: Варианты аппроксимации величин на границе.

Основным подходом к аппроксимации граничных условий является построение фиктивных ячеек вне расчетной области, примыкающих одним ребром к граничным разностным ячейкам (рис. 2). В этом случае для значения A_i (здесь A — любая из консервативных газовых переменных) в граничной ячейке можно получить \tilde{A}_i в соседствующей фиктивной ячейке следующим образом:

1. $\tilde{A}_i = A_i$ в случае граничных условий, обеспечивающих вытекание газа из расчетной области ($\frac{\partial A}{\partial n} = 0$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная в направлении нормали к границе).
2. $\tilde{A}_i = f(\mathbf{x})$ в случае наперед заданного функцией $f(\mathbf{x})$ потока вещества через границу.
3. Из условия отражения потока газа в случае граничного условия — непроницаемой стенки.

Тем не менее при определенных условиях такая аппроксимация искажает геометрические особенности задачи. Например, при прохождении фронта волны, ортогонального границе с условиями первого типа, образуется нефизический сток вещества. Этого можно избежать, рассмотрев модифицированную процедуру аппроксимации (см. рис. 2, справа). При этом подходе отражением от границы строятся соответствующие фиктивные ячейки для ячеек

j и k , а i -я ячейка рассматривается как четырехугольная, газовые переменные в ней получаются по формулам конечнообъемной схемы типа Годунова. Заметим, что в случае граничных условий для магнитного поля подобная ситуация не возникает (что является упрощением относительно консервативной формы МГД-системы) и не требуется дополнительных процедур уточнения условий на границе.

4 Тестовые расчеты

Для оценки свойств построенной схемы рассмотрено несколько характерных тестовых задач МГД, тщательно описанных в литературе [7], [15], [3]. Далее принято обозначение для сеток $1/N$ ("один к N "), где N — примерное (характерное) число треугольников, приходящихся на единицу длины вдоль координатной оси Ox .

4.1 Численная диссипация

В отличие от разностных схем, реализуемых на декартовых сетках, данная схема является менее зависимой от направления распространения волн. Вообще говоря, для нерегулярных сеток (общий случай триангуляции Делоне) все направления равноправны, так что диссипация не зависит от угла между направлением распространения волны и координатными осями. Очевидно, что количественные характеристики схемы на регулярной сетке (с равносторонними треугольниками) должны улучшаться.

При построении схемы использованы TVD-подход для монотонизации и ограничитель `minmod`, что может увеличить диссипацию решения. Для исследования этого вопроса ниже решена тестовая задача о распаде альфвеновской волны [15].

Альфвеновская волна задается с помощью параметрических флуктуаций скорости и магнитного поля в области $[-r/2, r/2] \times [-r/2, r/2]$, где $r = 6$. Она распространяется вдоль вектора

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} \mathbf{e}_x + \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}} \mathbf{e}_y.$$

Угол между \mathbf{n} и осью y при $r = 6$ составляет 9.462° . Скорость волны

определяется с помощью параметра ξ по формуле

$$\mathbf{v} = (v_0 n_x - \xi n_y \cos \varphi) \mathbf{e}_x + (v_0 n_y + \xi n_x \cos \varphi) \mathbf{e}_y + \xi \sin \varphi \mathbf{e}_z,$$

где φ — фаза волны:

$$\varphi = \frac{2\pi}{n_y} \left(n_x x + n_y y - \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} t \right).$$

Магнитное поле задается в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & \left(B_0 n_x + \xi n_y \sqrt{4\pi\rho_0} \cos \varphi \right) \mathbf{e}_x + \\ & + \left(B_0 n_y - \xi n_x \sqrt{4\pi\rho_0} \cos \varphi \right) \mathbf{e}_y - \xi \sqrt{4\pi\rho_0} \sin \varphi \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Приведенные соотношения являются аналитическим решением системы (2.1)-(2.2), амплитуды волн в аналитическом случае не меняются с течением времени. Поэтому данное решение можно использовать для тестирования диссипативных свойств схемы, определяя на каждом временном шаге получаемую амплитуду численного решения.

При $t = 0$ задаются невозмущенные значения плотности и давления $\rho_0 = 1$ и $p_0 = 1$ соответственно. Использовались следующие значения параметров: $v_0 = 0$, $B_0 = 1$, $\xi = 0.2$, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. В расчетной области вводилась сетка $1/20$, вычисления проводились с числом Куранта $C = 0.4$, использованы периодические граничные условия.

В таблице 1 приведены данные по эволюции амплитуды вертикальной составляющей скорости w в зависимости от номера временного шага N_t , момента времени t . Вычислена относительная ошибка определения амплитуды

$$\delta_w(N_t) = |A_w(N_t) - A_w^0| / |A_w^0| = |\Delta A_w(N_t)| / |A_w^0|,$$

где $A_w(N_t)$ — численная амплитуда, $A_w^0 = 0.2$ — точная амплитуда, и ориентировочная скорость изменения амплитуды

$$R(N_t) = \frac{\Delta A_w(N_t)}{\Delta t}.$$

Приведенные данные указывают на появление осцилляций решения, возбуждаемых численным алгоритмом. Осцилляции эти, тем не менее, подавляются численной вязкостью схемы. Отметим, что сетка $1/20$ является очень

N_t	t	$A_w(N_t)$	$\delta_w(N_t)$	$R(N_t)$
500	1.89165	0.20099	$0.495 \cdot 10^{-2}$	0.000523
1000	3.78847	0.19295	$3.525 \cdot 10^{-2}$	-0.00424
1500	5.68167	0.19081	$4.595 \cdot 10^{-2}$	-0.00113
2000	7.57617	0.18365	$8.175 \cdot 10^{-2}$	-0.003779
2500	9.46377	0.18773	$6.135 \cdot 10^{-2}$	0.002161
3000	11.3563	0.17795	$11.025 \cdot 10^{-2}$	-0.005168
3500	13.2433	0.18381	$8.095 \cdot 10^{-2}$	0.003105
4000	15.1340	0.16838	$15.81 \cdot 10^{-2}$	-0.008161
4500	17.0155	0.17702	$11.49 \cdot 10^{-2}$	0.004592
5000	18.8923	0.16044	$19.78 \cdot 10^{-2}$	-0.008834
5500	20.7375	0.17071	$14.645 \cdot 10^{-2}$	0.00898
6000	22.0984	0.15531	$22.345 \cdot 10^{-2}$	-0.015945

Таблица 1: Численная амплитуда вертикальной составляющей скорости w и скорость ее изменения в зависимости от номера временного шага

грубой для задач МГД. В реальных вычислениях используются сетки $1/200$ и $1/400$, на которых численная вязкость схемы существенно уменьшается [1].

