С. А. Нефедов, Ф. А. Шолохович, О полугрупповом подходе к задачам граничного управления,
Изв. вузов. Матем., 1985, номер 12, 37–42

Условие β) следует из условия γ) по следствию 2.

Пусть D — область голоморфности. Покажем, что из α) следует γ). Предположим, что существует $\zeta \in C^n$ и $[D_\zeta] \not\supset [\chi] = 1$. Тогда по теореме 2 работы [3] существует функция $f \in O(D_\zeta)$ такая, что уравнение (1) не разрешимо в $O(D_\zeta)$. Функцию f можно голоморфно продолжить на всю область голоморфности D, но уравнение (1) для этой правой части разрешимо не будет, что противоречит условию α).

Так как из α) следует условие β), то $H^1(D, L^{-1}(O)) \simeq 0$, тогда по следствию 2 и $H^1(\hat{D}, L^{-1}(O)) \simeq 0$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть выполнены условия а) и в). Рассмотрим уравнение $\chi(D_1)Y' = f$ для любой функции $f \in O(D^0)$. Пусть F — голоморфное продолжение функции $f \circ \psi$ с подмногообразия $\psi(D^0)$ на все G. В области G уравнение $\chi(D_1)\hat{Y} = F$ разрешимо [6], [7]. Поэтому $Y^1 = \hat{Y} \circ \psi^{-1}$ — решение уравнения в $O(D^0)$. По предложению из разрешимости уравнения (1) в $O(D^0)$ следует разрешимость этого уравнения в $O(D)$.

Необходимость. Пусть D — область голоморфности, и уравнение (1) разрешимо в $O(D)$ для любой функции $f \in O(D)$. Используя предложение, получим, что $[D_\zeta] \supset [\chi]$ для любого $\zeta \in C^n$. Покажем, что $H^1(\tilde{D}, O) \simeq 0$. Так как $\chi(z) \in [1, 0]$, то множество $\{b_k\}_{k=1}^{\infty} \neq \varnothing$ и существует $b_1 \in C$, для которого $\chi(b_1) = 0$. Тогда $\chi(z) = (z - b_1)\chi'(z)$, где $\chi'(z) \in [1, 0]$. Имеем $\chi(D_1) = (\partial/\partial z_1 - b_1) \circ \chi'(D_1)$. Пусть Y — решение уравнения (1) для некоторой функции $f \in O(D)$. Тогда функция $\varphi = \chi'(D_1)Y$ является решением уравнения $(\partial/\partial z_1 - b_1)\varphi = f$. По следствию 2 из [4] получим, что $H^1(\tilde{D}, O) \simeq 0$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность С. В. Знаменскому за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Знаменский С. В. О разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка в пространствах голоморфных функций, теореме Леонтьева и формуле Вострецова.— Сиб. матем. журн., 1977, т. XVIII, № 6, с. 1307—1320.

2. Знаменский С. В. Нетрадиционная выпуклость в направлении плоских областей и компактов и свойства голоморфных решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка.— ВИНИТИ, № 3063—80 Деп., 1980.

3. Знаменский С. В. Об областях существования аналитических решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.— Препринт ИФСО-6М. Красноярск, Ин-т физ. СО АН СССР, 1976. 17 с.

4. Пинчук С. И. О существовании голоморфных первообразных.— ДАН СССР, 1972, т. 204, № 2, с. 292—294.

5. Коробейник Ю. Ф. Существование аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности.— Матем. сб., 1969, т. 80 (112): 1, с. 52—76.

6. Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution.— Ann. Inst. Fourier, 1955—1956, № 6, p. 271—355.

7. Martineau A. Equations différentielles d'ordre infini.— Bull. Soc. math. France, 1967, v. 95, № 2, p. 109—154.

8. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций, III. О распространении спектрального синтеза.— Матем. сб., 1972, т. 88 (130): 3, с. 331—352.

