



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Шлычков, А. И. Крылова, Численная модель плотностных течений в устьевых областях сибирских рек, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, 2014, том 17, номер 3, 305–313

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

22 марта 2025 г., 16:00:34



УДК 551.482.215.1

Численная модель плотностных течений в устьевых областях сибирских рек*

В.А. Шлычков¹, А.И. Крылова^{2,3}

¹Институт водных и экологических проблем Сибирского отделения Российской академии наук, Морской просп., 2, Новосибирск, 630090

²Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

³Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: slav@ad-sbras.nsc.ru; slav@iwer.nsc.ru (Шлычков В.А.), alla@climate.sccc.ru (Крылова А.И.)

Шлычков В.А., Крылова А.И. Численная модель плотностных течений в устьевых областях сибирских рек // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 3. — С. 305–313.

Представлена численная модель для исследования динамического смешения морских и речных вод в устьевой области. В основу модели положены двумерные продольно-вертикальные уравнения механики стратифицированной жидкости и уравнение переноса соли. Модель ориентирована на воспроизведение локальных плотностных течений в устье рукавов разветвленных дельт сибирских рек. Приводятся результаты численных экспериментов, динамическая структура потока и профиль солености сопоставляются с данными наблюдений.

Ключевые слова: численное моделирование, турбулентность, градиентно-плотностные течения, речной поток, морская акватория, перенос соли.

Shlychkov V.A., Krylova A.I. A numerical model of density currents in estuaries of the Siberian rivers // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 3. — P. 305–313.

A numerical model for studying the dynamic mixing of the sea and the river waters in the estuarial area is proposed. Computations are based on the two-dimensional longitudinal vertical stratified fluid mechanics equations and the equation of transport of salt. The model focuses on the reproduction of the local density currents at the mouth of arms branched deltas of the rivers of Siberia. The results of numerical experiments are given, the dynamic structure of the flow and salinity profiles are compared to the observational data.

Key words: numerical simulation, turbulence, gradient-density flows, river flow, sea area, transport of salt.

1. Введение

В областях сопряжения речных и морских вод развиваются сложные течения с тонкой плотностной структурой. Для их описания требуются численные модели, обеспечивающие адекватное воспроизведение обменных процессов в устьевых областях. В настоящее время созданы эффективные численные схемы со свойствами монотонности, хорошо апробированные в различных технических приложениях. Однако применительно к естественно-природным водоемам со сложно структурированным течением современные схемы тестированы недостаточно. Вместе с тем потребность в модели описания областей взаимодействия вод в устьевых областях в последние годы значительно возросла в

*Работа выполнена в рамках интеграционного проекта № 109 СО РАН.

связи с повышением интереса мировых научных центров к проблемам сибирских субарктических регионов. Актуальным представляется апробация развитых численных схем и алгоритмов в задаче воспроизведения основных физических механизмов при описании плотностных течений в устьевой области. Важно показать работоспособность применяемой численной модели в сложных гидрофизических ситуациях и продемонстрировать ее эффективность путем сопоставления с данными наблюдений. В качестве водного объекта используются рукав дельты реки Лена и устьевое взморье моря Лаптевых. Вынос субстанции из пресноводных русловых систем в море сопровождается сложными явлениями, обусловленными стратификацией и разницей плотностей вод за счет минерализации [1].

Наблюдения показывают, что в процессе смешения морская вода образует тонкий соленый слой на дне русла, который распространяется против течения, тогда как слабоминерализованная речная вода движется к устью поверху. В результате образуется гидрофронт — узкая граница контакта речной и морской воды, и происходит расслоение потока на два сильно различающихся по своим характеристикам слоя — верхний пресный и находящийся под ним холодный соленый. Вследствие большого градиента плотности на линии гидрофронта формируется зона динамического разрыва, вертикальный обмен между слоями блокируется, что способствует изоляции и стабильности соленого клина.

Заток соленой воды в русло значительно ухудшает потребительские и гидробиологические качества воды, делая ее непригодной для питья и технических нужд. За гидрофронтом наблюдается уменьшение концентрации растворенного кислорода, затрудняется нормальное функционирование речных экосистем, изменяется гидрохимический состав речных вод. Устьевый поток, в свою очередь, оказывает значительное влияние на водный баланс приемной морской акватории, вызывая опреснение верхних слоев, изменяя термический и ледовый режим океанических вод.