Сравнение с результатами, приведенными в [15], показывает, что построенная схема по величине вязкости сравнима с взвешенными безосцилляторными схемами (weighted essentially non-oscillatory scheme или WENO), хотя и уступает лучшим из них и методу PPML [6].

4.2 Распространение циркулярно поляризованной альфвеновской волны

Эта задача используется для сравнения точности численных схем на гладких решениях [7]. Она описывает распространение циркулярно поляризованной альфвеновской волны под углом $\alpha = 30^\circ$ к оси x в области $[0, 1/\cos \alpha] \times [0, 1/\sin \alpha]$. Начальные условия имеют вид:

$$\rho = 1, \quad v_{\parallel} = 0, \quad v_{\perp} = 0.1 \sin 2\pi\xi, \quad w = 0.1 \cos 2\pi\xi, \\ B_{\parallel} = \sqrt{4\pi}, \quad B_{\perp} = 0.1\sqrt{4\pi} \sin 2\pi\xi, \quad B_z = 0.1\sqrt{4\pi} \cos 2\pi\xi, \quad p = 0.1,$$

где $\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha$. Здесь для удобства вместо компонент u , v , B_x и B_y используются компоненты скорости и магнитного поля, параллельные

и ортогональные направлению движения альфвеновской волны (например, $B_{\parallel} = B_x \cos \alpha + B_y \sin \alpha$, $B_{\perp} = B_y \cos \alpha - B_x \sin \alpha$). Волна распространяется в направлении точки $\mathbf{x} = [0, 0]^T$ со скоростью $B_{\parallel}/\sqrt{4\pi\rho} = 1$. Заметим, что при $v_{\parallel} = 1$ волна превращается в стоячую.

Задача решалась на сетке Ω_h^N типа $1/N$ при $N = 8, 16, 32$ и 64 . Для каждого варианта оценивалась относительная ошибка вычислений по формуле

$$\delta_N(\psi) = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in \Omega_h^N} |\psi^N(\mathbf{x}) - \psi^E(\mathbf{x})|}{\sum_{\mathbf{x} \in \Omega_h^N} |\psi^E(\mathbf{x})|}, \text{ для } \psi = v_{\perp}, w, B_{\perp}, B_z, \quad (4.1)$$

где $\psi^E(\mathbf{x})$ — точное решение (за точное принималось решение, вычисленное при $N = 128$). Скорость сходимости оценивалась как

$$R_N = \log_2 (\delta_{N/2}/\delta_N), \quad (4.2)$$

где в качестве δ_N бралось среднее

$$\delta_N = \frac{1}{4} (\delta_N(v_{\perp}) + \delta_N(w) + \delta_N(B_{\perp}) + \delta_N(B_z)) \quad (4.3)$$

Расчет проводился до момента времени $t = 5$ с числом Куранта $C = 0.4$, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, использовались периодические граничные условия. На рис. 3 представлены графики ортогональной компоненты B_{\perp} магнитного поля при расчетах на различных сетках. Изображено сечение решения вдоль линии распространения волны в зависимости от координаты x . При увеличении N решение сходится к точному. Сравнение с результатами из [7] показывает, что построенная схема близка по характеру сходимости в данной задаче с методами Field-CD и Flux-CD/CT, основанными на аналогичных представлениях определяющей системы уравнений МГД.

В таблице 2 представлена усредненная относительная ошибка (4.3) и скорость сходимости (4.2). Для сравнения кроме данных, полученных методом на основе разделения по процессам (в таблице — РП), даны результаты данного теста для схемы Flux-CD, взятые из [7], и для кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML), взятые из [6]. Вычисления показывают, что хотя результаты, полученные методом РП несколько уступают Flux-CD и PPML в точности, скорость сходимости метода значительно превышает характеристики Flux-CD и PPML схем.

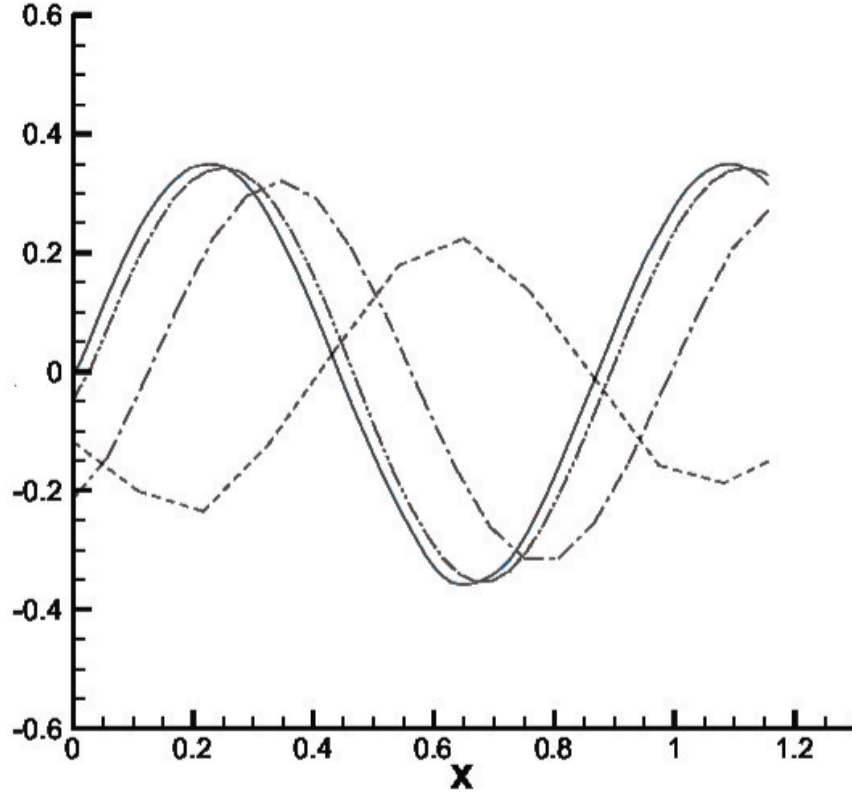


Рис. 3: Задача о распространении циркулярно поляризованной альфвеновской волны. Ортогональная компонента B_{\perp} магнитного поля при расчетах на различных сетках на момент $t = 5$. Сетка $1/8$ — пунктир (---), сетка $1/16$ — штрих-пунктир (-·-), сетка $1/32$ — штрих-штрих-пунктир (-··-), сетка $1/64$ — сплошная линия (—)

4.3 Задача Brio-Wu

Этот тест представляет собой задачу Римана о распаде разрыва и демонстрирует эволюцию сложных, в том числе вращательных, разрывов.