г. Красноярск

Поступила 01.03.1984

С. А. Нефедов, Ф. А. Шолохович

УДК 517.938

О ПОЛУГРУППОВОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧАМ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Классический подход к задаче управления системой с распределенными параметрами заключается в сведении этой системы к дифференциальному уравнению в банаховом пространстве Z

$$dz(t)/dt = Az(t) + Bv(t), \ z(0) = z_0, \tag{1}$$

где A — производящий оператор некоторой сильно непрерывной полугруппы операторов $T(t)$, $v(t)$ — управление со значениями в пространстве R^n, B — линейный оператор из R^n в Z.

Хорошо известен (см. [1]) существенный недостаток этого подхода: он исключает из рассмотрения системы с граничным и сосредоточенным управлением. Изучение таких систем требует построения специальных „полугрупповых моделей“, созданию которых посвящено значительное количество работ, в том числе работы Р. Куртэйн и А. Притчарда [1], [2], И. Забчика [3] и другие. В рамках этих моделей проводится интенсивное изучение вопросов управляемости и стабилизируемости, однако полученные результаты пока имеют частный характер. В данной работе изучаются вопросы управляемости и стабилизируемости с использованием одного из вариантов полугруппового подхода. В § 1 дается описание применяемой полугрупповой модели, § 2 посвящен изучению вопросов управляемости, § 3 — свойству абсолютной стабилизируемости, которым обладают некоторые системы граничного управления.

§ 1. Полугрупповая модель системы граничного управления

Рассмотрим систему граничного управления

$$dz(t)/dt = -Lz(t),\ z(0) = z_0, \tag{2}$$

$$\tau(z(t)) = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i(t). \tag{3}$$

Здесь Z — комплексное гильбертово пространство функций, заданных на области G, L — замкнутый линейный оператор, $L: Z \to Z$, область определения которого $D(L)$ плотна в Z, τ — линейный граничный оператор с областью определения $D(\tau) \subset Z$ и областью значений $R(\tau) \subset Y$, Y — гильбертово пространство функций на $S = \partial G$, $y_i \in Y$, $v_i(t)$ — комплекснозначные управления, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V = R^n$.

Следуя Фатторини [4], определим оператор A: $D(A) = \{z \mid z \in D(L),\ \tau z = 0\}$, $Az = -Lz$ на $D(A)$, и введем следующие предположения:

1) A — производящий оператор некоторой сильно непрерывной полугруппы операторов $T(t)$ над Z;

2) $D(L) \subseteq D(\tau)$ и сужение τ на $D(L)$ непрерывно в графической норме, заданной на $D(L)$: $\|z\|_r = \|z\|_z + \|Lz\|_z$;

3) для любого i, $i = 1, \ldots, n$, существует единственный элемент $z_i \in Z$ такой, что $Lz_i = 0$ и $\tau z_i = y_i$.

Рассмотрим задачу (2) — (3) в пространстве обобщенных функций Z_{-1} над основными функциями из $Z_1 = D(A^*)$, $\|z\|_{z_1} = \|z\|_z + \|A^* z\|_z$. Отождествляя Z и Z^*, получим вложение

$$D(A^*) = Z_1 \subset Z \subset Z_{-1} = (D(A^*))^*. \tag{4}$$

Пусть $R(\lambda, A)$ — резольвента оператора A и $\sigma(A)$ — его спектр. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.1. *Пространство Z_{-1} есть пополнение пространства Z по норме $\|z\|_{-1} = \|R(\lambda, A) z\|_z$, $\lambda \notin \sigma(A)$. При этом норма $\|\cdot\|_{-1}$ эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|_{z_{-1}}$.*

Лемма 1.2. *Операторы полугруппы $T(t)$, продолженные по непрерывности на Z_{-1}, образуют сильно непрерывную полугруппу операторов $T_{-1}(t)$ над Z_{-1} с производящим оператором A_{-1} таким, что $D(A_{-1}) = Z$ и $A_{-1} \supset A$. При $\lambda \notin \sigma(A)$ оператор $(\lambda J - A_{-1})$ является изоморфизмом, переводящим Z в Z_{-1}, и $T(t)$ в $T_{-1}(t)$.*

