Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии в весовом гельдоровском пространстве функций, *Алгебра и анализ*, 1993, том 5, выпуск 1, 109–142

https://www.mathnet.ru/aa367

Алгебра и анализ
Том 5 (1993), вып. 1

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ В ВЕСОВОМ ГЁЛЬДЕРОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ

Г. И. Бижанова, В. А. Солонников

В работе изучается начально-краевая задача для параболического уравнения второго порядка с граничным условием $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b}\cdot\nabla u + b_0 u = \varphi$, не вкладывающаяся в общую теорию параболических начально-краевых задач. Основным результатом работы является теорема о ее разрешимости в весовых пространствах Гельдера с весом вида t^a, привлечение которых позволяет свести к минимуму порядок согласования данных задачи (при $a \in (0,1)$ никакого согласования не требуется). Кроме того, доказываются оценки решения в обычных анизотропных пространствах $C^{2+l,1+l/2}(Q_T)$. При доказательстве важную роль играет установленная в работе явная формула для ядра соответствующего полупространственного потенциала.

§1. Введение

Пусть Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей Γ, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_T = \Gamma \times (0,T)$. В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{gathered} u_t - A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u = f(x,t), \qquad (x,t)\in Q_T: \quad x\in\Omega, \quad t\in(0,T), \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b}\cdot\nabla u + b_0 u\big|_{\Sigma_T} = \varphi(x,t). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathcal{A}$ — эллиптический оператор второго порядка с коэффициентами, зависящими от x и t:

$$\mathcal{A}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a(x,t)u,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant a_0 > 0, \qquad \forall (x,t)\in Q_T, \quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

Ключевые слова: параболическое уравнение второго порядка, некоэрцитивная начально-краевая задача, весовые пространства Гельдера.

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathbf{b} \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^n b_i(x,t) u_{x_i}$, и предполагается, что

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \leqslant -b_0 < 0, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_n)$ — единичная внутренняя нормаль к поверхности Γ в точке x.

Задача (1.1) возникает при описании различных процессов тепло- и массообмена [1], а также при линеаризации однофазной задачи Стефана [2–4]. Если $n > 1$, то она не вкладывается в класс параболических начально-краевых задач, для которых построена общая теория [5, 6], поскольку для нее нарушается условие дополнительности (условие Шапиро–Лопатинского). Более того, если не выполнено условие (1.2), то, как показано в статье С. И. Темирбулатова [7], задача (1.1) перестает быть корректной в смысле Адамара.

Работы [8–12] посвящены доказательству разрешимости задачи (1.1) в обобщенной постановке в различных функциональных пространствах. В [13, 14] получены „коэрцитивные“ оценки решения в пространствах $W_p^{4,1}(Q_T)$ и $W_2^{2+2l,1+l}(Q_T)$ соответственно и доказаны соответствующие теоремы существования.

Теорема о разрешимости задачи (1.1) в гёльдеровских пространствах (теорема 1.1) устанавливается в работах Б. В. Базалия и С. П. Дегтярева [4] и Е. В. Радкевича [15, 16], где эта задача возникает как результат линеаризации однофазной задачи Стефана, причем Е. В. Радкевич рассматривает целый класс задач со свободными границами, родственных задаче Стефана, и соответствующих линейных задач. Наконец, отметим, что в работах [17–19] начато изучение начально-краевых задач для параболического уравнения, в которых на одной части Γ_1 поверхности Γ задается то же условие, что в (1.1), а на $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ — условие Дирихле или Неймана, причем $\overline{\Gamma} \cap \overline{\Gamma}_1$ является непустым гладким $n-2$-мерным многообразием.

В настоящей работе задача (1.1) изучается в весовых гёльдеровских пространствах с весом в виде степенной функции $t^{s/2}$, что позволяет ослабить ограничения на данные задачи, в частности, понизить порядок их согласования при $t = 0$ или даже вообще отказаться от каких бы то ни было условий согласования. Для общих параболических начально-краевых задач соответствующий результат доказан в [20–23]. Прежде чем переходить к точным формулировкам, напомним определение основных гёльдеровских пространств. Под $C^s(\Omega)$, $s \geqslant 0$, будем понимать пространство заданных в Ω функций $u(x)$, которые $[s]$ раз непрерывно дифференцируемы и имеют конечную норму

$$|u|_\Omega^{(s)} = \sum_{|j|<s} |D^j u|_\Omega + [u]_\Omega^{(s)},$$

где $|v|_\Omega = \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$, $[u]_\Omega^{(s)} = \sum_{|j|=s} |D^j u|_\Omega$ при целом s и

$$[u]_\Omega^{(s)} = \sum_{|j|=[s]} \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|^{-s+[s]} |D^j u(x) - D^j u(y)|$$

при нецелом s. Под $C^{l,l/2}(Q_T)$ с любым нецелым $l>0$ будем понимать пространство функций $u(x,t)$, заданных в Q_T и имеющих конечную норму

$$|u|^{(l,l/2)}_{Q_T} = \sum_{2j_0+|j|<l} |D^j_x D^{j_0}_t u|_{Q_T} + \langle u\rangle^{(l,l/2)}_{Q_T}, \tag{1.3}$$

$$\langle u\rangle^{(l,l/2)}_{Q_T} = \langle u\rangle^{(l)}_{x,Q_T} + \langle u\rangle^{(l/2)}_{t,Q_T}$$

$$\equiv \sup_{t\in(0,T)} [u(\cdot,t)]^{(l)}_{\Omega} + \sup_{x\in\Omega}[u(x,\cdot)]^{(l/2)}_{(0,T)},$$

если $l\in(0,1)$, и

$$\langle u\rangle^{(l/2)}_{Q_T} = \sum_{2j_0+|j|=[l]} \langle D^j_x D^{j_0}_t u\rangle^{(l-[l],(l-[l])/2)}_{Q_T} + \sum_{2j_0+|j|=[l]-1} \langle D^j_x D^{j_0}_t u\rangle^{((1+l-[l])/2)}_{t,Q_T}$$

в общем случае.

Пусть l — положительное нецелое число и $s\in[0,l]$. Следуя [20–23] определим $C^{l,l/2}_s(Q_T)$ как пространство заданных в Q_T функций с конечной нормой

$$|u|^{(l,l/2)}_{s,Q_T} = |u|^{(s,s/2)}_{Q_T} + \sup_{t\in(0,T)} t^{(l-s)/2}\langle u\rangle^{(l,l/2)}_{Q'_t}$$

$$+ \sum_{s<2j_0+|j|<l} \sup_{t\in(0,T)} t^{(2j_0+|j|-s)/2}|D^{j_0}_t D^j_x u(\cdot,t)|_{\Omega}, \tag{1.4}$$

где $|u|^{(s,s/2)}_{Q_T}$ определяется (1.3) (как при целых, так и при нецелых $s\geqslant 0$), а $Q'_t=\Omega\times(t/2,t)$.

Через $\overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_s(Q_T)$ обозначим подпространство $C^{l,l/2}_s(Q_T)$, состоящее из функций, которые удовлетворяют нулевым начальным условиям

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = 0, \qquad j=0,\dots,[s].$$

Пространства $C^{l,l/2}_s(Q_T)$ можно ввести и при $s<0$, положив

$$|u|^{(l,l/2)}_{s,Q_T} = \sup_{t\in(0,T)} t^{(l-s)/2}\langle u\rangle^{(l,l/2)}_{Q'_t}$$

$$+ \sum_{0\leqslant 2j_0+|j|<l} \sup_{t\in(0,T)} t^{(2j_0+|j|-s)/2}|D^{j_0}_t D^j_x u|_{\Omega}. \tag{1.5}$$

Будем считать, что при $s<0$ $\overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_s(Q_T)=C^{l,l/2}_s(Q_T)$.

Все введенные выше пространства естественным образом определяются для функций $u(x)$, заданных на многообразиях $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ (например, на границе области Ω), и для функций $u(x,t)$, заданных на $\mathcal{M}\times(0,T)$.

Приведем нужные нам свойства пространств $C^{l,l/2}_s(Q_T)$.

I. В пространствах $\overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{s}(Q_T)$ норма (1.4) или (1.5) эквивалентна норме

$$\|u\|^{(l,l/2)}_{s,Q_T} = \sup_{t\in(0,T)} t^{(l-s)/2}\langle u\rangle^{(l,l/2)}_{Q'_t} + \sup_{t\in(0,T)} t^{-s/2}|u(\cdot,t)|_\Omega. \tag{1.6}$$

II. Если в (1.4)–(1.6) заменить $Q'_t = \Omega\times(t/2,t)$ на $Q''_t = \Omega\times(\theta t,t)$ с любым $\theta\in(0,1)$, то полученные таким образом нормы будут эквивалентны исходным.

Свойство I) доказано в [22, 23], а II) очевидно. Наконец, справедливо следующее предложение.

Лемма 1.1. *Пусть $\omega_\lambda(t)$ — гладкая функция t, зависящая от параметра $\lambda\in(0,T/2)$, обращающаяся в нуль при малых t, принимающая постоянное значение при $t>\lambda$ и удовлетворяющая неравенствам*

$$|D^k_t\omega_\lambda(t)| \leqslant c(k)\lambda^{-a-k} \qquad (a\geqslant 0,\ k\leqslant[l/2]+1).$$

Для любой $u\in\overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{s}(Q_T)$ справедлива оценка

$$|u\omega_\lambda|^{(l,l/2)}_{s,Q_T} \leqslant c\lambda^{-a}|u|^{(l,l/2)}_{s,Q_T} \tag{1.7}$$

с постоянной c, не зависящей от λ.

Доказательство. Очевидно,

$$\sup_{t\in(2\lambda,T)} t^{(l-s)/2}\langle u\omega_\lambda\rangle^{(l,l/2)}_{Q'_t} + \sup_{t\in(2\lambda,T)} t^{-s/2}|u\omega_\lambda|_\Omega \leqslant c(0)\lambda^{-a}\|u\|^{(l,l/2)}_{s,Q_T}. \tag{1.8}$$

Ели же $t\leqslant 2\lambda$, то

$$\begin{aligned}\langle u\omega_\lambda\rangle^{(l,l/2)}_{Q'_t} &\leqslant \sum_{j=0}^{[l/2]} \max_{t_1\in(t/2,t)}\left|\frac{d^j\omega_\lambda}{dt_1^j}\right|\langle u\rangle^{(l-2j,(l/2)-j)}_{Q'_t} \\ &\quad+\sum_{2k_0+|k|<l}|D^{k_0}_t D^k_x u|_{Q'_t}\langle\omega_\lambda\rangle^{(l/2-k_0-|k|/2)}_{(t/2,t)} \\ &\leqslant c\lambda^{-a}\left\{\sum_{j=0}^{[l/2]} t^{-j}\langle u\rangle^{(l-2j,l/2-j)}_{Q'_t} + \sum_{2k_0+|k|<l} t^{k_0+|k|/2-l/2}|D^{k_0}_t D^k_x u|_{Q'_t}\right\},\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sup_{t\in(0,2\lambda)} t^{(l-s)/2}\langle u\omega_\lambda\rangle^{(l,l/2)}_{Q'_t} \leqslant c\lambda^{-a}|u|^{(l,l/2)}_{s,Q_T}.$$

В силу свойства I) отсюда и из (1.8) следует оценка (1.7). Лемма доказана.