Так как решение зависит только от одной пространственной переменной, нет необходимости брать область одинаковых линейных размеров по разным направлениям координатных осей. Расчетная область $\Omega = [0; 1] \times [0; 0.1]$. Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho &= 1, & u &= 0, & v &= 0, & w &= 0, \\ p &= 1, & B_x &= 0.75, & B_y &= 1, & B_z &= 0, & x < 0.5, \\ \rho &= 0.125, & u &= 0, & v &= 0, & w &= 0, \\ p &= 0.1, & B_x &= 0.75, & B_y &= -1, & B_z &= 0, & x > 0.5. \end{aligned}$$

Показатель адиабаты $\gamma = 2$.

Данная задача представляет особый интерес в связи со следующим обстоятельством. Быстрые и медленные МГД-разрывы, в которых поперечное поле меняет знак, не эволюционны [2]. В этом случае возникающее течение содержит составную волну, состоящую из медленного МГД-разрыва, на котором поперечное поле меняет знак, и примыкающей к нему простой волны, причем за разрывом скорость газа (в системе координат, связанной с разрывом) равна медленной скорости звука [3]. На рисунке 4 составная волна (в виде пика) хорошо видна на графиках плотности и продольной скорости. В качестве эталонного решения (сплошная линия) взяты результаты одномерного расчета этой задачи методом HLL на сетке, содержащей 10000 узлов. Тестовые результаты (точки на графиках) получены на сетке $1/500$, расчет проводился до момента времени $t = 0.1$.

Из рис. 4 видно, что построенная схема позволяет разрешать достаточно сложные виды разрывов, не приводя к возникновению осцилляций. Тем не менее, она обладает некоторой численной диссипацией, что видно на концах пологих участков графиков распределений плотности и давления.

Данная задача является достаточно чувствительной к процедуре построения сетки. Так, использование нерегулярных сеток, являющихся общим случаем триангуляции Делоне, приводит к появлению дополнительных колебаний переменных в районе разрыва и на участках постоянства функций плотности, скорости и давления. Подобные трудности не возникают при использовании регулярных сеток, состоящих из правильных треугольников, одна из сторон которых ориентирована параллельно фронту разрыва. Осцилляций не возникает и при другой ориентации, но указанный случай, очевидно, является более благоприятным в силу учета геометрии задачи.

N	РП		PPML		Flux-CD	
	δ_N	R_N	δ_N	R_N	δ_N	R_N
8	1.1622	—	$6.1129 \cdot 10^{-1}$	—	$9.71 \cdot 10^{-1}$	—
16	$6.3135 \cdot 10^{-1}$	0.88	$2.2419 \cdot 10^{-1}$	1.4471	$3.93 \cdot 10^{-1}$	1.305
32	$1.494 \cdot 10^{-1}$	2.079	$6.9068 \cdot 10^{-2}$	1.69886	$1.05 \cdot 10^{-1}$	1.904
64	$3.54 \cdot 10^{-2}$	2.077	$2.5900 \cdot 10^{-2}$	1.4151	$2.9 \cdot 10^{-2}$	1.856

Таблица 2: Усредненная ошибка и скорость сходимости в задаче о распространении альфвеновской волны

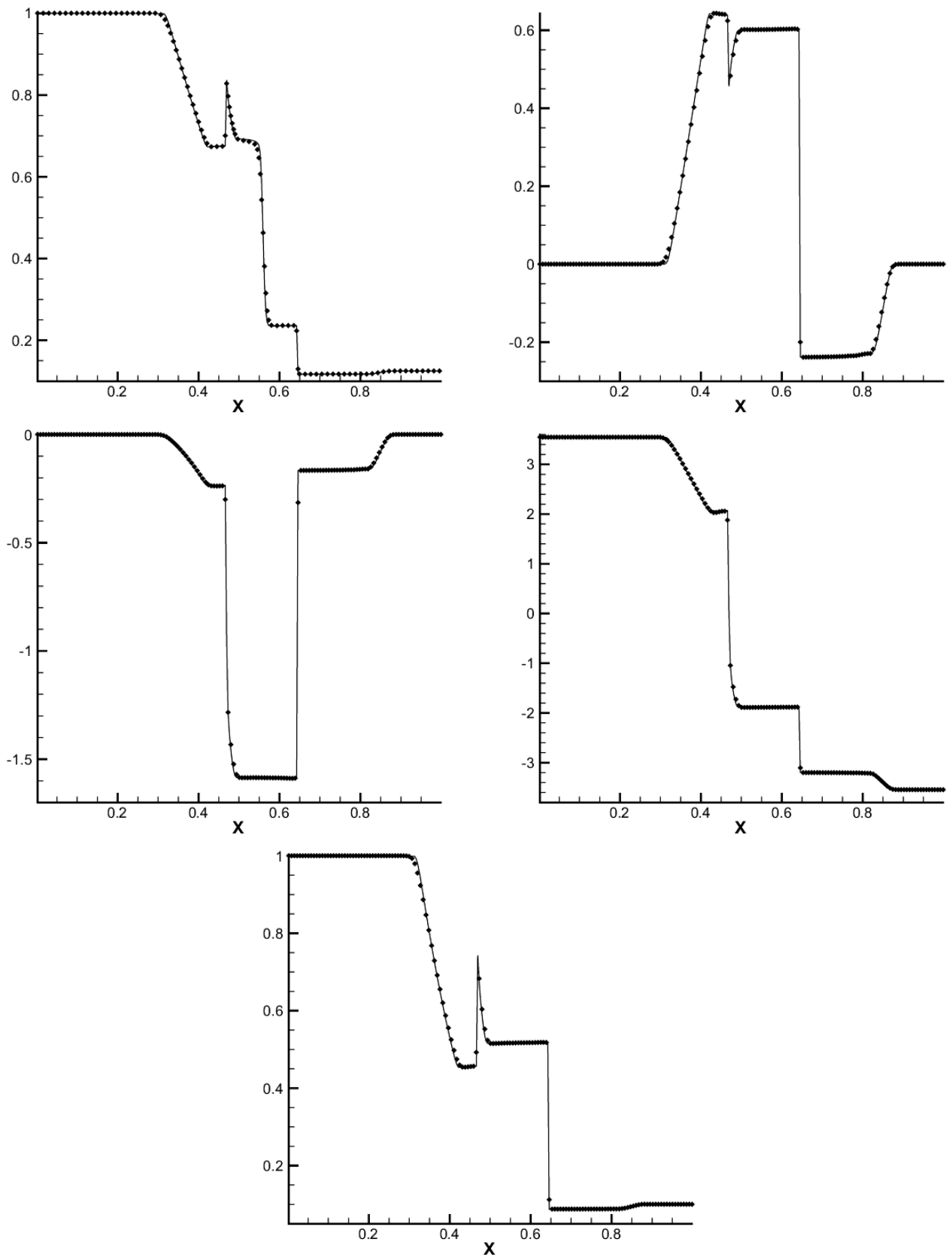


Рис. 4: Задача Brio-Wu. Распределения зависимых переменных (сверху вниз и слева направо плотность, компоненты скорости u и v , компонента магнитного поля B_y и давление) на момент $t = 0.1$.