Теорема 1.1 (вариант теоремы Забчика [3]). *Пусть $v_i \in C^2\,[0, t_0]$ и*

$$z_0 - \sum_{i=1}^{n} z_i v_i(0) \in D(A),$$

тогда решение граничной задачи (2) — (3) *совпадает с решением уравнения*

$$dz(t)/dt = A\left(z(t) - \sum_{i=1}^{n} z_i v_i(t)\right) \tag{5}$$

в Z и с решением уравнения

$$dz(t)/dt = A_{-1}z(t) + Bv(t), \quad Bv = -\sum_{i=1}^{n} A_{-1}z_i v_i \tag{6}$$

в Z_{-1}, причем решение $z(t)$ принимает значения в Z и непрерывно в топологии пространства Z.

Решения уравнений (5) и (6) совпадают, если они оба определены, однако решение $z(t)$ уравнения (6) существует при более широких условиях, чем решение уравнения (5), в частности, при $v_i \in W_2^1[0, t_0]$. Нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 1.3. *Если $z_0 \in Z$ и $v_1 \in W_2^1[0, t_0]$, то при $t \in [0, t_0]$ решение $z(t)$ уравнения (6) принадлежит пространству Z и непрерывно в норме этого пространства.*

При $v_i \in L_2[0, t_0]$ обычно рассматривается ослабленное решение уравнения (1), формально задаваемое формулой Коши

$$z(t) = T(t) z_0 + \int_0^t T(t-\xi) Bv(\xi)\, d\xi.$$

Нетрудно показать, что формула Коши в этом случае дает решение уравнения (6) в пространстве Z_{-1}. В случае уравнения (6) это означает, что формула Коши дает решение этого уравнения в топологии пространства Z_{-2}. Пространство Z_{-2} строится при этом аналогично пространству Z_{-1}, если принять в (4) Z_{-1} за Z.

В общем случае решения уравнения (6), получаемые из формулы Коши при $v_i \in L_2[0, t_0]$, не принадлежат исходному пространству Z. Однако существуют динамические системы (6), для которых $z(t) \in Z$ при любых $z_0 \in Z$ и $v_i \in L_2[0, t_0]$. Такие системы (6) будем называть замкнутыми. К замкнутым системам относятся, напр., системы, порождаемые уравнениями гиперболического типа $\partial\omega/\partial t = A(x)\,\partial\omega/\partial x + B(x)\,\omega$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\omega \in R^m$, $C_0\omega(0, t) = 0$,

$$C_1\omega(1, t) = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i(t),$$

где $A(x)$, $B(x)$, C_0, C_1 — вещественные матрицы размерности $[m \times m]$, удовлетворяющие предположениям теоремы 3.1 из [5]. При $z_0 \in Z$ справедлива

Лемма 1.4. *Если динамическая система* (6) *замкнута, то*:

1) *оператор* $G: Gv = \int_0^t T_{-1}(\xi) Bv(\xi)\, d\xi$ *является непрерывным оператором из* $L_2[0, t, V]$ *в* Z;

2) *ослабленное решение $z(t)$ уравнения* (6) *принадлежит пространству Z и непрерывно в топологии этого пространства.*

Так как $z(t)$ непрерывно в топологии Z, то эту функцию естественно считать обобщенным решением задачи (2) — (3). Далее мы будем рассматривать только замкнутые системы вида (6).

§ 2. Управляемость

Система (6) называется управляемой за время t_0, если любая точка $z \in Z$ достижима из нуля за время t_0 с помощью управлений из $L_2[0, t_0]$. Известно, что классическая модель (1) неуправляема при любом конечномерном „входе" $B: R^n \to Z$.