Воды смешения исключительно подвижны, а конфигурация и положение гидрофронта зависят от множества факторов (расхода воды в реке, силы и направления ветра, стратификации и др.) и меняются в суточном и сезонном масштабе времени. Определение границ проникновения соленых вод в русло и влияния рек на морскую акваторию представляет большой научный и практический интерес для развития систем мониторинга и прогноза гидрологических процессов в субарктических регионах.

Закономерности взаимодействия вод в устьях северных рек в настоящее время теоретически изучены недостаточно. Первые математические модели устьевых областей формулировались на основе простых одномерных уравнений, описывающих процессы продольного перемещения морских вод в русло под влиянием нагонных эффектов [2]. Физически более полные двумерные модели уже содержали вертикальную детализацию процессов взаимодействия [3, 4], однако описание турбулентного обмена базировалось на сравнительно простых постулатах о масштабе турбулентности.

Характер устьевых процессов в значительной степени зависит от морфометрических особенностей русла и протекает в каждом устье по-разному. Большинство выполненных ранее теоретических исследований сибирских рек касалось крупных устьевых областей эстуарного типа (реки Обь, Енисей) с характерными масштабами процессов порядка 100 км.

Градиентные плотностные течения развиваются также в устьевых областях другого морфологического типа — разветвленных речных дельтах. Примером такой речной системы является дельта реки Лена. Основное русло реки разбивается на ряд протоков, которые далее дробятся на густую сеть рукавов, впадающих в море Лаптевых. Каждый рукав образует локальную зону смешения вод у своего устья, а вся совокупность таких зон оказывает интегральное влияние на поле течений вблизи побережья в целом. Отме-

тим, что в последние годы исследования в дельте реки Лена получили внушительную поддержку. В частности, на острове Самойловский к настоящему времени создана лаборатория и полигоны с новейшим исследовательским оборудованием, которое является базой экспедиций, работающих на всем побережье моря Лаптевых [5].

Для получения интегральных оценок влияния материкового стока на устьевое взморье следует изучить локальные особенности течений с пространственными масштабами, характерными для отдельных рукавов речной дельты. В соответствии с этим определим цель работы — построение численной модели устьевой области на основе уравнений гидротермодинамики стратифицированной жидкости для изучения локальных плотностных течений при смешении морских и речных вод.

2. Постановка задачи

Применение трехмерной математической модели для описания упомянутых процессов применительно к водотокам северных широт не является оптимальным в связи с отсутствием морфометрических данных, необходимых для пространственной детализации. Кроме того, представляется важным изучить механизмы смешения вод в устьевых областях несложной геометрии. По этой причине за основу здесь принята продольно-вертикальная схематизация течения, показавшая удовлетворительные результаты в ряде исследований [3, 6].

При получении базовых уравнений будем исходить из системы, описывающей течения в стратифицированной жидкости [7]. Пусть $y = b(x, z)$ — переменная ширина руслового потока, ось x направлена горизонтально вдоль основного течения, ось z — вертикально вверх. Осредненные по поперечнику (в направлении координаты y) уравнения движения и неразрывности, а также переноса солености в продольно-вертикальной плоскости будут иметь вид [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial bu}{\partial t} + \frac{\partial buu}{\partial x} + \frac{\partial buw}{\partial z} &= -gb \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{gb}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\zeta \rho' dz + \frac{\partial}{\partial x} \left(bK_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(bK_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial bu}{\partial x} + \frac{\partial bw}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial bs}{\partial t} + \frac{\partial bus}{\partial x} + \frac{\partial bws}{\partial z} &= \frac{1}{Sc} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(bK_x \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(bK_z \frac{\partial s}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где u, w — горизонтальный и вертикальный компоненты вектора скорости, $z = \zeta(x, t)$ — уравнение свободной поверхности, g — ускорение силы тяжести, $\bar{\rho}$ — плотность пресной воды, ρ' — возмущения плотности за счет минерализации, K_x, K_z — коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена, s — концентрация морской соли (соленость), Sc — число Шмидта для соленого раствора. В (1) принято обычное для естественных водотоков гидростатическое приближение, предполагающее относительно малость вертикальных скоростей и ускорений.