4.4 Вращение цилиндра в покоящейся среде

Данная задача часто используется для тестирования устойчивости разностных схем МГД. Она оказывается сложной для многих из них, т.к. в процессе счета возникают нефизические отрицательные значения давления [7].

Вычисления производятся в области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ с однородным давлением и магнитным полем. В начальный момент только одна компонента магнитного поля $B_x \neq 0$. В центре области задается вращающийся плотный диск (сечение цилиндра) радиуса $r_0 = 0.1$. При $r < r_0$ задается плотность $\rho = 10$ и вектор скорости с компонентами

$$u = -v_0(y - 0.5)/r_0, \quad v = v_0(x - 0.5)/r_0, \quad w = 0,$$

где точка $[x, y]^T \in \Omega$, $r = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}$. При $r > r_1 = 0.115$ среда неподвижна ($u = v = w = 0$) и имеет плотность $\rho = 1$. В переходной зоне при $r_0 < r < r_1$ используется линейное относительно r распределение величин: $\rho = 1 + 9f(r)$, $u = -f(r)v_0(y - 0.5)/r_0$, $v = f(r)v_0(x - 0.5)/r_0$, где $f(r) = (r_1 - r)/(r_1 - r_0)$. Заданная таким образом система не является равновесной. Вращающееся вещество будет постепенно перераспределяться по расчетной области, захватывая неподвижную его часть, причем магнитное поле будет удерживать сплюснутую форму движущейся части вещества.

Следуя [7] проведены расчеты с двумя вариантами расчетных данных:

1. $v_0 = 2$, $p = 1$, $B_x = 5$, $\gamma = 1.4$, время счета $t = 0.15$;
2. $v_0 = 1$, $p = 0.5$, $B_x = 2.5$, $\gamma = 5/3$, время счета $t = 0.295$.

Расчеты проведены на сетке $1/400$ с числом Куранта $C = 0.5$. Граничные условия обеспечивают свободное истечение вещества из области Ω . На рис. 5 и 6 представлены результаты на конечные моменты времени для вариантов 1 и 2 соответственно. На рис. 7 и 8 показаны сечения некоторых величин вдоль диагонали $x = y$. Из результатов видно, что решение, полученное по численной схеме, основанной на расщеплении по процессам, имеет хорошее разрешение и по точности сравнимо с решениями, полученными методами PPML [6] и Flux-CT [7].

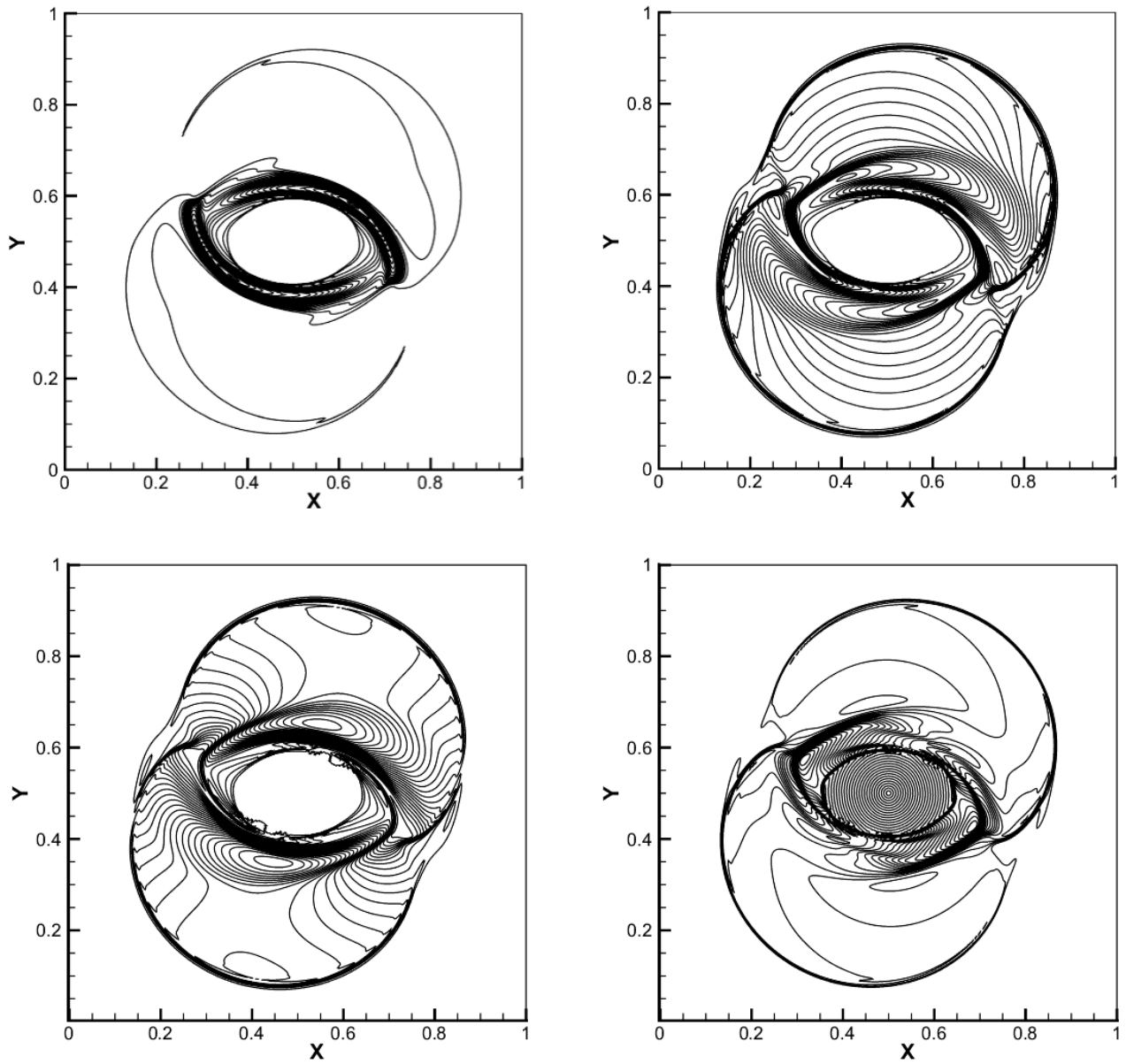


Рис. 5: Вращение цилиндра (вариант 1). Слева направо сверху вниз 30 линий уровня плотности в диапазоне от 1.3 до 13.5, давления — от 0.12 до 2.1, магнитного давления $\mathbf{B}^2/(8\pi)$ — от 0.0177 до 2.642 и числа Маха — от 0.144 до 4.27 на момент $t = 0.15$.