Переходим к описанию результатов настоящей работы, для чего прежде всего выпишем условия согласования для задачи (1.1). Для любой функции $v(x,t)$

положим $v^{(k)}(x) = \dfrac{\partial^k v}{\partial t^k}\Big|_{t=0}$. Если $u(x,t)$ — решение задачи (1.1), то $u^{(j)}(x)$ определяются из рекуррентных формул

$$
\begin{aligned}
&u^{(0)}(x) = u_0(x),\\
&u^{(j+1)}(x) = f^{(j)} + (\mathcal{A}u)^{(j)} = f^{(j)} + \sum_{i=0}^{j} C_j^i \mathcal{A}^{(i)}(x,0,\frac{\partial}{\partial x})u^{(j-i)}(x),
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

где

$$
\mathcal{A}^{(i)}(x,0,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}^{(i)}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{p=1}^{n} a_p^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x_p} + a_0^{(i)}(x),
$$

$C_j^i = \dfrac{j!}{i!(j-i)!}$ — биномиальные коэффициенты. Дифференцируя краевое условие, получим

$$
u^{(j+1)} = \varphi^{(j)} - \sum_{i=0}^{j} C_j^i \mathbf{b}^{(i)}(x)\cdot\nabla u^{(j-i)} - \sum_{i=0}^{j} C_j^i b_0^{(i)}(x)u^{(j-i)} \qquad (x\in\Gamma).
$$

Будем говорить, что выполняется условие согласования порядка $k \geqslant 1$, если

$$
\begin{aligned}
&f^{(j)}(x) + \sum_{i=0}^{j} C_j^i \mathcal{A}^{(i)}(x,0,\frac{\partial}{\partial x})u^{(j-i)}(x)\Big|_{x\in\Gamma}\\
&\quad = \varphi^{(j)} - \sum_{i=0}^{j} C_j^i(\mathbf{b}^{(i)}(x)\cdot\nabla u^{(j-i)} + b_0^{(i)}(x)u^{(j-i)})\Big|_{x\in\Gamma}, \qquad j = 0,\dots,k-1.
\end{aligned}
$$

При изучении задачи (1.1) в весовых гёльдеровских пространствах мы исходим из следующего результата (см. [4, 15, 16]).

Теорема 1.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная или неограниченная область с границей $\Gamma \subset C^{l+2}$, $\mathcal{A}$ — эллиптический оператор с коэффициентами из $C^{l,l/2}(Q_T)$, $\mathbf{b}, b_0 \in C^{l+1,(l+1)/2}(\Sigma_T)$, и выполнено условие (1.2). При любых $f \in C^{l,l/2}(Q_T)$, $u_o \in C^{l+2}(\Omega)$, $\varphi \in C^{l+1,(l+1)/2}(\Sigma_T)$, удовлетворяющих условиям согласования порядка $1+[l/2]$, задача (1.1) имеет единственное решение со следующими свойствами: $u \in C^{l+2,l/2+1}(Q_T)$, $u_t \in C^{l+1,(l+1)/2}(\Sigma_T)$. Это решение удовлетворяет неравенству*

$$
|u|_{Q_T}^{(l+2,l/2+1)} + |u_t|_{\Sigma_T}^{(l+1,(l+1)/2)} \leqslant C(T)\big(|f|_{Q_T}^{(l,l/2)} + |u_0|_{\Omega}^{(l+2)} + |\varphi|_{\Sigma_T}^{(l+1,(l+1)/2)}\big), \tag{1.10}
$$

где $C(T)$ — возрастающая (экспоненциальная) функция T.

В настоящей работе доказывается теорема о разрешимости задачи (1.1) в пространстве $C_s^{l+2,l/2+1}(Q_T)$.

Теорема 1.2. *Пусть* Ω, $\mathbf{b}$, b_0 *и оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1. *Предположим, что при некотором* $s \in (l, 2+l]$, $f \in C_{s-2}^{l,l/2}(Q_T)$, $\varphi \in C_{s-1}^{l+1,(l+1)/2}(\Sigma_T)$, $u_0 \in C^s(\Omega)$ *выполнены условия согласования порядка* $[s/2]$ *и, кроме того,* $u_0|_\Gamma \in C^{s'}(\Gamma)$ *с* $s' = \min(s+1, l+2)$. *Тогда задача* (1.1) *имеет единственное решение* $u \in C_s^{l+2,l/2+1}(Q_T)$ *такое, что* $u_t \in C_{s-1}^{l+1,(l+1)/2}(\Sigma_T)$, *и для него справедливо неравенство*

$$|u|_{s,Q_T}^{(l+2,l/2+1)} + |u_t|_{s-1,\Sigma_T}^{(l+1,(l+1)/2)} \leqslant C(T)\big(|f|_{s-2,Q_T}^{(l,l/2)} + |\varphi|_{s-1,Q_T}^{(l+1,(l+1)/2)} + |u_0|_\Omega^{(s)} + |u_0|_\Gamma^{(s')}\big), \tag{1.11}$$

По сравнению с аналогичными результатами для обычных параболических начально-краевых задач, установленными в [20–23], эта теорема содержит лишние требования $l < s$ и $u_0|\Gamma \in C^{s'}(\Gamma)$, от которых мы не смогли избавиться. Хотя оценка (1.11) и не доказана для произвольного положительного s, тем не менее применяя теорему 1.2 несколько раз, можно показать, что $u \in C^{2+l,1+l/2}(Q_{\tau,T})$, где $Q_{\tau,T} = \Omega \times (\tau, T)$, с любым $\tau > 0$, даже если $u_0 \in C^s(\Omega)$, $u_0|\Gamma \in C^{s+1}(\Omega)$ с как угодно малым $s > 0$. Действительно, из теоремы следует, что при любом $\tau_1 > 0$ $u(\cdot,\tau_1) \in C^{2+l_1}(\Omega)$ с $l_1 \in (0,s)$; положив $s_1 = 1 + l_1$ и взяв $u = u(x,\tau_1)$ в качестве нового начального условия, можно показать, что $u(\cdot, 2\tau_1) \in C^{2+l_2}(\Omega)$ с произвольным l_2, удовлетворяющим условиям $l_2 < s_1$, $l_2 \leqslant l$, и т.д.; если $2 + l_k \in (l, 2+l)$, то применяя теорему еще раз, придем к нужному результату. В частности, если данные задачи бесконечно дифференцируемы, то и решение будет бесконечно дифференцируемым при $t > 0$.

Работа построена следующим образом. В §2 рассматривается задача с нулевыми начальными данными, т.е. предполагается, что $u_0 = 0$, $f \in \overset{\circ}{C}{}_{s-2}^{l,l/2}(Q_T)$, $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{l+1,(l+1)/2}(\Sigma_T)$, и доказывается разрешимость задачи (1.1) в пространстве $\overset{\circ}{C}{}_s^{2+l,1+l/2}(Q_T)$. Как и в [22, 23], оценка (1.11) выводится из (1.10) и из некоторых дополнительных оценок младших весовых норм типа $\sup_t t^{-s/2}|u(\cdot,t)|_\Omega$, при выводе которых важную роль играет явное представление решения модельной полупространственной задачи для уравнения теплопроводности в виде потенциала.

В §3 теорема 1.2 доказывается при общих предположениях. В §4 изучается модельная задача, выводится формула для ее решения в виде потенциала, изучаются свойства его ядра. Наконец, в §5 приводится элементарное доказательство оценки (1.10) для модельной задачи. Этот параграф не имеет прямого отношения к доказательству теоремы 1.2 и играет роль приложения.

§2. Задача с нулевыми начальными данными

В этом параграфе доказывается следующее предложение.

Теорема 2.1. *Предположим, что* a_{ij}, a_i, a, b_i, b_0, Γ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1, *а* $u_0 = 0$. *При любых* $f \in \overset{\circ}{C}{}_{s-2}^{l,l/2}(Q_T)$, $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{(l+1,(l+1)/2}(\Sigma_T)$, *где* $s \in$

$(l, 2+l)$, *задача* (1.1) *имеет единственное решение* $u \in \overset{\circ}{C}{}_s^{l+2,l/2+1}(Q_T)$, *и*

$$|u|_{s,Q_T}^{(l+2,l/2+1)} \leqslant c_1(T)\big(|f|_{s-2,Q_T}^{(l,l/2)} + |\varphi|_{s-1,\Sigma_T}^{(l+1,(l+1)/2)}\big). \tag{2.1}$$

Доказательство. Начнем с получения априорной оценки (2.1) для произвольного решения $u \in \overset{\circ}{C}{}_s^{l+2,l/2+1}(Q_T)$. Фиксируем произвольное $t_1 \in (0,T)$, и пусть $\eta(t)$ — бесконечно дифференцируемая монотонная функция, равная нулю при $t \leqslant 1/4$ и единице при $t \geqslant 1/2$. Очевидно, $v = \eta(t/t_1)u$ является решением задачи

$$v_t - \mathcal{A}\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)v = f\eta + u\eta_t'\Big(\frac{t}{t_1}\Big)\frac{1}{t_1}, \qquad v\big|_{t=0} = 0,$$
$$v_t + \mathbf{b}\cdot\nabla v = \varphi\eta + u\eta_t'\Big(\frac{t}{t_1}\Big)\frac{1}{t_1} \qquad (x \in \Gamma).$$

В силу (1.10) и леммы 1.1

$$\begin{aligned}
&\langle v\rangle_{Q'_{t_1}}^{(l+2,l/2+1)} + \langle v_t\rangle_{\Sigma'_{t_1}}^{(l+1,(l+1)/2)}\\
&\quad\leqslant c_2(T)\Big(|f\eta|_{Q''_{t_1}}^{(l,l/2)} + \frac{1}{t_1}|u\eta_t'|_{Q''_{t_1}}^{(l,l/2)} + |\varphi\eta|_{\Sigma''_{t_1}}^{(l+1,(l+1)/2)} + \frac{1}{t_1}|u\eta_t'|_{\Sigma''_{t_1}}^{(l+1,(l+1)/2)}\Big)\\
&\quad\leqslant c_3(T)\Big[\big(|f|_{s-2,Q_{t_1}}^{(l,l/2)} + |\varphi|_{s-1,\Sigma_{t_1}}^{(l+1,(l+1)/2)}\big)t_1^{-1-l/2+s/2}\\
&\qquad + t_1^{-1}\big(\langle u\rangle_{Q''_{t_1}}^{(l,l/2)} + \langle u\rangle_{\Sigma''_{t_1}}^{(l+1,(l+1)/2)}\big)\\
&\qquad + t_1^{-1-l/2}|u(\cdot,t)|_\Omega + t_1^{-3/2-l/2}|u(\cdot,t)|_\Gamma\Big],
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $Q''_{t_1} = \Omega\times(t_1/4,t_1)$, $\Sigma''_{t_1} = \Gamma\times(t_1/4,t_1)$. Для оценки норм $u(x,t)$ в правой части воспользуемся интерполяционным неравенством

$$t_1^{-1}\langle u\rangle_{Q''_{t_1}}^{(l,l/2)} \leqslant \varepsilon_1\langle u\rangle_{Q''_{t_1}}^{(l+2,l/2+1)} + c_4\varepsilon_1^{-l/2}t_1^{-1-l/2}\max_{t_1/4<t<t_1}|u(\cdot,t)|_\Omega$$

и

$$\begin{aligned}
t_1^{-1}\langle u\rangle_{\Sigma''_{t_1}}^{(l+1,(l+1)/2)} &\leqslant t_1^{-1}\sup_{t_1/4<t<t_1}|u(\cdot,t)|_\Gamma^{(l+1)} + \varepsilon_2\langle D_t u\rangle_{\Sigma''_{t_1}}^{(l+1,(l+1)/2)}\\
&\quad + c_5(\varepsilon_2)t_1^{-(l+1)/2}|D_t u|_{\Sigma''_{t_1}}, \qquad \forall\varepsilon_1,\varepsilon_2\in(0,1).
\end{aligned}$$