Система (1) дополняется уравнением состояния, связывающим плотность с концентрацией соли [9]:

$$\rho = \bar{\rho}(1 + 8.181 \cdot 10^{-4}s). \quad (2)$$

Соотношение (2) является замыкающим для системы (1) и служит для расчета сил плавучести и вариаций поля плотности в уравнении движения. Влияние температуры на динамический режим устьевых вод в условиях холодного климата невелико [10], поэтому термические факторы не учитываются в (1), (2).

Обозначим через $z = z_b(x)$ — уравнение донной поверхности, $P_z = b(ws - K_z \frac{\partial s}{\partial z})$ — вертикальный поток соли и сформулируем краевые условия. На линии дна зададим:

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = c_d |u| u, \quad w = \frac{\partial z_b}{\partial x} u, \quad P_z = 0 \quad \text{при } z = \zeta_b, \quad (3)$$

где c_d — коэффициент донного сопротивления. На свободной поверхности краевые условия имеют вид:

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = w, \quad P_z = 0 \quad \text{при } z = \zeta. \quad (4)$$

Расчет параметров вертикального турбулентного обмена проводится на основе уравнения баланса кинетической энергии турбулентности e и уравнения для скорости ее диссипации ε , которые с учетом упрощений, принятых в [11], имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial be}{\partial t} + \frac{\partial bue}{\partial x} + \frac{\partial bwe}{\partial z} &= \alpha_e \left(\frac{\partial}{\partial x} bK_x \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} bK_z \frac{\partial e}{\partial z} \right) + bK_z J - b\varepsilon, \\ \frac{\partial b\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial bu\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial bw\varepsilon}{\partial z} &= \alpha_\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x} bK_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} bK_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + c_2 b \frac{\varepsilon}{e} K_z J - c_3 b \frac{\varepsilon^2}{e}, \\ K_z &= c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5)$$

где α_e , c_μ , c_2 , c_3 — эмпирические постоянные [12], $J = u_z^2 + \frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial z}$ — скорость пополнения энергии турбулентности.

В качестве краевых условий на свободной поверхности используем

$$e = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \zeta. \quad (6)$$

На дне зададим следующие граничные условия:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = 0, \quad \varepsilon = c_\varepsilon \frac{e^{3/2}}{z_{sb}} \quad \text{при } z = z_b, \quad (7)$$

где z_{sb} — шероховатость дна. Для эмпирических констант приняты значения: $K_z = 10 \text{ м}^2/\text{с}$, $c_d = 0.014$, $\alpha_e = 1$, $\alpha_\varepsilon = 0.77$, $c_2 = 1.44$, $c_3 = 1.92$, $c_\mu = 0.08$, $\bar{\rho} = 999839 \text{ г/м}^3$, $z_{sb} = 0.1 \text{ м}$, $c_\varepsilon = 0.314$.

При задании краевых условий на верхнем по потоку сечении $x = x_1$ (в речной части русла) предполагается отсутствие значимой неоднородности течения, например, за счет резкого изменения донного рельефа у входного створа. Вследствие этого в уравнениях (1), (5) можно пренебречь горизонтальными вариациями искомых полей и рассмотреть стационарную одномерную по z задачу:

$$\begin{aligned} -gb \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x=x_1} + \frac{\partial}{\partial z} \left(bK_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} bK_z \frac{\partial e}{\partial z} + bK_z J - b\varepsilon &= 0, \\ \alpha \frac{\partial}{\partial z} bK_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + c_2 b \frac{\varepsilon}{e} K_z J - c_3 b \frac{\varepsilon^2}{e} &= 0, \\ K_z &= c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для уравнений (8) ставятся краевые условия (2), (3), (6). Полученные по одномерной модели функции u_1 , e_1 , ε_1 служат граничными значениями в краевом условии на сечении $x = x_1$:

$$u = u_1, \quad s = 0, \quad e = e_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad x = x_1. \quad (9)$$

На выходном створе в сечении $x = x_2$ (на устьевом взморье) поставим условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad s = s_2, \quad \frac{\partial e}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2, \quad (10)$$

где s_2 — соленость морской воды.