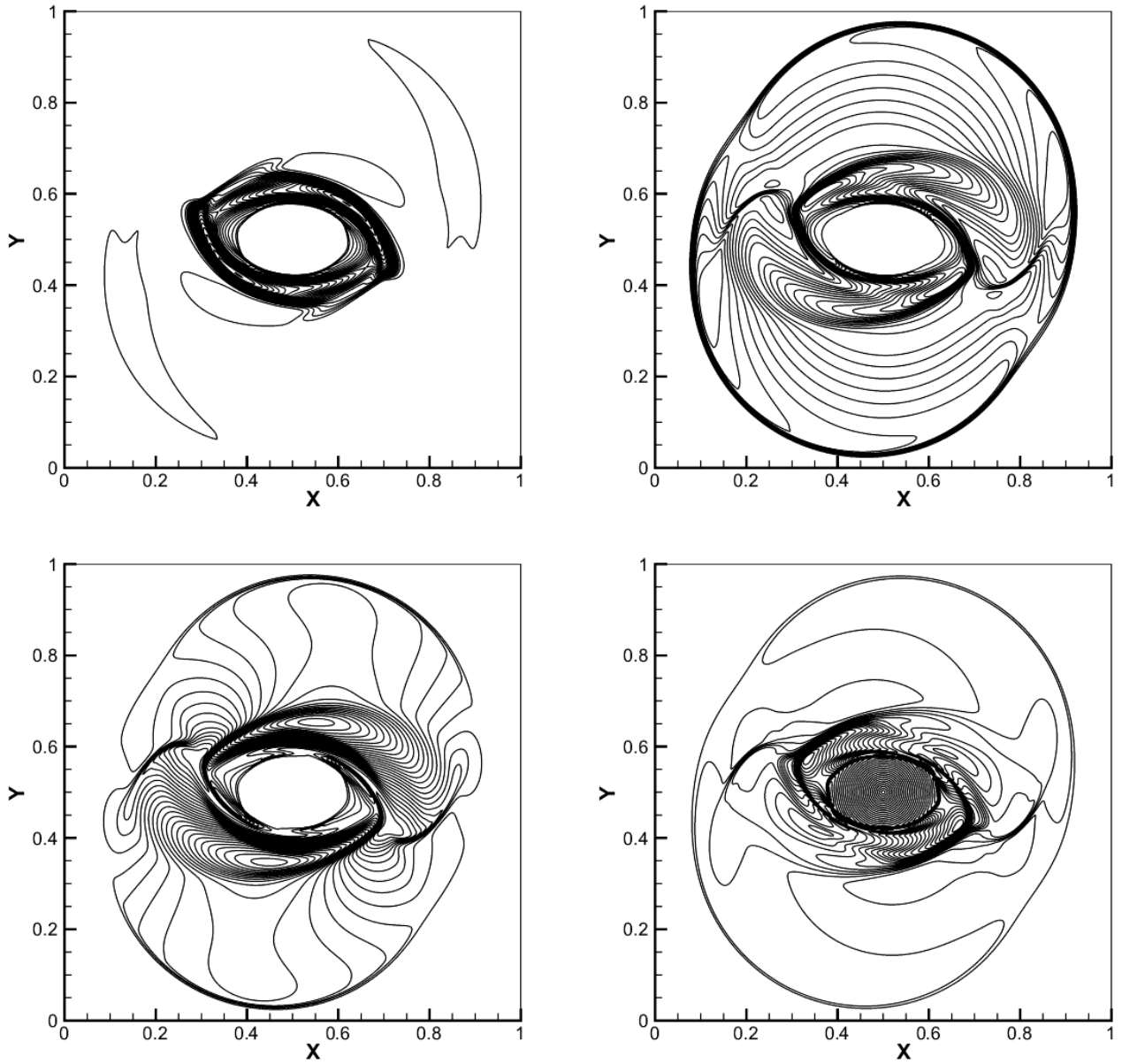


Рис. 6: Вращение цилиндра (вариант 2). Слева направо сверху вниз 30 линий уровня плотности в диапазоне от 0.9 до 10.1, давления — от 0.036 до 0.75 магнитного давления $B^2/(8\pi)$ — от 0.007 до 0.702 и числа Маха — от 0.096 до 2.86 на момент $t = 0.295$.

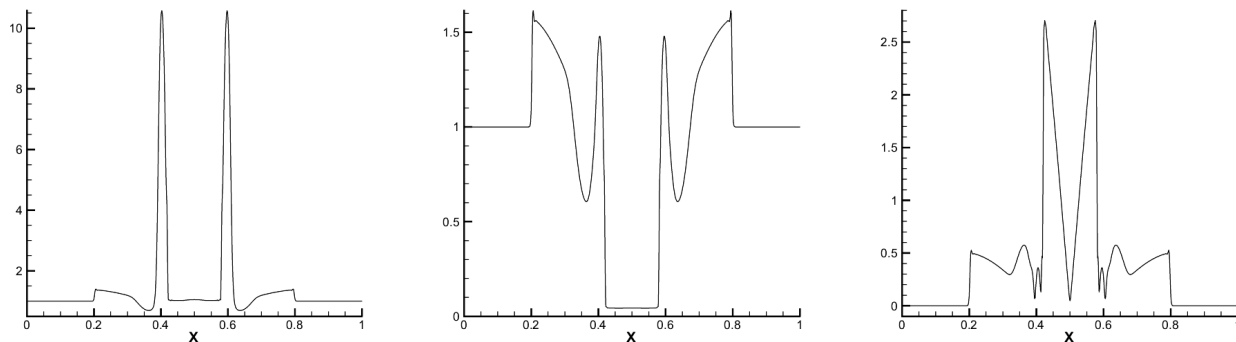


Рис. 7: Вращение цилиндра (вариант 1). Слева направо сечения вдоль диагонали $x = y$ для плотности, давления и числа Маха на момент $t = 0.15$ (зависимости от координаты x).

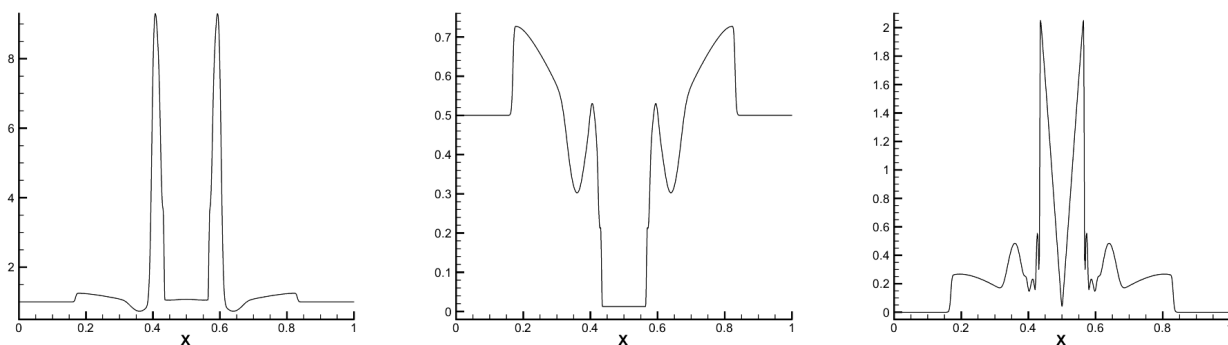


Рис. 8: Вращение цилиндра (вариант 2). Слева направо сечения вдоль диагонали $x = y$ для плотности, давления и числа Маха на момент $t = 0.295$ (зависимости от координаты x).