Умножив теперь обе части (2.2) на $t_1^{1+(l-s)/2}$ и взяв максимум по $t_1 \in (0,t)$, а затем выбрав ε_1 и ε_2 достаточно малыми, придем к неравенству

$$\begin{aligned}
&|u|_{s,Q_T}^{(l+2,l/2+1)} + |u_t|_{s-1,\Sigma_T}^{(l+1,(l+1)/2)}\\
&\quad\leqslant c_6(T)\Big(|f|_{s-2,Q_t}^{(l,l/2)} + |\varphi|_{s-1,\Sigma_T}^{(l+1,(l+1)/2)} + \sup_{t_1<T}t_1^{-s/2}|u(\cdot,t_1)|_\Omega + \sup_{t_1<t}t_1^{-(s+1)/2}|u(\cdot,t_1)|_\Gamma\\
&\qquad + \sup_{t_1<t}t_1^{-(s-1)/2}|u_{t_1}(\cdot,t_1)|_\Gamma + \sup_{t_1<t}t_1^{(l-s)/2}|u(\cdot,t_1)|_\Gamma^{(l+1)}\Big).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Теперь нужно оценить нормы $u(x,t)$ в Ω и на Γ из правой части (2.3). Как и в [22, 23], это делается с помощью локальных рассмотрений. Пусть $\lambda \in (0,1)$, $x_0 \in \Omega$, $\zeta(r)$ — гладкая монотонная функция, равная единице при $r < 1/2$ и нулю при $r > 1$, и $\zeta_\lambda(x) = \zeta(|x-x_0|/\lambda)$. Ясно, что $w(x,t) = u(x,t)\zeta_\lambda(x)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t} - \mathcal{A}\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)w = f\zeta_\lambda + a_\lambda\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)u \equiv f_1, \qquad w\big|_{t=0} = 0, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{b}\cdot\nabla w + b_0 w = \varphi\zeta_\lambda + u\mathbf{b}\cdot\nabla\zeta_\lambda \equiv \varphi_1 \qquad (x \in \Gamma), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $a_\lambda u = \zeta_\lambda \mathcal{A}u - \mathcal{A}\zeta_\lambda u$ — оператор первого порядка. Так как $\operatorname{supp} w_\lambda \subset B_\lambda(x_0) \equiv \{|x-x_0| < \lambda\}$, то в случае, если $\operatorname{dist}(x_0,\Gamma) > \lambda$, можно продолжить w и f_1 нулем в область $R^n \setminus B_\lambda(x_0)$ и рассмотреть w как решение задачи Коши

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \mathcal{A}_0\Big(x_0,0,\frac{\partial}{\partial x}\Big)w = f_1 + \Big[\mathcal{A}(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) - \mathcal{A}_0(x_0,0,\frac{\partial}{\partial x})\Big]w = f_2, w\big|_{t=0} = 0,$$

где $\mathcal{A}_0\Big(x_0,0,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)w = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0,0)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$. Представив $w(x,t)$ в виде объемного потенциала

$$w(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(x-y,t-\tau) f_2(y,\tau)\,dy,$$

где Z — фундаментальное решение уравнения $u_t - \mathcal{A}_0(x_0,0,\dfrac{\partial}{\partial x})u = 0$, получаем

$$|w(x,t)| \leqslant c_7 \int_0^t |f_2(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n}\,d\tau.$$

Воспользовавшись теперь оценками

$$\begin{aligned} \Big|\mathcal{A}\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)w - \mathcal{A}_0\Big(x_0,0,\frac{\partial}{\partial x}\Big)w\Big| &\leqslant c_8\big[(\lambda^{\beta_1} + t^{\beta_2})|D^2 w| + |Dw| + |w|\big], \\ \Big|a_\lambda\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)u\Big| &\leqslant c_9\big(\lambda^{-1}|Du| + \lambda^{-2}|u|\big), \end{aligned}$$

где $|Dw| = \sum_i |w_{x_i}|$, $|D^2 w| = \sum_{i,j} |w_{x_i x_j}$, $\beta_1 = \min(1,l)$, $\beta_2 = \min(1,l/2)$, можно после несложных выкладок прийти к неравенству

$$\begin{aligned}
t_1^{-s/2} & \sup_{B_{\lambda/2}(x_0)} |u(x,t_1)| \\
& \leqslant c_{10} t_1^{-s/2} \int_0^{t_1} \left(|f|_{s-2,Q_T}^{(l,l/2)} + \lambda^{\beta_1} |u|_{s,Q_T}^{(l+2,l/2+1)}\right) \tau^{s/2-1}\, d\tau \\
& \quad + c_{11}(\lambda,T) t_1^{-s/2} \int_0^{t_1} \tau^{\beta_3+s/2-1} |u|_{s,Q_\tau}^{(l+2,l/2+1)}\, d\tau \\
& \leqslant c_{12}\big(t|f|_{s-2,Q_{t_1}}^{(l,l/2)} + \lambda^{\beta_1} |u|_{s,Q_{t_1}}^{(l+2,l/2+1)} \\
& \quad + c_{11} \int_0^{t_1} \tau^{\beta_3-1} |u|_{s,Q_\tau}^{(l+2,l/2+1)}\, d\tau,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\beta_3 = \min(\beta_2, 1/2) = \min(1/2, l/2) = \beta_1/2$.

Предположим теперь, что $B_\lambda(x_0)$ пересекается с Γ и пусть $\overline{x}_0$ — ближайшая к x_0 точка Γ а $\{y_1,\dots,y_n\}$ — декартова система координат с началом в $\overline{x}_0$ и с осью y_n, направленной вдоль внутренней нормали $\mathbf{n}(\overline{x}_0)$. Предположим, что Γ задается в этой системе координат уравнением

$$y_n = F(y'),$$

где $y' = (y_1,\dots,y_{n-1})$, $F \in C^{2+l}(B_d)$, $B_d = \{|y'| < d\}$. Введем новые координаты $\{z_i\}$ по формулам

$$z_i = y_i \quad (i < n), \qquad z_n = y_n - F(y');$$

пусть оператор $\mathcal{A}$ переходит при этом в

$$\widetilde{\mathcal{A}}\Big(z,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \sum_{i,j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(z,t)\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^n \widetilde{a}_i(z,t)\frac{\partial}{\partial z_i} + a_0(z,t).$$

После дополнительной линейной замены переменных можно добиться того, чтобы $\widetilde{a}_{ij}(0,0) = \delta_{ij}$, и преобразовать (2.4) в полупространственную задачу

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} - \Delta\widetilde{w} = \widetilde{f}_1 + \Big[\widetilde{\mathcal{A}}\Big(z,t,\frac{\partial}{\partial z}\Big) - \widetilde{\mathcal{A}}_0\Big(0,0,\frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big]\widetilde{w} = \widetilde{f}_3 \quad (z_n > 0), \qquad \widetilde{w}\big|_{t=0} = 0, \\
\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} + \widetilde{\mathbf{b}}(0,0)\cdot\nabla w = \big(\widetilde{\mathbf{b}}(0,0) - \widetilde{\mathbf{b}}(z,t)\big)\cdot\nabla\widetilde{w} - \widetilde{b}_0(z,t)\widetilde{w}\big|_{z_n=0} + \widetilde{\varphi}_1 \equiv \widetilde{\varphi}_3.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь через $\widetilde{\mathbf{b}}$, $\widetilde{b}_0$ обозначены функции $\mathbf{b}$, b_0 в новых координатах, а через $\widetilde{w}$, $\widetilde{f}_1$, $\widetilde{\varphi}_1$ — функции w, f_1, φ_1, определенные первоначально вблизи начала координат и продолженные нулем в полупространство $\mathbb{R}^n_+$, $z_n > 0$ ($\widetilde{\varphi}_1$ — в пространство $\mathbb{R}^{n-1}$). Очевидно, что $\widetilde{b}_n(0,0) < 0$.

Представим решение задачи (2.6) в виде

$$\widetilde{w}(z,t) = w_1(z,t) + w_2(z,t),$$

$$w_1(z,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} \big(\Gamma(z-y,t-\tau) - \Gamma(z-y^*,t-\tau)\big)\widetilde{f}_3(y,\tau)\,dy,$$

$$w_2(z,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(z,y',t-\tau)\widetilde{\varphi}_4(y',\tau)\,dy',$$

где $y^* = (y', -y_n)$, $\Gamma = (4\pi t)^{-n/2}e^{-z^2/4t}$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности,

$$\widetilde{\varphi}_4 = \widetilde{\varphi}_3 - \Big(\frac{\partial w_1}{\partial t} + \widetilde{b}(0,0)\cdot\nabla w_1\Big)\Big|_{z_n=0} = \widetilde{\varphi}_3 - b_n(0,0)\cdot w_{1z_n}\big|_{z_n=0}.$$

Через G обозначено „ядро Пуассона“, построенное ниже в §4, так что w_2 — решение задачи

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \Delta w_2 = 0, \qquad w_2\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial t} + \widetilde{\mathrm{b}}(0,0)\cdot\nabla w_2\big|_{z_n=0} = \widetilde{\varphi}_4.$$

В этом параграфе мы используем только две оценки функции G, доказываемые ниже в §4, а именно (4.6) и (4.7). Аналогично (2.5) имеем

$$\begin{aligned} t_1^{-s/2}|w_1(z,t_1)| &\leqslant t_1^{-s/2}\int_0^{t_1} |\widetilde{f}_3(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+}\,d\tau \\ &\leqslant c_{13}\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_t}\big) + \lambda^{\beta_1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t} \\ &\quad + c_{14}(\lambda,T)\int_0^{t_1} \tau^{\beta_3-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau, \end{aligned}$$

$$|\nabla w_1(z,t_1)| \leqslant c_{15}\int_0^{t_1} |\widetilde{f}_3(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+}\frac{d\tau}{\sqrt{t_1-\tau}};$$

кроме того, с помощью свойства (4.6) ядра G получаем

$$\begin{aligned} t_1^{-s/2}|w_2(z,t_1)| &\leqslant c_{16}t_1^{-s/2}\int_0^{t_1}\big(|\widetilde{\varphi}_3(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^{n-1}} + |\widetilde{b}_n(0,0)||\widetilde{w}_{1z_n}|_{\mathbb{R}^{n-1}}\big)\,d\tau \\ &\leqslant c_{16}\Big(t_1^{-s/2}\int_0^{t_1}|\widetilde{\varphi}_3(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau + 2t_1^{-(s-1)/2}\int_0^{t_1}|\widetilde{f}_3(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+}\,d\tau\Big). \end{aligned}$$

Оценивая норму $|\widetilde{\varphi}_3|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ точно так же, как $|\widetilde{f}_3|_{\mathbb{R}^n_+}$, получаем в конце концов

$$\begin{aligned}
&t_1^{-s/2}|\widetilde{w}(\cdot,t_1)|_{\mathbb{R}^n_+} \\
&\quad\leqslant t_1^{-s/2}|w_1(\cdot,t_1)|_{\mathbb{R}^n_+} + t_1^{-s/2}|w_2(\cdot,t_1)|_{\mathbb{R}^n_+} \\
&\quad\leqslant c_{17}(T)\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_{t_1}} + |\varphi|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s-1,\Sigma_{t_1}} + \lambda^{\beta_1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_{t_1}}\big) \\
&\qquad + c_{18}(\lambda,T)\int\limits_0^{t_1}\tau^{\beta_3-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.5) вытекает

$$\begin{aligned}
&\sup_{t_1<t} t_1^{-s/2}|u(\cdot,t_1)|_\Omega \\
&\quad\leqslant c_{19}(T)\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_t} + |\varphi|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s-1,\Sigma_t} + \lambda^{\beta_1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t}\big) \\
&\qquad + c_{20}(\lambda,T)\int\limits_0^{t}\tau^{\beta_3-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Переходим к оценке поверхностных норм в правой части (2.3). Так как $\widetilde{w}_1\big|_{z_n=0} = 0$, то достаточно рассмотреть соответствующие нормы функции w_2. Прежде всего

$$\begin{aligned}
&t_1^{-(s+1)/2}|w_2(z,t_1)| \\
&\quad\leqslant c_{16}t_1^{-(s+1)/2}\int\limits_0^{t_1}|\widetilde{\varphi}_3(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau + 2c_{16}t_1^{-s/2}\int\limits_0^{t_1}|\widetilde{f}_3(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+}\,d\tau \\
&\quad\leqslant c_{21}\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_{t_1}} + |\varphi|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s-1,Q_{t_1}} + \lambda^{\beta_1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_{t_1}}\big) \\
&\qquad + c_{22}(\lambda,T)\int\limits_0^{t_1}\tau^{\beta_3-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Далее, из формулы

$$\begin{aligned}
w_{2t}(z,t_1) &= \int\limits_{t_1/2}^{t_1}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\partial G(z,y',t_1-\tau)}{\partial t_1}[\widetilde{\varphi}_4(y',\tau)-\widetilde{\varphi}_4(y',t_1)]\,dy' \\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}G(z,y',t_1/2)\widetilde{\varphi}_4(y',t_1)\,dy' + \int\limits_0^{t_1/2}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\partial G}{\partial t}\widetilde{\varphi}_4(y',\tau)\,dy.
\end{aligned}$$