Теорема 2.1. *Система* (6) *управляема за время t_0 тогда и только тогда, когда существуют константы m, $M > 0$ такие, что для любого $z \in D(A^*)$*

$$m\|z\| \leqslant \|B^*T^*(\xi) z\|_{L_2[0, t_0, V]} \leqslant M\|z\|, \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $Gv=\int_0^{t_0} T_{-1}(\xi) Bv(\xi)\,d\xi$, оператор G переводит $L_2[0, t_0, V]$ в Z_{-1}, область значений этого оператора $R(G)$ совпадает с множеством всех достижимых за время t_0 состояний. Из замечания 3.5 ([2] (с. 55)) следует, что $R(G)$ совпадает с областью значений оператора $R(\lambda, A_{-1})$ (т. е. с Z) тогда и только тогда, когда существуют постоянные m_1, $M_1>0$ такие, что для любого $z\in Z_1$

$$m_1\|R^*(\lambda, A_{-1})z\|_{z_1}\leqslant\|G^*z\|_{L_2[0, t_0, V]}\leqslant M_1\|R^*(\lambda, A_{-1})z\|_{z_1}. \tag{9}$$

Так как

$$\langle z^*, Gv\rangle_{z_1, z_{-1}}=\left\langle z^*, \int_0^{t_0} T_{-1}(\xi) Bv(\xi)\,d\xi\right\rangle_{z_1, z_{-1}}=$$

$$=\int_0^{t_0}\langle z^*, T_{-1}(\xi) Bv(\xi)\rangle_{z_1, z_{-1}}d\xi=\int_0^{t_0}\langle B^*T^*_{-1}(\xi)z^*, v(\xi)\rangle_{V, V}d\xi=$$

$$=(B^*T^*_{-1}(\cdot), v)_{L_2[0, t_0, V]},$$

то $G^*z^*=B^*T^*_{-1}(\cdot)z^*$, или $G^*z=B^*T^*(\cdot)z$ при $z\in Z_1=D(A^*)$. С другой стороны, оператор $R^*(\lambda, A_{-1})=R(\overline{\lambda}, A^*_{-1})$ является изоморфизмом между пространствами Z и Z_1, поэтому существуют постоянные m_2, $M_2>0$ такие, что

$$m_2\|z\|\leqslant\|R^*(\lambda, A_{-1})z\|_{z_1}\leqslant M_2\|z\| \tag{10}$$

для любого $z\in Z_1=D(A^*)$. Неравенство (8) следует теперь из соотношений (9) и (10).

Оператор G^* непрерывен на плотном в Z множестве $D(A^*)$, и поэтому существует продолжение по непрерывности $\widetilde{G}$ этого оператора на все пространство Z. Ввиду соотношения (8) оператор $\widetilde{G}$ является изоморфизмом между Z и подпространством $\hat{L}_2[0, t_0, V]$ пространства $L_2[0, t_0, V]$,

$$\hat{L}_2[0, t_0, V]=\mathrm{sp}\,\{B^*T^*(\xi)z\,|\,z\in D(A^*)\}.$$

Теорема 2.2. *Система* (6) *управляема за время t тогда и только тогда, когда оператор W_t*

$$W_tz=\int_0^t T_{-1}(\xi)\,B(\widetilde{G}z)(\xi)\,d\xi,\quad W_t\colon Z\to Z,$$

является положительно определенным.

Доказательство. Необходимость. В силу замкнутости системы (6) справедливо $W_tz\in Z$. Оператор W_t, как легко видеть, замкнут, и будучи определен на всем пространстве Z, непрерывен на Z. Далее, при $z\in D(A^*)$

$$(W_tz, z)=\langle z, W_tz\rangle_{z^*, z}=\langle z, W_tz\rangle_{z_1, z_{-1}}=$$

$$=\int_0^t\langle B^*T^*_{-1}(\xi)z, B^*T^*_{-1}(\xi)z\rangle_{V^*, V}d\xi=\|B^*T^*_{-1}(\cdot)z\|^2_{L_2[0, t, V]}\geqslant m^2\|z\|^2.$$

Отсюда следует, что W_t является самосопряженным положительно определенным оператором.

Достаточность. Очевидно, существует обратный оператор W_t^{-1}. Зафиксируем $z\in Z$ и положим $u=\widetilde{G}\,W_t^{-1}z$, $v(t-\xi)=u(\xi)$. Тогда

$$\int_0^t T(t-\xi)\,Bv(\xi)\,d\xi=\int_0^t T(\xi)\,Bu(\xi)\,d\xi=\int_0^t T(\xi)\,B(\widetilde{G}\,W_t^{-1}z)(\xi)\,d\xi=W_tW_t^{-1}z=z,$$

т. е. управление $v(\xi)$ приводит из 0 в точку z.