Система уравнений для определения формы свободной поверхности формируется из уравнения движения и уравнения неразрывности в (1), проинтегрированных по z с учетом краевых условий. Интегрирование проводится в дискретном пространстве. Обозначим $Q = \int_{z_b}^{\zeta} bu \, dz$. Уравнение движения продуцирует соотношение для суммарного импульса $Q_i = \sum_{k=1}^K b_{ik} u_{ik} \Delta z$, а из уравнения неразрывности вытекает нестационарное соотношение, связывающее Q_i и $\frac{\partial \zeta_i}{\partial t}$. При исключении Q_i из системы получается одномерное конечно-разностное уравнение для уровня ζ , дифференциальный аналог которого может быть представлен в виде

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} + F_{\zeta}, \quad (11)$$

где F_{ζ} содержит комбинации проинтегрированных по z членов уравнений движения. Уравнение (11) является уравнением гиперболического типа и описывает нестационарные волновые колебания свободной поверхности. Уравнение решается методом факторизации с использованием граничных условий:

$$Q = Q_1 \quad \text{при} \quad x = x_1, \quad \zeta = \zeta_2 \quad \text{при} \quad x = x_2, \quad (12)$$

где Q_1 — заданный расход воды в русле, ζ_2 — известный уровень моря.

Методы численного решения задачи основаны на применении неявных алгоритмов с использованием консервативных схем. Конечно-разностные аналоги численной модели получены из энергетических соотношений и обеспечивают сохранение суммарной массы жидкости в каждый момент времени, а также баланс кинетической и потенциальной энергии (точное выполнение интеграла Бернулли в безвихревом потоке) [13]. При интегрировании уравнения переноса концентрации соли используется монотонная схема второго порядка точности. Донный рельеф учитывается переходом к криволинейным сигма-координатам. Пространственное разрешение характеризуется шагами сетки $\Delta x = 100$ м по горизонтали и $\Delta z = 0.1 \div 0.5$ м по вертикали.

3. Результаты численных расчетов

Область решения в вертикальной плоскости изображена на рис. 1 и представляет собой речное русло, переходящее в устьевое взморье. Начало координат совмещено с границей “река–море”. Угловой коэффициент понижения морского дна задается равным $0.5 \cdot 10^{-3}$, что близко к характерным значениям уклона береговой зоны моря Лаптевых [14], а уклон свободной поверхности равномерного речного потока $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ в системе (8) подберем так, чтобы невозмущенная скорость составляла в максимуме 0.25 м/с. Это значение скорости типично для рукавов дельты в устьевой части водотока [5]. В речной части потока ширина b русла считается постоянной, а в морской акватории она линейно увеличивается с углом раствора 32° , который наблюдается при растекании речной струи [15].