с помощью (4.6) и (4.7) получаем

$$t_1^{-(s-1)/2}|w_{2_t}(z,t_1)| \leqslant c_{23}t_1^{-\gamma/2}\Big(t_1^{-(s-1)/2}\langle\widetilde{\varphi}_4\rangle^{(\gamma/2)}_{t,\Pi'_{t_1}} + |\widetilde{\varphi}_4(\cdot,t_1)|_{\mathbb{R}^{n-1}} + t^{-1}\int\limits_0^{t_1/2}|\widetilde{\varphi}_4(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau\Big),$$

где $\gamma\in(0,1)$, $\Pi'_{t_1}=\mathbb{R}^{n-1}\times(t_1/2,t_1)$. Из определения φ_3 видно, что

$$\begin{aligned}t_1^{-(s-1)/2+\gamma/2}&\langle\widetilde{\varphi}_3\rangle^{\gamma/2}_{t_1,\Pi'_{t_1}} + t_1^{-(s-1)/2}|\widetilde{\varphi}_3(\cdot,t_1)|_{\mathbb{R}^{n-1}} + t_1^{-(s+1)/2}\int\limits_0^{t_1}|\widetilde{\varphi}_3(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau\\ &\leqslant c_{24}\Big\{|\varphi|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s-1,\Sigma_{t_1}} + \lambda^{\beta_1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_{t_1}}\\ &\qquad + t_1^{-(s-1)/2+\gamma/2+\beta_2}\langle\nabla u\rangle^{(\gamma/2)}_{t,\Sigma'_{t_1}} + t_1^{-(s-1)/2+\beta_2}|\nabla u(\cdot,t_1)|_\Gamma\Big\}\\ &\quad + c_{25}(\lambda,T)\Big\{t_1^{-(s-1)/2+\gamma/2}\langle u\rangle^{(\gamma/2)}_{t,\Sigma'_{t_1}} + t_1^{-(s-1)/2}|u(\cdot,t_1)|_\Gamma\\ &\qquad + t_1^{-(s+1)/2}\int\limits_0^{t_1}(\tau^{\beta_2}|\nabla u|_\Gamma + |u|_\Gamma)\,d\tau\Big\}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Воспользуемся следующими оценками:

$$\begin{aligned}t^{-(s-1)/2}|u(\cdot,t)|_\Gamma &\leqslant \int\limits_0^t|(\tau^{-(s-1)/2}u(\cdot,\tau))_\tau|_\Gamma\,d\tau\\ &\leqslant (1+|(s-1)/2|)\int\limits_0^t\tau^{-1/2}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau,\\ t^{-(s-1)/2+\gamma/2}\langle u\rangle^{(\gamma/2)}_{t,\Sigma'_t} &\leqslant \varepsilon_1 t^{-(s-1)/2+\gamma/2}\langle u\rangle^{((1+\gamma)/2)}_{t,\Sigma'_t} + c_{26}(\varepsilon_1)t^{-(s-1)/2+\gamma/2}|u|_{\Sigma'_t}\\ &\leqslant \varepsilon_1|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t} + c_{27}(\varepsilon_1)\int\limits_0^t\tau^{((\gamma-1)/2)}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t}\,d\tau,\\ t^{-(s-1)/2+\beta_2}|\nabla u(\cdot,t)|_\Gamma &\leqslant \varepsilon_2 t^{-(s-1)/2+\beta_2}[\nabla u]^{(\beta_2)}_\Gamma + c_{28}(\varepsilon_2)t^{-(s-1)/2+\beta_2}|u|_\Gamma\\ &\leqslant \varepsilon_2|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t} + c_{29}(\varepsilon_2\int\limits_0^t\tau^{\beta_2-1/2}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau,\\ t^{-(s-1)/2+\gamma/2+\beta_2}\langle\nabla u\rangle^{(\gamma/2)}_{t,\Sigma'_t} &\leqslant \varepsilon_4|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t} + c_{30}(\varepsilon_4)t^{-(s-1)/2+\gamma/2+\beta_2}|\nabla u|_{\Sigma_t},\end{aligned}$$

где $\varepsilon_i\in(0,1)$. С помощью этих оценок легко заключить, что правая часть (2.9) не превосходит

$$c_{31}\big(|\varphi|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s-1,\Sigma_{t_1}} + (\lambda^{\beta_1}+\varepsilon_5)|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_{t_1}}\big) + c_{32}(\lambda,T,\varepsilon_5)\int\limits_0^{t_1}\tau^{-1/2}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau, \qquad \varepsilon_5\in(0,1). \tag{2.10}$$

Оценим теперь выражение

$$t_1^{-(s-1)/2}\Big(t_1^{\gamma/2}\langle\nabla w_1\rangle^{(\gamma/2)}_{t,\Pi'_t} + |\nabla w_1(\cdot,t_1)|_{\mathbb{R}^n} + t_1^{-1}\int\limits_0^{t_1}|\nabla w_1(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau\Big) \equiv N_{t_1}[w_1],$$

применив доказываемую ниже лемму 2.1. Представим w_1 в виде суммы $w_1 = w_{11}+w_{12}$, где

$$w_{1i} = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathcal{G}(z,y,t-\tau)\widetilde{f}_{3i}(y,\tau)\,dy,$$

$$\mathcal{G} = \Gamma(z-y,t-\tau)-\Gamma(z-y^*,t-\tau),$$

$$\widetilde{f}_{31} = \widetilde{f\zeta_\lambda} + \Big(\widetilde{\mathcal{A}}_0\Big(z,0,\frac{\partial}{\partial z}\Big) - \widetilde{\mathcal{A}}_0\Big(0,0,\frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big)\widetilde{w},$$

$$\widetilde{f}_{32} = \widetilde{f}_3 - \widetilde{f}_{31}.$$

В силу леммы 2.1,

$$N_{t_1}[w_{11}] \leqslant c_{33}\sup_{\tau<t_1}\tau^{-(s-2)/2}|\widetilde{f}_{31}(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+} \leqslant c_{34}\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_{t_1}} + \lambda^{\beta_1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_{t_1}}\big), \tag{2.11}$$

$$N_{t_1}[w_{12}] \leqslant \varepsilon_6\sup_{\tau\leqslant t_1}\tau^{(s-2)/2}|\widetilde{f}_{32}(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+} + c_{35}(\varepsilon_6)t_1^{-s/2}\int\limits_0^{t_1}|\widetilde{f}_{31}|_{\mathbb{R}^n_+}\,d\tau$$

$$\leqslant c_{36}(\lambda,\tau)\varepsilon_6|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_{t_1}}\int\limits_0^{t_1}\tau^{\beta_3-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau, \tag{2.12}$$

где $\varepsilon_0\in(0,1)$. Объединяя оценки (2.9)–(2.12), получили

$$\sup_{t_1<t}t_1^{-(s-1)/2}|w_{2_t}(\cdot,t_1)|_{\mathbb{R}^{n-1}} \leqslant c_{38}\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_T} + |\varphi|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s-1,\Sigma_t} + (\lambda^{\beta_1}+c_{36}\varepsilon_6)|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t}\big) + c_{39}(\varepsilon,\lambda,t)\int\limits_0^t\tau^{\beta_4-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau, \tag{2.13}$$

$$\beta_4 = \min(1/2,\beta_3).$$

Осталось оценить норму $\sup_{t_1<t} t_1^{(l-s)/2}|w_2(\cdot,t_1)|^{(l+1)}_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Применим неравенство

$$|w_2(\cdot,t_1)|^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}} \leqslant c_{40}\int\limits_0^{t_1}|\widetilde{\varphi}_4|^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau \leqslant c_{40}\int\limits_0^{t_1}\big(|\widetilde{\varphi}_3|^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}}+|b_n(0,0)||w_{1z_n}|^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}}\big)\,d\tau.$$

Так как

$$|\varphi_3|^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}} \leqslant c_{41}\big(|\widetilde{\varphi}|^{(1+l)}_{\Gamma}+\lambda^{\beta_1}|u|^{(2+l)}_{\Omega}+t^{\beta_2}|\nabla u|^{(1+l)}_{\Omega}\big)+c_{42}(\lambda,\tau)|u|^{(1-l)}_{\Omega},$$

то

$$\begin{aligned}
&t_1^{-(s-l)/2}\int\limits_0^{t_1}|\widetilde{\varphi}_s|^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau\\
&\quad\leqslant c_{41}\Bigg[\Big(|\varphi|^{(1+l,(1+l)/2)}_{s-1,\Sigma_{t_1}}+\lambda^{\beta_1}|u|^{(2+l,1+l/2)}_{s,Q_{t_1}}t_1^{-(s-l)/2}\Big)\int\limits_0^{t_1}\tau^{(s-l)/2-1}\,d\tau\\
&\qquad+t_1^{-(s-l)/2}\int\limits_0^{t_1}\tau^{\beta_2+(s-l)/2-1}|u|^{(2+l,1+l/2)}_{s,Q_\tau}\,d\tau\Bigg]\\
&\quad+c_{42}\int\limits_0^{t_1}\tau^{1/2+(s-l)/2-1}|u|^{(2+l,1+l/2)}_{s,Q_\tau}\,d\tau\cdot t_1^{-(s-l)/2}\\
&\quad\leqslant\frac{2c_{41}}{s-l}\Big(|\varphi|^{(1+l,(1+l)/2}_{s-1,\Sigma_{t_1}}+\lambda^{\beta_1}|u|^{(2+l,1+l/2)}_{s,Q_{t_1}}\Big)\\
&\quad+c_{43}\int\limits_0^{t_1}\tau^{\beta_4-1}|u|^{(2+l,1+l/2)}_{s,Q_\tau}\,d\tau,
\end{aligned}\tag{2.14}$$

поскольку $s>l$. Наконец, рассмотрим выражение

$$t_1^{-(s-l)/2}\int\limits_0^{t_1}|w_{1z_n}|^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau \leqslant c_{44}t_1^{-(s-l)/2}\bigg(\int\limits_0^{t_1}[w_{1z_n}]^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau+\int\limits_0^{t_1}|w_{1z_n}|_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau\bigg).$$

Второй член правой части был оценен выше, а первый оценивается с помощью леммы 2.2:

$$\begin{aligned}
&t_1^{-(s-l)/2}\int\limits_0^{t_1}[w_{1z_n}]^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau\\
&\quad\leqslant c_{45}\bigg(t_1^{-(s-l)/2}\int\limits_0^{t_1}\sup_{\tau/2<\xi<\tau}[f_3(\cdot,\xi)]^{(l)}_{\mathbb{R}^n_+}\,d\tau+t_1^{-(s-l)/2}\int\limits_0^{t_1}\frac{d\tau}{\tau}\int\limits_0^{\tau/2}[f_3]^{(l)}_{\mathbb{R}^n_+}\,d\tau_1\bigg)\\
&\quad\leqslant c_{46}t_1^{-(s-l)/2+\delta}\int\limits_0^{t_1}\sup_{\tau/2<\xi<\tau}[f_3(\cdot,\xi)]^{(l)}_{\mathbb{R}^n_+}\frac{d\tau}{\tau^\delta},\qquad\forall\delta\in(0,(s-l)/2).
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Так как

$$[f_3]^{(l)}_{\mathbb{R}^n_+} \leqslant c_{47}\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_t} + \lambda^{\beta_1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t}\big)t^{(s-l)/2-1} + c_{48}(\lambda,T)t^{\beta_5+(s-l)/2-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t}$$