4.5 Вихрь Орзага-Танга

Данная задача часто используется для тестирования численных методов двумерной МГД ([7]). Она иллюстрирует процесс формирования ударных волн, их взаимодействие и переход к сверхзвуковой турбулентности. Несмотря на гладкие начальные условия, движение быстро становится очень сложным и формируется целый ряд разрывов плотности и давления.

В разных источниках ([7], [6]) предлагаются разные варианты постановки начальных условий, отличающиеся нормировкой расчетной области и определяющих величин. В данной работе задавались следующие параметры среды. В расчетной области $[0, 1] \times [0, 1]$ находится плазма равномерной плотности $\rho = 25/(36\pi)$ и давления $p = 5/(12\pi)$. Показатель адиабаты равен $\gamma = 5/3$.

При этих условиях скорость звука $c = \sqrt{\gamma p/\rho} = 1$. Скорости и компоненты магнитного поля задаются периодическим образом:

$$\begin{aligned} u &= -\sin 2\pi y, & v &= \sin 2\pi x, & w &= 0, \\ B_x &= -\sin 2\pi y, & B_y &= \sin 4\pi x, & B_z &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия периодические.

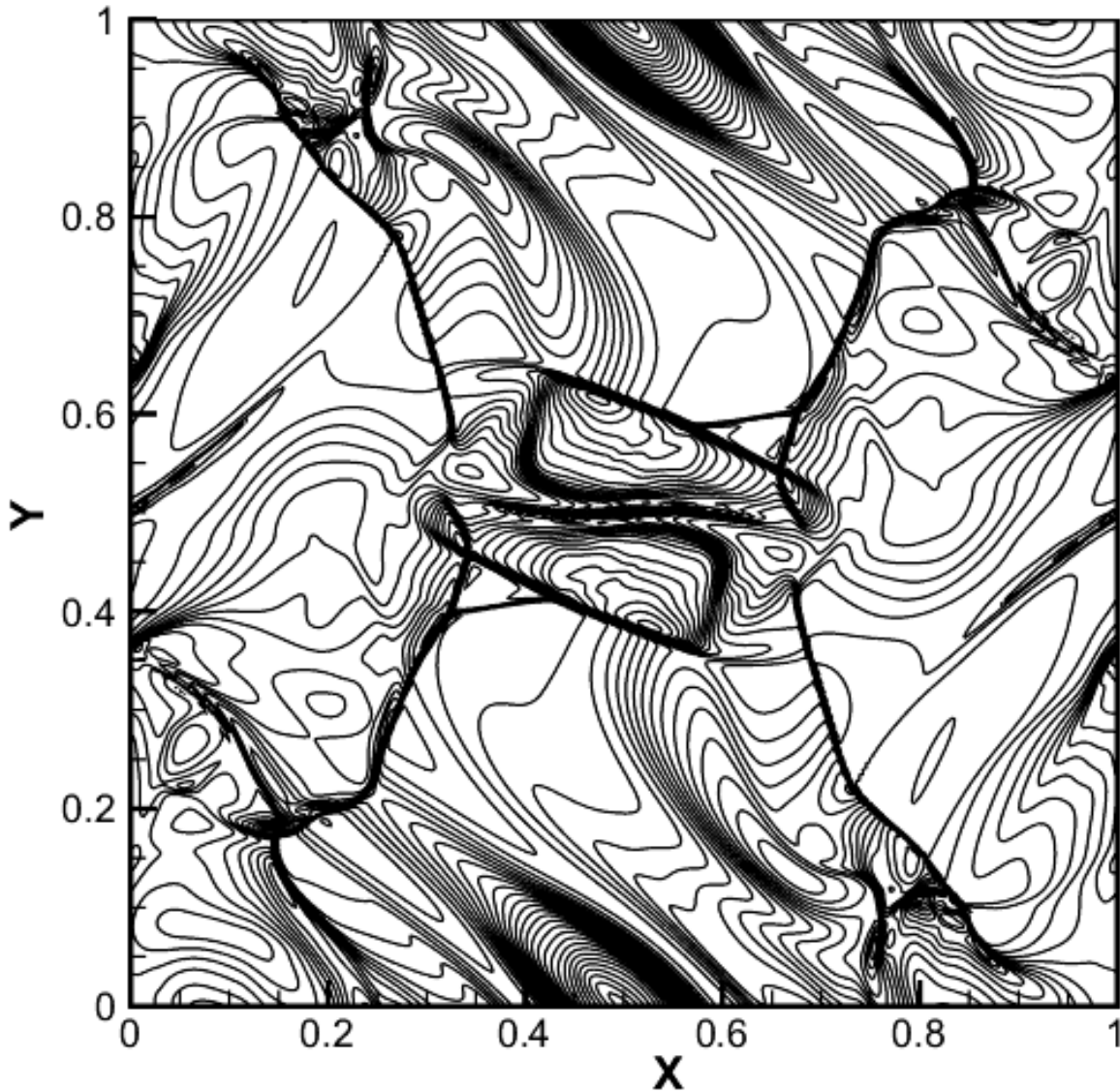


Рис. 9: Вихрь Орзага-Танга. 30 линий уровня давления в диапазоне от 0.02 до 0.5 на момент $t = 0.5$.