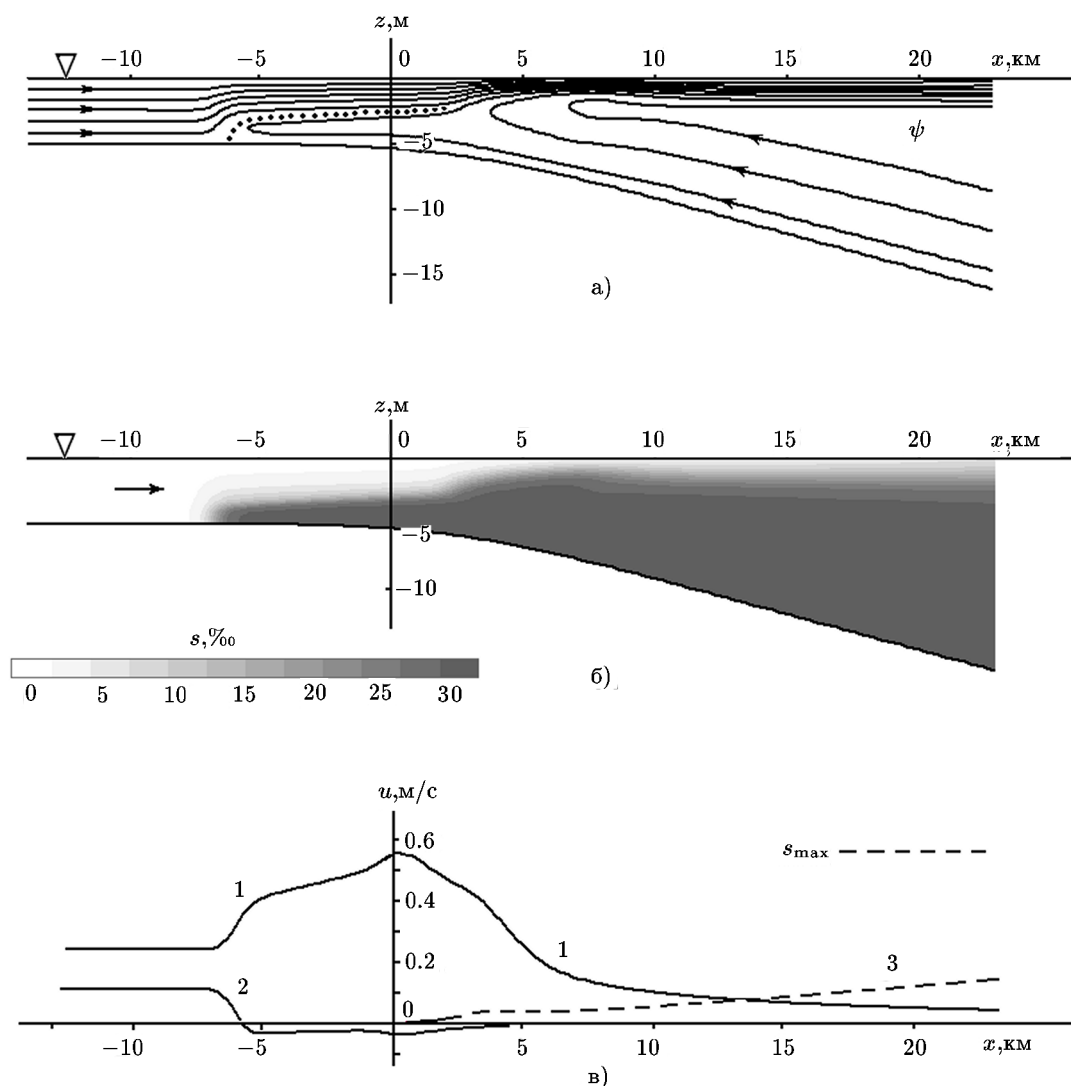


Рис. 1. Модельные решения: а) функция тока; б) поле солёности в устьевой области; в) распределение продольной скорости на поверхности и дне (кривые 1, 2) и поверхностной концентрации соли (кривая 3)

При значительных скоростях речного потока встречные морские воды вытесняются стоковым течением, интрузия невелика, и эффекты продвижения соленого клина в русло выражены слабо. Принятые значения параметров позволяют отчетливо отразить в решении наиболее интересные детали и выделить характерные особенности течения.

Общую длину расчетной области зададим равной 70 км, из которых участок длиной 20 км отнесем к речной части. Начальное распределение продольной скорости и полей модели турбулентности дается ансамблем вертикальных профилей, рассчитанных по системе (8) в каждом узле горизонтальной сетки. Для солёности в начальный момент принято $s = 0$ на речном участке ($x < 0$) и $s = s_{\max}$ в морской воде ($x > 0$), где $s_{\max} = 30‰$ -концентрация соли у побережья моря Лаптевых [14].

Уравнения интегрировались по времени с шагом $\Delta t = 30$ с до выхода на установившийся режим. В ходе интегрирования начальное поле солёности изменялось с обра-

зованием внутренних и поверхностных волн. Поскольку морская вода тяжелее речной, соленые воды опускаются вниз и распространяются по придонным горизонтам, образуя проникающий в русло минерализованный “язык”. Интрузия соленой воды сопровождается формированием в море глубинного встречного течения, направленного к берегу. Циркуляцию в зоне взаимодействия показывает рис. 1а), на котором представлены расчетные линии тока стационарного течения.