с некоторым положительным $\beta_5 \leqslant \beta_4$, то правая часть (2.15) не превосходит

$$c_{49}\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_{t_1}} + \lambda^{\beta_1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_{t_1}}\big) + c_{50}\int\limits_0^t \tau^{\beta_6-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau,$$

где $\beta_6 = \beta_5 - \delta$, если взять $\delta < \beta_5$. Таким образом,

$$\sup_{t_1<t} t_1^{-(s-l)/2}|w_2(\cdot,t_1)|^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}} \leqslant c_{51}\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_t} + |\varphi|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s-1,\Sigma_t} + \lambda^{\beta_1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t}\big) + c_{52}\int\limits_0^t \tau^{\beta_6-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau,$$

Объединяя эту оценку с (2.7), (2.8) и (2.13) и фиксируя достаточно малые λ и ε_6, приходим к неравенству

$$|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_t} + |u_t|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s,Q_t} \leqslant c_{53}\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_t} + |\varphi|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s-1,\Sigma_t}\big) + c_{54}\int\limits_0^t \tau^{\beta_6-1}|u|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_\tau}\,d\tau, \qquad \forall t \leqslant T,$$

из которого вытекает оценка (2.1). Она влечет за собой единственность решения задачи (1.1) в рассматриваемом классе. Существование решения легко доказать, аппроксимировав f и φ функциями $f\eta(t/\varepsilon) \in C^{l,l/2}(Q_T)$ и $\varphi\eta(t/\varepsilon) \in C^{l+1,(l+1)/2}(\Sigma_T)$. В силу теоремы 1.1 задача (1.1) с такими правыми частями имеет единственное решение $u_\varepsilon \in C^{2+l,1+l/2}(Q_T)$, а из леммы 1.1 и оценки (2.1) следует равномерная ограниченность суммы норм $|u_\varepsilon|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_T} + |u_{\varepsilon t}|^{(l+1,(l+1)/2)}_{s-1,\Sigma_T}$. Поэтому существует подпоследовательность u_{ε_i}, равномерно сходящаяся вместе со своими производными к решению $u(x,t)$ задачи (1.1), когда $\varepsilon_i \to 0$, причем $u \in C^{(l+2,l/2+1)}_s(Q_T)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C^{l+1,(l+1)/2}_{s-1,\Sigma_T}(\Sigma_T)$. Теорема доказана.

Докажем теперь две леммы, использованные выше.

Лемма 2.1. *Функция*

$$w(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} \mathcal{G}(x,y,t-\tau) f(y,\tau)\,dy \tag{2.15}$$

$(\mathcal{G} = \Gamma(x-y,t-\tau) - \Gamma(x-y^*,t-\tau))$ *удовлетворяет неравенствам*

$$N_t[w] \leqslant C_1 \sup_{\tau \in t} \tau^{-(s-2)/2} |f(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+}, \tag{2.16}$$

$$N_t[w] \leqslant \varepsilon \sup_{\tau<t} \tau^{-(s-2)/2} |f(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+} + c_2(\varepsilon) t^{-s/2} \int_0^t |f(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+}\,d\tau, \tag{2.17}$$

где ε — произвольно малое положительное число, а $N_t[w]$ определяется формулой (2.11).

Доказательство. Достаточно доказать неравенство (2.17), так как (2.16) является его следствием. Так как $|\nabla w(z,t)| \leqslant c_3 \int_0^t |f(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$, то

$$N'_t[w] \equiv t^{-(s-1)/2} |\nabla w|_{\mathbb{R}^n_+} + t^{-(s+1)/2} \int_0^t |\nabla w|_{\mathbb{R}^n_+}\,d\tau \leqslant c_4 t^{-(s-1)/2} \int_0^t |f|_{\mathbb{R}^n_+} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

и для этой нормы неравенство (2.17) легко получается, если разбить интеграл в правой части на два — в пределах $\tau \in (t,(1-\varepsilon^2)t)$ и $\tau \in (0,(1-\varepsilon^2)t)$.

Точно так же с помощью элементарных оценок функции $\mathcal{G}$ получаем (полагая для определенности $t' < t$)

$$\begin{aligned}
&|\nabla w_1(z,t) - \nabla w_1(z,t')| \\
&\leqslant \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla \mathcal{G}||f(y,\tau)|\,dy + \int_{2t'-t}^{t'} d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla \mathcal{G}||f(y,\tau)|\,dy \\
&\quad + \int_0^{2t'-t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla \mathcal{G}(x,y,t-\tau) - \nabla \mathcal{G}(x,y,t'-\tau)||f(y,\tau)|\,dy \\
&\leqslant c_5 \bigg(\int_{2t'-t}^{t} |f(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_{2t'-t}^{t'} |f|_{\mathbb{R}^n_+} \frac{d\tau}{\sqrt{t'-\tau}} \bigg) \\
&\quad + c_6 (t-t')^{\gamma/2} \int_0^{t'} |f(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+} \frac{d\tau}{(t'-\tau)^{(1+\gamma)/2}} \\
&\leqslant c_7 (t-t')^{\gamma/2} \bigg(\int_0^t |f(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{(1+\gamma)/2}} + \int_0^{t'} |f|_{\mathbb{R}^n_+} \frac{d\tau}{(t'-\tau)^{(1+\gamma)/2}} \bigg).
\end{aligned}$$

Разбивая каждый интеграл в правой части на два, как выше, мы приходим к требуемому неравенству

$$t^{-(s-1+\gamma)/2}\langle\nabla w_1\rangle^{(\gamma/2)}_{t,\Pi'_t} \leqslant \varepsilon' \sup_{\tau\leqslant t} \tau^{(s-2)/2}|f(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+} + c_8(\Sigma')t^{-s/2}\int\limits_0^t |f(\cdot,\tau)|_{\mathbb{R}^n_+}\,d\tau.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Для функции* (2.15) *справедлива оценка*

$$[\nabla w(\cdot,x_n,t)]^{(1+l)}_{\mathbb{R}^{n-1}} \leqslant c_1\biggl(\sup_{\substack{x_n>0\\ t/2<\tau<t}}[f(\cdot,x_n,\tau)]^{(l)}_{\mathbb{R}^{n-1}} + \frac{1}{t}\int\limits_0^{t/2}\sup_{x_n>0}[f(\cdot,x_n,\tau)]^{(l)}_{\mathbb{R}^{n-1}}\,d\tau\biggr).$$

Доказательство. Будем считать, что $l\in(0,1)$; общий случай сводится к случаю $l\in(0,1)$ вследствие того, что

$$D^j_{x'}w = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathcal{G}(x,y,t-\tau)D^j_{y'}f\,dy.$$

Пусть $x=(x',x_n)$, $z=(z',x_n)$, $k\leqslant n$, $i<n$. Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{D^2 w(z,t)}{\partial z_i\partial z_k}\\
&\quad= \int\limits_{t/2}^t d\tau\int\limits_0^\infty dy_n\int\limits_{|x'-y'|\leqslant 2|x'-z'|}\mathcal{G}_{x_ix_k}(x,y,t-\tau)[f(y,\tau)-f(x',y_n,\tau)]\,dy'\\
&\qquad-\int\limits_{t/2}^t d\tau\int\limits_0^\infty dy_n\int\limits_{|x'-y'|\leqslant 2|x'-z'|}\mathcal{G}_{z_iz_k}(z,y,t-\tau)[f(y,\tau)-f(z',y_n,\tau)]\,dy'\\
&\qquad+\int\limits_{t/2}^t d\tau\int\limits_0^\infty dy_n\int\limits_{|x'-y'|=2|x'-z'|}\mathcal{G}_{x_n}(x,y,t-\tau)n_i(y)[f(z',y_n,\tau)-f(x',y_n,\tau)]\,dS\\
&\qquad+\int\limits_{t/2}^t d\tau\int\limits_0^\infty dy_n\int\limits_{|x'-y'|\geqslant 2|x'-z'|}[\mathcal{G}_{x_ix_k}(x,y,t-\tau)-\mathcal{G}_{z_iz_k}(z,y,t-\tau)]\\
&\qquad\qquad\times[f(y,t)-f(z',y_n,\tau)]\,dy'\\
&\qquad+\int\limits_0^{t/2} d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty\mathcal{G}_{x_ix_k}(x,y,t-\tau)[f(y,\tau)-f(y'+z'-x',y_n,\tau)]\,dy'\,dy_n.
\end{aligned}$$

Из нее с помощью элементарных оценок получается неравенство

$$\left|\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{D^2 w(z,t)}{\partial z_i \partial z_k}\right|$$
$$\leqslant c_2 |x-z|^l \Big\{ \sup_{\substack{t/2<\tau<t\\ y_n>0}} [f(\cdot,y_n,\tau)]^{(l)}_{\mathbb{R}^{n-1}} + \int\limits_0^{t/2} \sup_{y_n>0} [f(\cdot,y_n,\tau)]^{(l)}_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau}{t-\tau} \Big\},$$

из которого и следует утверждение леммы.

§3. Доказательство теоремы 1.2

Чтобы доказать теорему 1.2 при общих предположениях, достаточно свести задачу (1.1) к аналогичной задаче с $u_0 = 0$, $f \in \overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_s(Q_T)$, $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{l+1,\frac{l+1}{2}}_{s-1}(\Gamma_T)$. Это можно сделать в два этапа:

1. Сначала на Σ_T строится вспомогательная функция U_0 со следующими свойствами:

$$U_0 \in C^{l+2,l/2+1}_s(\Sigma_T), \qquad \frac{\partial U_0}{\partial t} \in C^{l+1,\frac{l+1}{2}}_{s-1}(\Sigma_T), \qquad U_0^{(0)} \equiv U_0\big|_{t=0} = u_0\big|_\Gamma, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} U_0^{(j+1)} &\equiv \frac{\partial^{j+1} U_0}{\partial t^{j+1}}\Big|_{t=0} \\ &= \varphi^{(j)} - \sum_{i=0}^{j} C_j^i \big(\mathbf{b}^{(i)} \cdot \nabla u^{(j-i)} + b_0^{(i)} u^{(j-i)}\big)\big|_\Gamma, \qquad 0 \leqslant j \leqslant \dots \leqslant \left[\frac{s}{2}\right] - 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $u^{(j)}$ вычисляются из (1.9). Вследствие условий согласования выполняются соотношения

$$U_0^{(j+1)} = u^{(j+1)}\big|_\Gamma = \sum_{i=0}^{j} C_j^i \mathcal{A}^{(j)}\Big(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}\Big) u^{(j-i)} + f^{(j)}\big|_\Gamma. \tag{3.3}$$

2. Функция U_0 продолжается в Q_T как решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \mathcal{A}\Big(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\Big) U = f(x,t), \qquad U\big|_{t=0} = u_0, \qquad U\big|_{x\in\Gamma} = U_0. \tag{3.4}$$

Так как $u_0 \in C^s(\Omega)$, $U_0 \in C^{l+2,l/2+1}_s(\Sigma_T)$ и выполняются условия согласования $U_0^{(0)} = u_0$,

$$U_0^{(j+1)} = \sum_{i=0}^{j} C_j^i \mathcal{A}^{(i)}\Big(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}\Big) U_0^{(j-i)} + f^{(j)}\big|_\Gamma, \qquad j+1 \leqslant \left[\frac{s}{2}\right],$$

то как показано в [23, 24] (см., например, [24], теорема 1), задача (3.4) имеет решение $U \in C^{l+2,l/2+1}_s(Q_T)$, и

$$|U|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_T} \leqslant c_1 \big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_T} + |u_0|^{(s)}_\Omega + |U_0|^{(l+2,l/2+1)}_{s,\Sigma_T}\big). \tag{3.5}$$