Проведен расчет на сетках $1/N$ с различными числами N и числом Куранта $C = 0.5$. На рис.9 линиями уровня показано распределение давления по расчетной области в момент времени $t = 0.5$. На рис. 10 показаны срезы

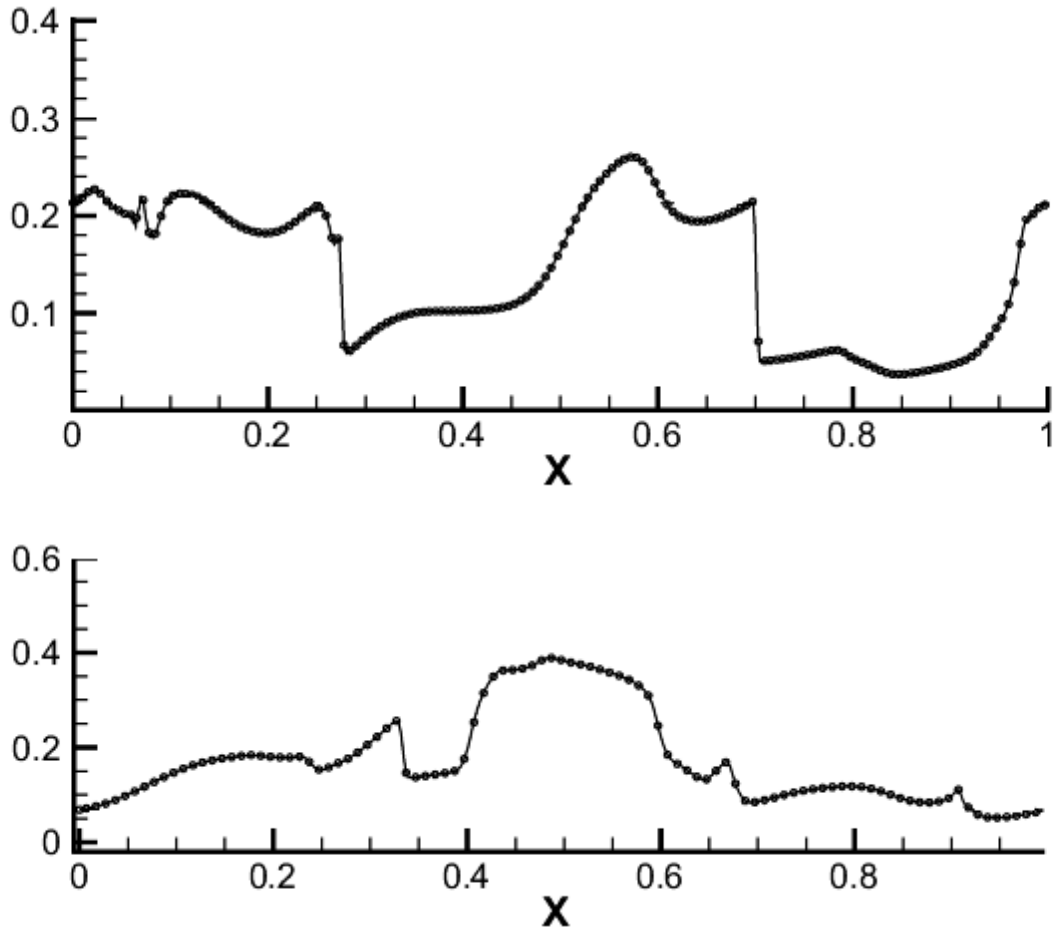


Рис. 10: Вихрь Орзага-Танга. Давление вдоль линий $y = 0.3125$ и $y = 0.4277$ на момент $t = 0.5$.

давления вдоль линий $y = 0.3125$ и $y = 0.4277$, по которым можно оценить степень разрешения разрывов.

Из рис. 9 в сравнении с [6] видно, что построенная в данной работе схема не приводит к таким существенным осцилляциям решения, как PPML метод, имея тот же уровень разрешения разрывов.

Так же, как и в задаче о распространении циркулярно поляризованной альфвеновской волны, вычислены усредненная относительная ошибка δ_N и скорость сходимости решения к точному R_N при расчетах на сетках с $N = 50$, 100 и 200 по формулам (4.3) и (4.2) соответственно (в (4.3) учитывались ошибки только ненулевых компонентов скорости u и v и магнитного поля B_x и B_y). За точное принято решение на сетке $1/400$. В таблице представлены результаты для момента времени $t = 0.5$. Для сравнения приведены данные для кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML) и для

схемы с ограничением переноса (Flux-CD), взятые из [6] и [7] соответственно (данные в [7] получены при иной нормировке расчетной области, и поэтому рассматриваемые моменты времени отличаются в 2π раз).

N	РП		PPML		Flux-CD	
	δ_N	R_N	δ_N	R_N	δ_N	R_N
50	$1.347 \cdot 10^{-1}$	—	$1.2246 \cdot 10^{-1}$	—	$1.380 \cdot 10^{-1}$	—
100	$7.5832 \cdot 10^{-2}$	0.829	$6.9122 \cdot 10^{-2}$	0.8251	$7.75 \cdot 10^{-2}$	0.8324
200	$3.539 \cdot 10^{-2}$	1.099	$3.0589 \cdot 10^{-2}$	1.1761	$3.73 \cdot 10^{-2}$	1.0550

Из таблицы видно, что результаты, полученные по схеме с разделением процессов не уступают (а в случае Flux-CD несколько превосходят по точности) двум другим схемам. Более того, в отличие от случая гладкого решения (задача о распространении циркулярно поляризованной альфвеновской волны) наблюдается выравнивание по точности и скорости сходимости трех методов. В сочетании с отсутствием паразитных осцилляций и с использованием более универсального типа сеток результаты проведенных расчетов позволяют говорить о преимуществе построенного метода при решении геометрически и физически сложных задач магнитной гидродинамики.

4.6 Регулярные и нерегулярные сетки

В случае наличия в задаче прямолинейных фронтов ударных волн или других подобных геометрических особенностей улучшить свойства схем можно использованием регулярной сетки (рис. 11, справа). Под регулярностью в данном случае понимается построение сетки с помощью равносторонних треугольников, одна из сторон которых параллельна той или иной координатной оси. В противном случае будем говорить о нерегулярных сетках.

В отличие от сеток, построенных с использованием триангуляции Делоне общего вида (рис. 11, слева), регулярные сетки позволяют уменьшить осцилляции зависимых величин в областях, прилегающих к фронту разрыва. Это происходит за счет того, что линейный в дифференциальной постановке фронт в случае использования для аппроксимации нерегулярных сеток перестает, вообще говоря, быть линейным. А это значит, что образуются дополнительные, не соответствующие исходной постановке, локальные потоки