Картина линий тока отражает наличие двух динамических структур в течении: основной стоковый поток, направленный к морю, и компенсационный противоток, образующийся вследствие подтекания соленой воды из глубины в русло. Поверхность раздела морских и речных вод совпадает с изотаксой нулевых скоростей, которая определяет положение гидрофронта и на которой развивается скачок солёности. На рис. 1а) гидрофронт (точечная линия) берет начало на дне в точке русла, отстоящей примерно на 6 км от устьевого створа, далее поднимается в толщу потока и на морской акватории постепенно сливается с водным зеркалом.

Поверхность раздела водных масс отчетливо различима при анализе поля солёности, полученного при решении задачи (рис. 1б)). В этом случае гидрофронт можно идентифицировать по довольно резкой цветовой границе между темной (соленые воды) и светлой (пресные воды) областями. На участке устьевого взморья граница раздела постепенно размывается ($x > 7$ км) за счет турбулентного перемешивания между слоями. Соленая вода попадает в верхнюю часть водотока, по которому соль выносится обратно в море. Поверхностное содержание соли медленно увеличивается вниз по течению, как показывает кривая 3 на рис. 1в) (абсолютные значения s можно идентифицировать по значению s_{\max} , данному на рисунке).

Невозмущенный поток в верховьях несет только пресную воду. При натекании на гидрофронт речное течение отжимается вверх, пресный слой истончается, что влечет увеличение в нем скорости. Это иллюстрирует кривая 1 на рис. 1в), которая показывает величину продольной скорости на свободной поверхности. Скорость со значения в русле 0.25 м/с возросла в районе устья ($x = 0$) до 0.57 м/с, т. е. более чем вдвое (рис. 1в)). Далее на морском участке ($x > 0$) скорость падает, что обусловлено главным образом плановой дивергенцией линий тока при расширении струи в приемном водоеме. Максимум поля вертикальной скорости w в расчете составил 1.2 мм/с.

Продольная скорость в нижней части потока отрицательна и направлена против основного течения, а ее амплитуда сравнительно невелика и не превышает по модулю 0.08 м/с, затухая вниз по течению. Представление о значениях придонной скорости дает кривая 2 на рис. 1в).

Важной внутренней силой при формировании гидрофронта является градиент плотности, который вынуждает соленый клин продвигаться навстречу речному потоку. Поступательное движение фронта прекращается и структура течения стабилизируется, когда градиент плотности уравновешивается силой инерции, т. е. динамический напор набегающего потока становится сопоставим по величине со слагаемым перепада плотности. При этом часть кинетической энергии воды затрачивается на преодоление сопротивления, создаваемого поверхностью раздела при ее обтекании.

Описанная модельная структура течения в устьевой области находит подтверждение на качественном уровне в данных наблюдений [1, 2]. Отличие представленных результатов от известных модельных построений для арктических рек заключается в масштабах изучаемых процессов. Так, из наблюдений следует, что протяженность галоклина в Обской губе составляет несколько сотен километров [4]. Столь значительные размеры затока соленой воды можно связать с низкими скоростями течения, которые уменьша-

ются при выходе из речного русла в эстуарий с весьма большим поперечным сечением. Слабый динамический режим не может обеспечить нужное противодействие градиенту солености в эстуарии, и гидрофронт беспрепятственно распространяется вглубь материковых вод. В устьях дельтовых проток эстуарное расширение отсутствует и скорости течения не гасятся, что принципиально важно для генерации механизмов блокирования гидрофронта.

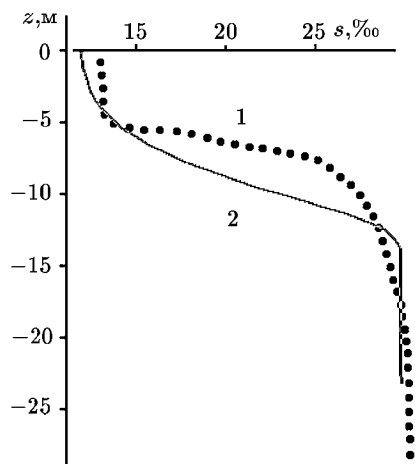


Рис. 2. Фактический и расчетный профили солености (кривые 1, 2) на выходном створе области

На рисунке 2 представлен вертикальный профиль солености (кривая 1), измеренный на устьевом взморье в районе втекания рукавов дельты реки Лена в море Лаптевых [14]. Кривая 2 построена по модельному полю солености на выходной границе расчетной области при $x = 50$ км.