Замечание. Теоремы этого параграфа являются аналогами соответствующих теорем, известных для классического случая системы (1) (см. [2], теорема 3.7).

Для случая скалярного управления ($V = R^1$) имеется критерий управляемости системы (5) — (6), связывающий это свойство со спектральными характеристиками оператора A (см. [6], [7]). В работе [7] имеются также примеры управляемых систем.

§ 3. Абсолютная стабилизируемость

Систему (6) будем называть абсолютно стабилизируемой за время t_0, если существует линейный оператор $K: D(K) \to V$, $D(K) \subseteq Z$, такой, что оператор

$$A_K = A_{-1} + BK, \ D(A_K) = \{z \mid z \in D(K),\ A_K z \in Z\}$$

порождает сильно непрерывную нильпотентную полугруппу $S(t)$ операторов в пространстве Z, удовлетворяющую условию $S(t_0) = 0$.

Таким образом, любое ослабленное решение уравнения

$$dz/dt = (A_{-1} + BK)z \tag{11}$$

обладает свойством $z(t) = 0$ при $t \geqslant t_0$.

Свойство абсолютной стабилизируемости впервые было исследовано Д. Л. Расселом для уравнения колебаний струны [8]. Описанная выше конструкция позволяет получить более общий результат в этом направлении.

Теорема 3.1. *Пусть система* (6) *замкнута, управляема за время* t_0 *и не существует функции* $v \in L_2[0, t_0, V]$ *такой, что*

$$\int_0^{t_0} T_{-1}(t - \xi) Bv(\xi)\, d\xi = 0 \tag{12}$$

(*другими словами, система не приводима из* 0 *в* 0 *ненулевым управлением за время* t_0). *Тогда система* (6) *абсолютно стабилизируема за время* t_0.

Доказательство. Определим оператор $F: Z \to L_2[0, t_0, V]$, $Fz = v$, где $v(\xi) = u(t_0 - \xi)$ и $u = -\widetilde{G}\, W_{t_0}^{-1}(T(t_0) z)$. Очевидно, управление $v_0 = Fz_0$ приводит из z_0 в 0 за время t_0. Пусть

$$z(t) = T(t) z_0 + \int_0^t T_{-1}(t - \xi) B(Fz_0)(\xi)\, d\xi, \tag{13}$$

тогда при $t \geqslant t_0$ справедливо $z(t) = 0$. Покажем, что операторы $S(t)$, задаваемые равенством $S(t) z_0 = z(t)$, образуют сильно непрерывную полугруппу операторов. Действительно, линейность операторов $S(t)$ очевидна, ограниченность и сильная непрерывность следуют из леммы 1.4. Покажем полугрупповое свойство. Пусть $\tau > 0$ и $v_1 = Fz(\tau)$ — управление, приводящее в 0 за время t_0 из точки $z(\tau)$. Из условия (12) следует, что существует лишь единственное управление, приводящее из z_0 в 0 за время t_0, поэтому $v_1(\xi) = v_0(\xi + \tau)$ почти всюду (при $\xi > t_0$ считаем $v_0(\xi) = 0$). Отсюда следует

$$S(t) S(\tau) z_0 = S(t + \tau) z_0,$$

и кроме того,

$$(FS(\tau) z_0)(\xi) = (Fz_0)(\xi + \tau) = v_0(\xi + \tau). \tag{14}$$

Таким образом, $S(t)$ — сильно непрерывная полугруппа операторов; обозначим через A_K ее производящий оператор. Пусть $z_0 \in D(A_K)$, тогда в $L_2[0, t_0, V]$ существует предел

$$\lim_{\tau \to +0} (v_0(\xi + \tau) - v_0(\xi))/\tau = FA_K z_0,$$

где $v_0 = Fz_0$. Повторяя рассуждения Хилле и Филлипса [9] (с. 550), легко показать, что v_0 есть абсолютно непрерывная функция такая, что $v(t_0) = 0$ и $v' \in L_2[0, t_0, V]$. Определим оператор K: $Kz_0 = (Fz_0)(0)$ — значение функции