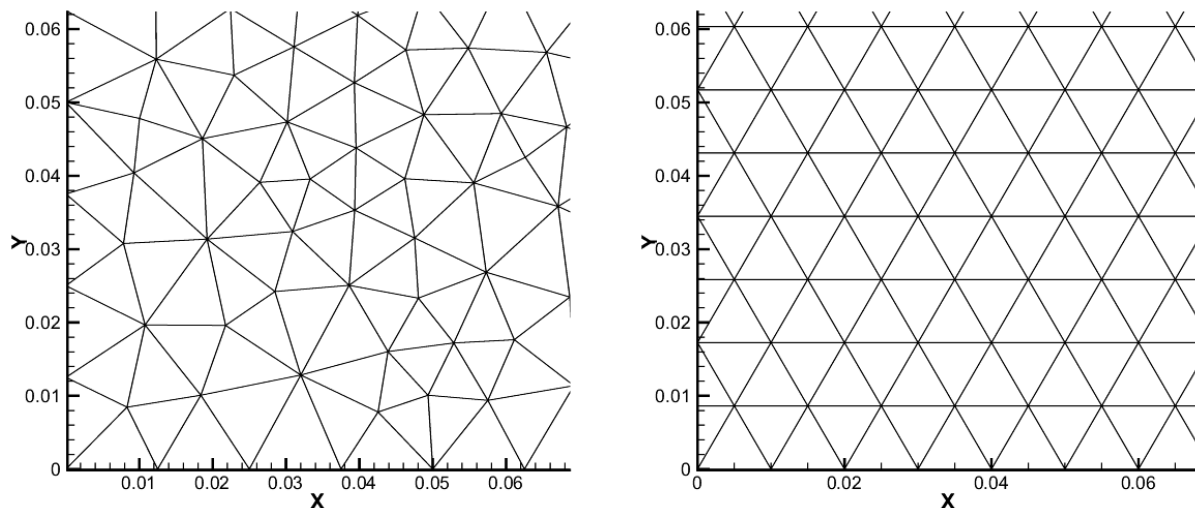


Рис. 11: Нерегулярная (слева) и регулярная (справа) сетки.

вещества. В газовой динамике подобные потоки за счет численной диссипации схемы не оказывают значительного влияния на картину течения и не приводят к заметным осцилляциям. Наличие же в системе магнитного поля приводит к закреплению и частичному усилению подобных потоков, что при больших временах расчета может привести к определенным трудностям.

В то же время, при решении существенно двумерных задач, не имеющих столь выраженных особенностей (это относится к таким задачам, как вращение цилиндра или вихрь Орзага-Танга), использование регулярных и нерегулярных сеток приводит к одинаковым результатам.

5 Заключение

В работе представлена численная схема для решения задач многомерной идеальной МГД на неструктурированных треугольных сетках, основанная на методе дробных шагов [10]. Система уравнений идеальной МГД записывается в данном случае не в консервативном виде подобно [1], а в естественной для каждого из типов процессов форме.

Движение газа описывается уравнениями газовой динамики в форме (3.1), для решения которых используется метод типа Годунова, основанный на аппроксимации потоков вещества, импульса и энергии через грани вычислительной ячейки. Использование именно такого подхода обусловлено физической стороной данного процесса — процессы изменения плотности, скорости и

энергии (температуры) формируются под влиянием потока соответствующих субстанций через границу области, соответствующие уравнения представляют собой по сути балансовые соотношения для этих потоков.

Изменение электромагнитного поля имеет иной механизм [5], поэтому его описание предпочтительно вести с помощью уравнения Фарадея с прямой аппроксимацией оператора ротора при численной реализации. Подобный подход использовался и применительно к консервативной форме системы уравнений МГД в качестве процедуры удаления численного магнитного заряда (методы Flux-CT [7]), но не обеспечивал в этом случае выполнения условия бездивергентности магнитного поля на всем протяжении счета.

Такое расщепление по физическим процессам приводит к необходимости построения смещенных сеток и проведению процедур интерполяции значений необходимых величин внутри и на гранях расчетных ячеек.

Монотонизация полученной схемы производится с использованием линейной реконструкции искомых величин внутри ячеек и двумерного ограничителя `minmod` на наклон получаемой линейной функции.

Тестирование разностной схемы проведено на примере нескольких известных двумерных задач. Результаты расчетов показали, что построенный метод дает хорошее представление как для гладких, так и для разрывных решений. Полученные распределения величин обеспечивают высокое разрешение разрывов. Определена относительная погрешность вычислений и оценена скорость сходимости метода на основе задачи о распространении циркулярно поляризованной альфвеновской волны и задачи о вихре Орзага-Танга.

Расчеты показали, что хотя методы PPML и Flux-CD имеют большую точность по сравнению с предложенной схемой на гладком решении (альфвеновская волна), скорость сходимости численного решения к точному оказывается превосходящей аналоги (в рассмотренной задаче скорость превысила квадратичную). Характеристики методов выравниваются на разрывном решении (вихрь Орзага-Танга), причем построенный метод превышает по точности Flux-CD.

Стоит отметить также, что численная вязкость схемы позволяет погасить осцилляции решения в областях, прилегающих к разрывам. Такие осцилляции свойственны численным схемам, основанным на консервативной форме системы уравнений МГД. В то же время, вязкость не приводит к понижению

уровня разрешения разрывов.

Таким образом, к преимуществам построенного метода можно отнести следующие:

1. Использование треугольных неструктурированных сеток позволяет решать задачи со сложной геометрией с той же точностью и затратами ресурсов, как и в случаях с простой расчетной областью.
2. Естественный способ описания физических процессов позволяет автоматически удовлетворять разностным аналогам условия бездивергентности магнитного поля.
3. Точность метода при отыскании разрывного решения не уступает точности методов высокого разрешения разрывов, не приводя при этом к паразитным осцилляциям.
4. Схема за счет свойства аддитивности [9] может быть легко обобщена на случай неидеальной плазмы с конечной проводимостью и на систему уравнений радиационной магнитной гидродинамики без дополнительного перерасчета системы собственных значений и векторов.

Список литературы

- [1] А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Наука. Физматлит, 2001. — 608 с.
- [2] А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов. Магнитная гидродинамика. — М.: Логос, 2005. — 328 с.
- [3] А.В. Колдоба, Г.В. Устюгова. Разностные схемы для уравнений МГД в эйлеровых переменных (случай кратных корней). // Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН. 1996. №42. 28 с.
- [4] И.Е. Тамм. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989. — 504 с.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматлит, 1982. — 621 с.

- [6] С.Д. Устюгов, М.В. Попов. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. IV. Многомерная идеальная МГД. // Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН. 2007. №11. 30 с.
- [7] G. Toth. The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes. J. Comp. Phys. 161, 2000, p. 605.
- [8] M. Brio, C. C. Wu. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. J. Comp. Phys. 2, 1988, pp. 400-422.
- [9] А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. Аддитивные схемы для задач математической физики. — М.: Наука, 2001. — 319 с.
- [10] Н.Н. Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967. — 197 с.
- [11] А.А. Самарский, Ю.П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 424 с.
- [12] F. Dubois. Dual Raviart-Thomas mixed finite elements.// IAT Report. — 2002. № 355. 28 p.
- [13] М.П. Галанин, Е.В. Грищенко, Е.Б. Савенков, С.А. Токарева. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики.// Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. №52. 31 с.
- [14] E.F. Toro. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction. Springer, Berlin. 1999. 624 p.
- [15] D.S. Balsara. Second-Order-accurate Schemes for Magnetohydrodynamics with Divergence-free Reconstruction. ApJS 151, 2004, p. 149.
- [16] М.В. Абакумов, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, Д.В. Рогожкин. Об ударных волнах разрежения в вычислительной газовой динамике.// Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. №3. 30 с.