Отметим качественную и количественную близость сопоставляемых профилей на рис. 2, что косвенно свидетельствует об адекватности модели. Отдельные различия можно объяснить недостаточно точными входными данными о параметрах речных водотоков в дельте и натурной обстановкой при проведении измерений. Нечетко выраженный верхний слой перемешивания в модельном профиле (кривая 2) обусловлен, вероятно, несовершенством модели вертикального турбулентного обмена.

Распределение солености по вертикали по существу определяет плотностную стратификацию верхних слоев в северных морях. Как показывает рис. 2, на устьевом взморье слой скачка плотности расположен в поверхностных слоях. Мощность и глубина скачка влияют на эффективность кислородного снабжения нижних слоев и тем самым регулируют процессы жизнедеятельности гидробионтов в глубинных горизонтах. Поэтому столь важно правильно описать процессы трансформации речных вод на устьевом взморье и определить параметры поля солености прибрежной акватории.

Литература

1. **Самолубов Б.И.** Плотностные течения и диффузия примесей.— М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
2. **Иванов В.В., Святский А.З.** Численное моделирование вторжения морских вод в устья рек в сезонном временном масштабе // Водные ресурсы.— 1987.— № 5.— С. 46–51.
3. **Vasiliev O.F., Dumnov S.V.** A two-dimensional model for salt water intrusion in a estuary // Proc. of the XX IAHN Congress. Moscow. USSR.— 1983.— Vol. 2.— P. 10–16.
4. **Доронин Ю.П.** Моделирование вертикальной структуры устьевой области реки с морским галоклином // Метеорология и гидрология.— 1992.— № 8.— С. 76–83.
5. Система моря Лаптевых и прилегающих морей Арктики. Современное состояние и история развития / Отв. редакторы: Х. Кассенс, А.П. Лисицын, Й. Тиде, Е.И. Полякова, Л.А. Тимохов, И.Е. Фролов.— М.: Изд-во МГУ, 2009.
6. **Овчинникова Т.Э., Бочаров О.Б.** О влиянии минерализованных теплых вод притока на развитие весенне-летней конвекции в глубоком озере // Вычислительные технологии.— 2006.— Т. 11, № 1.— С. 71–80.

7. **Марчук Г.И., Кочергин В.П., Саркисян А.С. и др.** Математические модели циркуляции в океане. — Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1980.
8. **Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С.** Численное моделирование стратифицированных течений в системах открытых русел и водоемах разветвленной формы // Вычислительные технологии. — 2004. — Т. 9, № 2. — С. 26–41.
9. **Chen C.T., Millero F.J.** Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range // Limnol. Oceanogr. — 1986. — Vol. 31, № 3. — P. 657–662.
10. **Молчанов В.Н.** Численная модель циркуляции вод на устьевом взморье с учетом эффектов жидкого, теплового и ионного стоков // Тр. Арктического и Антарктического научно-исследовательского института. — 1976. — Т. 314. — С. 36–43.
11. **Бочаров О.Б., Васильев О.Ф., Овчинникова Т.Э.** Двумерная вертикальная модель гидротермических процессов в температурно-стратифицированном водоеме вытянутой формы // Докл. РАН. — 1994. — Т. 339, № 3. — С. 327–330.
12. **Роди В.** Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Кольмана. — М.: Мир, 1984. — С. 227–322.
13. **Шлычков В.А.** Численная модель для уравнений мелкой воды на криволинейной сетке с сохранением интеграла Бернулли // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 7. — С. 1317–1324.
14. **Kassens H.** Russian-German Cooperation in the Siberian Shelf Seas: Geo-System Laptev Sea. — Bremerhaven: Alfred-Wegener-Institut für Polar und Meeresforschung, 1994.
15. **Симонов А.И.** Гидрология и гидрохимия вод устьевого взморья в морях без приливов. — М.: Гидрометеоздат, 1969.

*Поступила в редакцию 16 июля 2013 г.,
в окончательном варианте 25 сентября 2013 г.*