Введем в (1.1) новую неизвестную функцию $v = u - U$. Очевидно,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} - \mathcal{A}\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)v = f - \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U \equiv f_1, \qquad v\big|_{t=0} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{b}\cdot\nabla v + b_0 v\big|_{x\in\Gamma} = \varphi - \frac{\partial U_0}{\partial t} - \mathbf{b}\cdot\nabla U_0 - b_0 U_0\big|_{x\in\Gamma} = \varphi_1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если $s \geqslant 2$, то $f_1^{(j)} = f^{(j)} - U^{(j+1)} + \sum_{i=0}^{j} C_j^i \mathcal{A}^{(i)} U^{(j-i)} = 0$ $(j \leqslant [\frac{s-2}{2}])$. Таким образом, $f_1 \in \overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{s-2}(Q_T)$ и

$$\begin{aligned} |f_1|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_T} &\leqslant |f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_T} + \Big|\frac{\partial U}{\partial t}\Big|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_T} + |\mathcal{A}U|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_T} \\ &\leqslant c_2\big(|f|^{(l,l/2)}_{s-2,Q_T} + |u_0|^{(s)}_{\Omega} + |U_0|^{(l+2,l/2+1)}_{s,\Sigma_T}\big). \end{aligned}$$

Аналогично убеждаемся в том, что $\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}^{l+1,\frac{l+1}{2}}_{s-1}(\Sigma_T)$ и

$$|\varphi_1|^{(l+1,\frac{l+1}{2})}_{s-1,\Sigma_T} \leqslant c_3\Big(|\varphi|^{(l+1,\frac{l+1}{2})}_{s-1,\Sigma_T} + \Big|\frac{\partial U_0}{\partial t}\Big|^{(l+1,\frac{l+1}{2})}_{s-1,\Sigma_T} + |U|^{(l+2,l/2+1)}_{s,Q_T}\Big).$$

Таким образом, все свелось к построению функции U_0. Воспользуемся следующим предложением:

Лемма 3.1. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы функции $\varphi_i \in C^{\sigma-2i}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant i \leqslant [\frac{\sigma}{2}]$, $\sigma \geqslant 0$. Существует такая функция $\Phi_0 \in C^{r,r/2}_{\sigma}(\Pi_T)$ $(\Pi_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$, $r \geqslant \sigma$, r — положительное нецелое число), что*

$$\Phi_0 = \varphi_0, \qquad \Phi_0^{(i)} = \varphi_i \quad (i \leqslant [\frac{\sigma}{2}])$$

и

$$|\Phi_0|^{(r,r/2)}_{\sigma,\Pi_T} \leqslant c_4 \sum_i [\varphi_i]^{(\sigma-2i)}_{\mathbb{R}^n} \tag{3.7}$$

с постоянной c_4, не зависящей от T (так что случай $T = \infty$ здесь не исключается).

Доказательство. Положим $\Phi_0 = (1-\eta(t))u(x,t)$, где $\eta(t)$ — та же функция, что в §2, а $u(x,t)$ — решение задачи Коши

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\Big)^k u = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi_0, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}\Big|_{t=0} = \varphi_{k-1}, \tag{3.8}$$

где $k = [\frac{\sigma}{2}] + 1$. Покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет неравенству (3.7) с постоянной $c_5(T)$, являющейся неубывающей степенной функцией T, отсюда будет следовать оценка (3.7) для Φ_0. Решение задачи (3.8), как известно (см. [6]), можно записать в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{M}_i\Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\Big)\int_{\mathbb{R}^n} Z(x-y,t)\varphi_i(y)\,dy \equiv \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{M}_i(Z * \varphi_i),$$

где Z — фундаментальное решение уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)^k u=0$, а $\mathcal{M}_i$ — дифференциальные операторы, являющиеся однородными в следующем смысле:

$$\mathcal{M}_i(\lambda\xi,\lambda^2 p)=\lambda^{2(k-1-i)}\mathcal{M}_i(\xi,p).$$

При оценке $u(x,t)$ будем следовать рассуждениям из §3 работы [23]. Рассмотрим

$$D_t^{a_0}D_x^a u(x,t)=\sum_{i=1}^{k-1}D_t^{a_0}D_x^a u_i(x,t),$$

где $u_i=\mathcal{M}_i(Z*\varphi_i)$. Если $2a_0+|a|\leqslant 2i$, то

$$\left|D_t^{a_0}D_x^a u_i(x,t)\right|\leqslant c_6\max|\varphi_i|t^{i-a_0-|a|/2}.$$

Если же $2a_o+|a|>2i$, то мы воспользуемся тем, что $D_t^{a_0}D_x^a u_i$ можно записать в виде линейной комбинации функций $v=\mathcal{N}\big(Z*D_x^b\varphi_i\big)$, где $|b|\leqslant 2a_0+|a|-2i$ и $\mathcal{N}$ — однородный дифференциальный оператор порядка $2(k-1-i)+2a_0+|a|-|b|\geqslant 2(k-1)$. Если $2a_0+|a|\leqslant[\sigma]$, то мы возьмем $|b|=2a_0+|a|-2i\leqslant[\sigma]-2i$ и воспользуемся оценкой

$$|v|\leqslant c_7\sup\left|D_x^b\varphi_i\right|. \tag{3.9}$$

Далее, взяв $2a_0+|a|=[\sigma]$, можно в случае нецелого s воспользоваться оценками работы [23] и получить неравенство

$$\langle u_i\rangle_{\Pi_T}^{(\sigma,\sigma/2)}\leqslant c_8\left[\varphi_i\right]_{\mathbb{R}^n}^{(\sigma-2i)}. \tag{3.10}$$

Наконец, если $2a_0+|a|>[\sigma]$, то мы запишем v в виде

$$v(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathcal{N}Z(x-y,t)\left[D_{y_i}^b\varphi(y)-D_{x_i}^b\varphi(x)\right]dy.$$

Что легко приводит к оценкам

$$\left|D_x^a D_t^{a_0}u_i(x,t)\right|\leqslant c_9 t^{-a_0-|a|/2+\sigma/2}\left[\varphi\right]_{\mathbb{R}^n}^{(\sigma-2i)}$$

и

$$\langle u_i\rangle_{\Pi_t'}^{(r,r/2)}\leqslant c_{10}t^{-r/2+\sigma/2}\left[\varphi_i\right]_{\mathbb{R}^n}^{(\sigma-2i)},\qquad \Pi_t'=\mathbb{R}^n\times\left(\frac{t}{\Sigma},t\right).$$

Из всех этих оценок следует, что

$$\left|u_i\right|_{\sigma,\Pi_T}^{(r,r/2)}\leqslant c_{11}(T)\left[\varphi_i\right]_{\mathbb{R}^n}^{(\sigma-2i)},$$

а, значит, $u(x,t)$ подчиняется неравенству (3.7) с постоянной $C(T)$, что и требовалось. Лемма доказана.

Пусть теперь $\{\psi_k(x)\}_{k=1,\dots N}$ — гладкое „разбиение единицы“ на Γ: $1=\sum_{k=1}^N\psi_k(x)$, подчиненное покрытию Γ шарами $B_k=\big\{|x-x_k|\leqslant d\big\}$ настолько малого радиуса $d > 0$, что каждое множество $\gamma_k = \Gamma \cap B_k$ отображается на область пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ с помощью отображения класса C^{l+2}. Будем считать (это, конечно, не ограничивает общности), что $\operatorname{supp}\psi_k$ является строго внутренним подмножеством γ_k и что задано еще одно семейство гладких функций $\widetilde{\psi}_k$ с $\operatorname{supp}\widetilde{\psi}_k \subseteq \gamma_k$ таких, что $\widetilde{\psi}_k\psi_k = \psi_k$.

Определим U_0 формулой $U_0 = \sum_{k=1}^N \widetilde{\psi}_k U_{0k}$, где U_{0k} — функции, заданные при $x \in \gamma_k$ и удовлетворяющие начальным условиям

$$V_{0k}^{(0)} = u_0\psi_k, \qquad V_{0k}^{(j+1)} = \psi_k u^{(j+1)}, \tag{3.11}$$

где $u^{(j+1)} = \varphi^{(j)} - \sum_{i=0}^j C_j^i\big(\mathbf{b}^{(i)} \cdot \nabla u^{(j-i)} + b_0^{(i)} u^{(j-i)}\big) \in C^{s-1-2j}(\Gamma)$.

Поверхность γ_k можно отобразить в область $\widehat{\gamma}_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$, продолжить нулем функции $u_0\psi_k$, $u\psi_k$ на $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \widehat{\gamma}_k$ и воспользоваться леммой 2.1, а затем сделать обратное отображение. При этом следует различать два случая:

1) $s + 1 < 2 + l$.

В этом случае в силу леммы 3.1 существуют $\widehat{U}_{0k} \in C_{s+1}^{3+l,3/2+l/2}(\Pi_T)$, $\Pi_T = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, T)$, удовлетворяющие условиям

$$\widehat{U}_{0k} = \widehat{u_0\psi_k}, \qquad \widehat{U}_{0k}{}^{(j+1)} = \widehat{\psi_k u}^{(j+1)}$$

(под $\widehat{u\psi}_k$ понимаются функции $u\psi_k$ после отображения и продолжения нулем) и неравенствам

$$\big|\widehat{U}_{0k}\big|_{s+1,\Pi_T}^{(l+3,l/2+3/2)} \leqslant c_{12}\Big(\big|\widehat{u_0\psi_k}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}}^{(s+1)} + \sum_j \big|\widehat{u^{(j+1)}\psi_k}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}}^{(s-1-2j)}\Big).$$

Следовательно, $U_0 \in C_s^{l+2,l/2+1}(\Sigma_T)$, $U_{0_t} \in C_{s-1}^{l+1,l/2+1/2}(\Sigma_T)$ и

$$\big|U_0\big|_{s,\Sigma_T}^{(l+2,l/2+1)} + \big|U_{0_t}\big|_{s-1,\Sigma_T}^{(l+1,l/2+1/2)} \leqslant c_{13}\Big(\big|u_0\big|_\Gamma^{(s+1)} + \sum_j \big|u^{(j+1)}\big|_\Gamma^{(s-1-2j)}\Big). \tag{3.12}$$

2) $s + 1 > 2 + l$.

В этом случае положим

$$\widehat{U}_{0k}{}^{(0)}(x,t) = \widehat{u_0(x)\psi}_k + \widehat{V}_{0k},$$

где $\widehat{V}_{0k}$ удовлетворяет условиям

$$V_{0k}^{(0)} = 0, \qquad V_{0k}^{(j+1)} = \widehat{\psi_k u}^{(j+1)}.$$

С помощью леммы 3.1 находим функцию $\widehat{V}_{0k} \in C_{s+1}^{l+3,l/2+3/2}(\Pi_T)$ такую, что

$$\big|V_{0k}\big|_{s+1,\Pi_T}^{(l+3,l/2+3/2)} \leqslant c_{14} \sum_j \big|\widehat{\psi_k u}^{(j+1)}\big|_\Gamma^{(s-1-2j)}.$$

Легко видеть, что функция U_0 по-прежнему будет удовлетворять неравенству (3.12). Тем самым наше построение закончено.

§4. Полупространственная задача

Рассмотрим в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ $(x_n > 0)$начально-краевую задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad u\big|_{t=0} = 0,\\ \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b}\cdot\nabla u\Big|_{x_n=0} = \varphi(x',t)\end{gathered} \tag{4.1}$$

с постоянным $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ и $b_n < 0$. Решение этой задачи может быть записано в виде

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x'-y', x_n, t-\tau)\varphi(y',\tau)\,dy' = G * \varphi, \tag{4.2}$$

где

$$G(x', x_n, t) = -2\int_0^t \frac{\partial\Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)}{\partial x_n}\,du, \tag{4.3}$$

а $\Gamma(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Функция G удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{b}\cdot\nabla G = -2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_n}, \tag{4.4}$$

и так как потенциал двойного слоя $-2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_n} * \varphi\right)$ равен φ при $x_n = 0$, то отсюда следует краевое условие $u_t + \mathbf{b}\cdot\nabla u\big|_{x_n=0} = \varphi$.