$v_0(\xi) = (Fz_0)(\xi)$ в точке 0. Этот оператор определен на элементах из $D(A_K)$. Положим $D(K) = D(A_K)$. Если $z_0 \in D(A_K)$, то из (14) следует

$$Kz(t) = K(S(t)z_0) = (FS(t)z_0)(0) = (Fz_0)(t) = v_0(t) \tag{15}$$

почти всюду. Ввиду (13) и (15) функция $S(t)z_0$ при $z_0 \in D(A_K)$ удовлетворяет равенству

$$S(t)z_0 = T(t)z_0 + \int_0^t T_{-1}(t-\xi)BK(S(\xi)z_0)\,d\xi. \tag{16}$$

Вычисляя предел $\lim\limits_{t\to+0}(S(t)z_0 - z_0)/t$ в пространстве Z_{-1} с помощью равенства (16), получим при $z_0 \in D(A_K)$ $A_K z_0 = A_{-1}z_0 + BKz_0 = (A_{-1} + BK)z_0$. Так как $A_K z_0 \in Z$, то $(A_{-1} + BK)z_0 \in Z$ и в силу $D(A_K) = D(K)$ имеем $A_K = A_{-1} + BK$.

Известно, что исследованная Д. Л. Расселом система (см. [8], сс. 336, 339) удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Таким образом, вывод об абсолютной стабилизируемости этой системы может быть получен из общей теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Curtain R., Pritchard A. J. An abstract theory of unbounded control action for distributed parameter systems.— SIAM J. Control and Optim., 1977, v. 15, № 4, p. 566—611.
2. Curtain R., Pritchard A. J. Infinite dimensional linear systems theory.— Lect. Notes Control and Inform. Sci., 1978, v 8. 297 p.
3. Zabczyk J. A. Semigroup approach to boundary value control. — Proc. 2-nd IFAC Simp. Coventry, 1977. Oxford, 1978, p. 99—107.
4. Fattorini H. O. Boundary control systems.— SIAM J. Control and Optim., 1968, v. 6, № 3, p. 349—385.
5. Russell D. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations.— SIAM Rev., 1978, v. 20, № 4, p. 639—739.
6. Нефедов С. А. К теории управляемости систем с распределенными параметрами.— Дифференц. уравнения, 1983, т. XIX, с. 1998—2000.
7. Нефедов С. А. К теории управляемости систем с распределенными параметрами.— ВИНИТИ, № 106—81 Деп., 1981.
8. Russell D. L. Control theory of hyperbolic equations related to certain quations in harmonic analyses and spectral theory.— J. Math. Anal. Appl., 1972, v. 40, № 2, p. 336—368.
9. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962. 832 с.

г. Свердловск

Поступили
первый вариант — 26.10.1982
окончательный вариант — 26.04.1984

В. И. Плотников, И. М. Старобинец

УДК 517.972

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ В ГЛАДКИХ ЗАДАЧАХ НА ЭКСТРЕМУМ

Гладкие задачи занимают значительное место в общей экстремальной теории. Им посвящено достаточно большое количество работ, в которых обычно доказываются те или иные условия экстремальности функционала на множестве, задаваемом набором неравенств и равенств ([1] — [3] и др.).

В данной работе ограничения типа неравенств заменены гораздо более общими ограничениями в виде операторных включений в топологических пространствах, к которым добавлено ограничение типа операторного равенства и континуума неравенств. В связи с этим здесь используется методика, предложенная в [4], [5] для задач оптимального управления и формализованная в [6] для широкого круга экстремальных задач. Основной результат сформулирован в теореме 1 в виде необходимого условия экстремума для решаемой задачи. Следует отметить, что подобный подход может быть с успехом применен во многих других задачах, содержащих операторные включения.