Формула (4.3) для G может быть получена, если в (4.1) сделать преобразование Фурье по касательным переменным и преобразование Лапласа по t, определяемое формулой

$$\widetilde{u} = FLu = \int_0^\infty e^{st}\,dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi}u(x,t)\,dx' \qquad (\operatorname{Re}s \geqslant 0).$$

Легко показать, что

$$\widetilde{u} = \frac{e^{-x_n r}}{s + i\mathbf{b}'\cdot\xi - b_n r}\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}\int_0^\infty e^{-r(x_n - b_n u) - i\mathbf{b}'\cdot\xi u - su}\,du, \tag{4.5}$$

где $r = \sqrt{s+\xi^2}$, $\arg s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Отсюда следует, что

$$G = F^{-1}L^{-1}\int_0^\infty e^{-r(x_n - b_n u) - i\mathbf{b}'\cdot\xi u - su}\,du = -2\int_0^t \frac{\partial\Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)}{\partial x_n}\,du,$$

поскольку $F^{-1}L^{-1}e^{-rx_n} = -2\dfrac{\partial\Gamma(x,t)}{\partial x_n}$.

Докажем теперь оценки для G_1, использованные в предыдущем параграфе.

Лемма 4.1. *Справедливы неравенства*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|G(x', x_n, t)\right| dx' \leqslant c_1, \tag{4.6}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\frac{\partial G(x', x_n, t)}{\partial t}\right| dx' \leqslant \frac{c_2}{t} \tag{4.7}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от t.

Доказательство. Первое неравенство сводится к

$$\frac{1}{4\pi^{n/2}} \int\limits_0^t du \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{x_n - b_n u}{(t-u)^{(n+2)/2}} e^{-\frac{|x-\mathbf{b}u|^2}{4(t-u)}} dx' \leqslant c_1.$$

Левая часть равна

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int\limits_0^t \frac{x_n - b_n u}{(t-u)^{3/2}} e^{-\frac{(x_n - b_n u)^2}{4(t-u)}} du = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int\limits_0^t \frac{a + b_n \xi}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{(a+b_n\xi)^2}{4\xi}} d\xi \equiv I,$$

где $a = x_n - b_n t > 0$. Очевидно,

$$\sqrt{4\pi} I \leqslant \int\limits_0^{t/2} e^{-\frac{a^2}{16\xi}} \frac{a\,d\xi}{\xi^{3/2}} + \int\limits_{t/2}^t \frac{c_3}{\xi}\, d\xi \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{16\xi}} \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} + c_3 \ln 2 \equiv \sqrt{4\pi} c_1,$$

где $c_3 = \max_{z>0} z e^{-z^2/4}$.

Для доказательства (4.7) воспользуемся уравнением (4.4). Очевидно,

$$2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\frac{\partial \Gamma(x', x_n, t)}{\partial x_n}\right| dx' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{4t}} \frac{x_n}{t^{3/2}} \leqslant \frac{c_3}{\sqrt{4\pi} t}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\mathbf{b} \cdot \nabla G\right| dx' &\leqslant 2 \int\limits_0^t du \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\nabla \frac{\partial \Gamma(x - \mathbf{b}u, t-u)}{\partial x_n}\right| dx' \\
&\leqslant c_4 \int\limits_0^t e^{-\frac{x_n^2 + b_n^2 u^2}{8(t-u)}} \frac{du}{(t-u)^{3/2}} \\
&\leqslant c_4 e^{-\frac{x_n^2}{8t}} \left[\left(\frac{2}{t}^{3/2}\right) \int\limits_0^{t/2} e^{-\frac{u^2 b_n^2}{8t}} du + \int\limits_{t/2}^t e^{-\frac{t^2 b_n^2}{32(t-u)}} \frac{du}{(t-u)^{3/2}} \right] \\
&\leqslant \frac{c_5}{t} e^{-\frac{x_n^2}{8t}},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

откуда следует (4.7). Лемма доказана.

В следующей лемме устанавливаются еще некоторые свойства ядра G, которые понадобятся ниже для оценки потенциала (4.2) в гельдеровских нормах.

Лемма 4.2. *Ядро G удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^\infty \left|D_x^j G(x', x_n, t)\right| dt \leqslant \frac{c_6}{|x|^{n+|j|-2}}, \tag{4.9}$$

если $n+|j|-2>0$, и соотношению

$$\frac{\partial G}{\partial x_n} = -2\Gamma(x,t) + 2\mathbf{b}\cdot\nabla \int_0^t \Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)\,du + 2\Delta' \int_0^t \Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)\,du, \tag{4.10}$$

где $\Delta' = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$.

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|D_x^j G\right| dt &\leqslant 2\int_0^\infty dt \int_0^t \left|D_x^j \frac{\partial\Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)}{\partial x_n}\right| du \\
&\leqslant c_7 e^{-\delta x^2/t} \int_0^\infty du \int_u^\infty e^{-\delta(x^2+u^2)/(t-u)} \frac{dt}{(t-u)^{(n+1+|j|)/2}} \\
&= c_7 e^{-\delta x^2/t} \int_0^\infty \frac{du}{(x^2+u^2)^{(n-1+|j|)/2}} \int_0^\infty z^{(n-3+|j|)/2} e^{-\delta z}\,dz \\
&= \frac{c_8 e^{-\delta x^2/t}}{|x|^{n-2+|j|}} \qquad (\delta>0),
\end{aligned}$$

что доказывает (4.9). Соотношение (4.10) следует из формулы

$$\frac{\partial\Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)}{\partial u} = -\frac{\partial\Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)}{\partial t} - \mathbf{b}\cdot\nabla\Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)$$

и из (4.3). Действительно,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x_n} &= -2\int_0^t \frac{\partial^2\Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)}{\partial x_n^2}\,du \\
&= -2\int_0^t \frac{\partial\Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)}{\partial t}\,du + 2\Delta' \int_0^t \Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)\,du \\
&= -2\Gamma(x,t) + 2(\mathbf{b}\cdot\nabla + \Delta') \int_0^t \Gamma(x-\mathbf{b}u, t-u)\,du.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Ядро* $K(x_n,t)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_{x_n}\,dx'$ *подчиняется неравенствам*

$$\int_0^T |K(x_n,t)|\,dt \leqslant c_9(T), \tag{4.12}$$

$$\int_0^T |K(x_n,t)-K(z_n,t)|\,dt \leqslant c_{10}(T)|z_n-x_n|^\alpha, \qquad \alpha\in(0,1), \tag{4.13}$$

где $c_9(T)$ *и* $c_{10}(T)$ — *возрастающие степенные функции* T.

Действительно, вследствие (4.10),

$$K(x_n,t)=-2\Gamma_1(x_n,t)-b_n\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x,t)\,dx',$$

где $\Gamma_1(x_n,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x_n^2/4t}$. Оценка (4.12) следует из (4.6).

Кроме того, с помощью (4.8) получаем

$$\begin{aligned}\int_0^T\big|K(x_n,t)-K(z_n,t)\big|\,dt &\leqslant 2\bigg|\int_{z_n}^{x_n}d\xi\int_0^T\big|\Gamma_{1\xi}(\xi,t)\big|\,dt\bigg|+\bigg|\int_{z_n}^{x_n}d\xi\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big|b_nG_{x_n}\big|\,dx'\bigg|\\ &\leqslant c_{11}\bigg|\int_{z_n}^{x_n}d\xi\int_0^T e^{-\xi^2/8t}\frac{dt}{t}\bigg|\\ &\leqslant c_{12}\bigg|\int_{z_n}^{x_n}\frac{d\xi}{\xi^{1-\alpha}}\int_0^T\frac{dt}{t^{(1+\alpha)/2}}\bigg|\\ &\leqslant c_{10}(T)|x_n-z_n|^\alpha.\end{aligned}$$

Лемма 4.3. *При* $t\leqslant T$ *имеет место оценка*

$$\big|D_x^jG(x',x_n,t)\big|\leqslant c_{13}(T)(x^2+t^2)^{-\frac{n+|j|-1}{2}}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned}\big|D_x^jG(x',x_n,t)\big| &\leqslant c_{14}\int_0^t e^{-\delta\frac{x^2+u^2}{t-u}}\frac{du}{(t-u)^{(n+1+|j|)/2}}\\ &\leqslant c_{14}\bigg(\int_0^{t/2}e^{-\delta\frac{x^2}{t}}\frac{du}{(t-u)^{(n+1+|j|)/2}}+\int_{t/2}^t e^{-\delta\frac{x^2+(t/2)^2}{t-u}}\frac{du}{(t-u)^{(n+1+|j|)/2}}\bigg)\\ &\leqslant c_{15}\bigg(\frac{1}{t^{(n+|j|-1)/2}}e^{-\delta\frac{x^2}{t}}+\frac{1}{(x^2+(t/2)^2)^{(n+|j|-1)/2}}e^{-\frac{\delta}{2}\frac{x^2+(t/2)^2}{t}}\bigg)\\ &\leqslant c_{16}\bigg(\frac{1}{(x^2+t)^{(n+|j|-1)/2}}+\frac{1}{(x^2+t^2)^{(n+|j|-1)/2}}\bigg).\end{aligned}$$

Так как $x^2+t \geqslant x^2+\frac{t^2}{T}$, то отсюда следует (4.14).

§5. Оценки потенциала (4.2) в гельдеровских нормах

В этом параграфе доказывается следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть* $\Pi_T=\mathbb{R}^{n-1}\times(0,T)$, $\mathbb{D}_T=\mathbb{R}^n_+\times(0,T)$. *Если* $\varphi\in \overset{\circ}{C}{}^{l+1,\frac{l+1}{2}}(\Pi_T)\equiv \overset{\circ}{C}{}^{l+1,\frac{l+1}{2}}_{l+1}(\Pi_T)$, *то функция* u *(4.2) принадлежит* $\overset{\circ}{C}{}^{l+2,l/2+1}(\mathbb{D}_T)\equiv \overset{\circ}{C}{}^{l+2,l/2+1}_{l+2}(\mathbb{D}_T)$ *и*

$$\langle u\rangle^{(l+2,l/2+1)}_{\mathbb{D}_T}\leqslant c_1(T)\langle\varphi\rangle^{(l+1,\frac{l+1}{2})}_{\Pi_T},\tag{5.1}$$

где $c_1(T)$ *— некоторая возрастающая функция* T.

Доказательство этой теоремы приведено в работах [4, 15, 16, 24], причем основное внимание уделялось доказательству неравенства

$$\langle u\rangle^{(l+2,l/2+1)}_{\Pi_T}\leqslant c_2(T)\langle\varphi\rangle^{(l+1,\frac{l+1}{2})}_{\Pi_T}\tag{5.2}$$

для функции $u(x',0,t)$, преобразование Фурье–Лапласа которой определяется формулой

$$\widetilde{u}\big|_{x_n=0}=\frac{\widetilde{\varphi}}{s+i\mathrm{b}'\cdot\xi-b_nr};\tag{5.3}$$

затем (5.1) выводилось из известной оценки решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности [25]. В работе Б. В. Базалия и С. П. Дегтярева [4] впервые приведены оценки (4.14) для $G(x',0,t)$ и установлено неравенство (5.2) при $l\in(0,1)$ и при сильных дополнительных ограничениях: $n=3$, $\mathrm{b}=(0,0,b_3)$. В работах Е. В. Радкевича [15, 16] рассмотрен целый класс параболических задач типа (1.1), и оценка (5.2) содержится там как частный случай более общего результата. При его доказательстве фундаментальную роль играют „параболические" оценки для ядер потенциалов, соответствующих операторам типа (5.3). В частности, в [16] для ядра $G(x',0,t)$ приводится оценка

$$\left|\frac{\partial^a}{\partial t^a}D^{\alpha}_{x'}G(x',0,t)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot t^{-(n-1+2(a+1)+|\alpha|-1)/2}\exp\Big(-\omega\frac{|x'|^2}{t}\Big)$$

(см. формулу (15) на стр. 12), которую нам не удалось подтвердить, наконец, в [24] неравенство (5.2) установлено с помощью совсем иной техники — теоремы о мультипликаторах в интегралах Фурье (см. [26]). Ввиду всего этого нам кажется не лишенным смысла привести элементарное доказательство неравенства (5.1). В нем будут использованы свойства функции G, выявленные в §4.

Докажем следующее вспомогательное предложение.

Лемма 5.1. *Пусть* $\alpha, \beta \in (0,1)$. *Если* $\varphi(x',0) = 0$, *то для функции* (4.2) *справедливы неравенства*

$$\langle u_{x_i} \rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant c_4(T) \langle \varphi \rangle_{\Pi_T}^{(\alpha,\alpha/2)}, \tag{5.5}$$

$$\langle u_t \rangle_{t,\mathbb{D}_T}^{(\beta)} \leqslant c_5(T) \langle \varphi \rangle_{t,\Pi_T}^{(\beta)}, \tag{5.6}$$

$$\langle u \rangle_{t,\mathbb{D}_T}^{(\beta)} \leqslant c_6(T) |\varphi|_{\Pi_T}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Начнем с наиболее простого неравенства (5.7). Пусть $0 < h < t$, $t + h \leqslant T$. Имеем

$$\begin{aligned} &u(x,t+h) - u(x,t) \\ &\quad = \int\limits_{t-h}^{t+h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x,y',t+h-\tau)\varphi(y',\tau)\,dy' - \int\limits_{t-h}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x,y',t-\tau)\varphi(y',\tau)\,dy' \\ &\qquad + \int\limits_{0}^{t-h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \big[G(x,y',t+h-\tau) - G(x,y',t-\tau)\big]\varphi(y',\tau)\,dy'. \end{aligned}$$

В силу (4.6) первые два члена правой части не превосходят $c_7|\varphi|_{\Pi_T} \int_{t-h}^{t+h} dT = 2hc_7|\varphi|_{\Pi_T}$. Выражая разность в квадратных скобках через производную G_t, можно оценить третий член через

$$c_8 \int\limits_0^h d\lambda \int\limits_0^{t-h} \frac{d\tau}{t+\lambda-\tau} |\varphi|_{\Pi_T} \leqslant c_8 \int\limits_0^h \frac{d\lambda}{\lambda^{1-\beta}} \int\limits_0^{t-h} \frac{d\tau}{(t-h-\tau)^\beta} |\varphi|_{\Pi_T} \leqslant c_9(T) h^\beta |\varphi|_{\Pi_T}$$

и прийти к (5.7).

Для доказательства (5.6) запишем u_t в виде

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial G(x,y',t-\tau)}{\partial t} \big[\varphi(y',\tau) - \varphi(y',t)\big]\,dy',$$

считая $\varphi(y',\tau)=0$ при $\tau<0$. Отсюда получаем

$$\frac{\partial u(x,t+h)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$
$$=\int\limits_{t-h}^{t+h}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\partial G(x,y',t+h-\tau)}{\partial t}\left[\varphi(y',\tau)-\varphi(y',t+h)\right]dy'$$
$$-\int\limits_{t-h}^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\partial G(x,y',t-\tau)}{\partial t}\left[\varphi(y',\tau)-\varphi(y',t)\right]dy'$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}G(x,y',2h)\left[\varphi(y',t)-\varphi(y',t+h)\right]dy'$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{t-h}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\left[\frac{\partial G(x,y',t+h-\tau)}{\partial t}-\frac{\partial G(x,y',t-\tau)}{\partial t}\right]\left[\varphi(y',\tau)-\varphi(y',t)\right]dy'.$$

Первые три интеграла легко оцениваются с помощью (4.6) и (4.7) через $c_{10}\langle\varphi\rangle^{(\beta)}_{t,\Pi_T}h^\beta$. Четвертый интеграл I_4 может быть с помощью (4.4) записан в виде

$$I_4=\int\limits_0^h d\lambda\int\limits_{-\infty}^{t-h}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\left[\varphi(y',\tau)-\varphi(y',t)\right]$$
$$\times\left(-2\frac{\partial\Gamma(x,y',t+\lambda-\tau)}{\partial x_n}+\mathbf{b}\cdot\frac{\partial\nabla G(x,y',t+\lambda-\tau)}{\partial t}\right)dy'$$
$$\equiv I_4'+I_4''.$$

Очевидно,

$$|I_4'|\leqslant c_{11}\langle\varphi\rangle^{(\beta)}_{\Pi_T}\int\limits_0^h d\lambda\int\limits_{-\infty}^{t-h}\frac{d\tau}{(t+\lambda-\tau)^{2-\beta}}\leqslant c_{12}h^\beta\langle\varphi\rangle^{(\beta)}_{\Pi_T}.$$

В интеграле I_4'' мы снова выразим $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial t}$ с помощью (4.4) и, воспользовавшись (4.14), получим

$$|I_4''|\leqslant c_{13}\langle\varphi\rangle^{(\beta)}_{\Pi_T}\int\limits_0^h d\lambda\int\limits_{-\infty}^{t-h}\left(\frac{1}{(t+\lambda-\tau)^{3/2-\beta}}+\frac{1}{(t+\lambda-\tau)^{2-\beta}}\right)d\tau\leqslant c_{14}(T)h^\beta\langle\varphi\rangle^{(\beta)}_{\Pi_T},$$

что и завершает доказательство (5.6).

Приступим теперь к доказательству (5.5). Оценим разность

$$u_{x_i}(x,t+h)-u_{x_i}(x,t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{t-h}^{t+h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_{x_i}(x,y',t+h-\tau)\big[\varphi(y',\tau)-\varphi(x',\tau)\big]\,dy' \\
&\quad - \int\limits_{t-h}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_{x_i}(x,y',t-\tau)\big[\varphi(y',\tau)-\varphi(x',\tau)\big]\,dy' \\
&\quad + \int\limits_{0}^{t-h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \big[G_{x_i}(x,y',t+h-\tau)-G_{x_i}(x,y',t-\tau)\big]\big[\varphi(y',\tau)-\varphi(x',\tau)\big]\,dy' \\
&\quad + \Bigg\{ \int\limits_{0}^{t+h} \varphi(x',\tau)\,d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_{x_i}(x,y',t+h-\tau)\,dy' - \\
&\qquad\qquad \int\limits_{0}^{t} \varphi(x',\tau)\,d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_{x_i}(x,y',t-\tau)\,dy' \Bigg\} \\
&\equiv J_1+J_2+J_3+J_4.
\end{aligned}
$$

Первые три интеграла не превосходят $c_{15}(T)h^{\alpha}\times\langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T}$ (первые два легко оцениваются с помощью (4.14), а третий оценивается точно так же, как интеграл I_4'' выше). Наконец, $J_4=0$ при $i<n$; если же $i=n$, то

$$
\begin{aligned}
J_4 &= \int\limits_{0}^{t+h} \varphi(x',\tau)K(x_n,t+h-\tau)\,d\tau - \int\limits_{0}^{t} \varphi(x',\tau)K(x_n,t-\tau)\,d\tau \\
&= \int\limits_{-h}^{t} \big[\varphi(x',\tau+h)-\varphi(x',\tau)\big]K(x_n,t-\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где снова $\varphi(x',\tau)=0$ при $\tau<0$. Вследствие (4.12)

$$
|J_4| \leqslant c_{16}(T)h^{\alpha/2}\langle\varphi\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\Pi_T}.
$$

Таким образом, мы показали, что

$$
\big|u_{x_i}(x,t+h)-u_{x_i}(x,t)\big| \leqslant c_{17}(T)h^{\alpha/2}\langle\varphi\rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{\Pi_T}. \tag{5.8}
$$

Рассмотрим теперь разность

$$
\begin{aligned}
&u_{x_i}(x,t) - u_{z_i}(z,t) \\
&\quad = \int_0^t d\tau \int_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} G_{x_i}(x,y',t-\tau)\big[\varphi(y',\tau)-\varphi(x',\tau)\big]\,dy \\
&\quad - \int_0^t d\tau \int_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} G_{z_i}(z,y',t-\tau)\big[\varphi(y',\tau)-\varphi(z',\tau)\big]\,dy' \\
&\quad + \int_0^t d\tau \int_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} \big[\varphi(x',\tau)-\varphi(z',\tau)\big]G_{x_i}(x,y',t-\tau)\,dy' \\
&\quad + \int_0^t d\tau \int_{|x'-y'|\geqslant 2\rho} \big[\varphi(y',\tau)-\varphi(z',\tau)\big]\big[G_{x_i}(x,y',t-\tau)-G_{z_i}(z,y',t-\tau)\big]\,dy' \\
&\quad + \int_0^t \varphi(z',\tau)\,d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big[G_{x_i}(x,y',t-\tau)-G_{z_i}(z,y',t-\tau)\big]\,dy' \\
&\quad \equiv L_1+L_2+L_3+L_4+L_5,
\end{aligned}
$$

где $\rho = |x-z|$. Вследствие (4.9),

$$
\begin{aligned}
|L_1|+|L_2| &\leqslant c_{18}\langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T} \int_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} \left(|x'-y'|^{-n+1-\alpha}+|z'-y'|^{-n+1-\alpha}\right)dy' \\
&\leqslant c_{19}\rho^{\alpha}\langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T}.
\end{aligned}
$$

Далее,

$$
L_4 = \int_0^t d\tau \int_{|x'-y'|\geqslant 2\rho} \big[\varphi(y',\tau)-\varphi(z',\tau)\big]\,dy' \int_{P(z,x)} \frac{\partial}{\partial l}G_{x_i}(v,y',t-\tau)\,dl_v,
$$

где $P(z,x)$ — отрезок прямой, соединяющий точки z и x, и $\dfrac{\partial}{\partial l}$ — производная по длине дуги этого отрезка. Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
|L_4| &\leqslant c_{20}\langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T} \int_P dl_v \int_{|x'-y'|\geqslant 2\rho} \frac{|v'-y'|^{\alpha}dy'}{(v_n^2+|v'-y'|^2)^{n/2}} \\
&\leqslant c_{20}\langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T} \int_P \frac{dl_v}{(v_n^2+\rho^2)^{(1-\alpha)/2}} \\
&\leqslant c_{21}\rho^{\alpha}\langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T}.
\end{aligned}
$$

Интеграл L_5 обращается в нуль при $i < n$; если же $i = n$, то

$$L_5 = \int_0^t \varphi(z', \tau)\big[K(x_n, t-\tau) - K(z_n, t-\tau)\big]\, d\tau,$$

и из (4.13) следует, что

$$|L_5| \leqslant c_{22}\rho^\alpha |\varphi|_{\Pi_T} \leqslant c_{22}T^\alpha \rho^\alpha \langle\varphi\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\Pi_T}.$$

Осталось рассмотреть L_3. В случае $i < n$ имеем

$$L_3 = -\int_0^t d\tau \int_{|x'-y'|=2\rho} \big[\varphi(x', \tau) - \varphi(z', \tau)\big] G(x, y', t-\tau) n_i \, dS_{y'}$$

и при $n > 2$ с помощью (4.9) получаем

$$|L_3| \leqslant c_{23}\rho^\alpha \langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T} \int_{|x'-y'|=2\rho} \frac{dS_{y'}}{|x'-y'|^{n-2}} = c_{24}\rho^\alpha \langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T}.$$

При $n = 2$ L_3 можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_3 &= \int_0^t \big[\varphi(x', \tau) - \varphi(z', \tau)\big]\big[G(-2\rho, x_2, t-\tau) - G(2\rho, x_2, t-\tau)\big]\, d\tau \\ &= \int_0^t \big[\varphi(x', \tau) - \varphi(z', \tau)\big]\, d\tau \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial G(y, t-\tau)}{\partial l}\, dl_y, \end{aligned}$$

где $\mathbb{C}$ — полуокружность радиуса 2ρ, соединяющая точки $(2\rho, x_2)$ и $(-2\rho, x_2)$ и лежащая в полуплоскости $y_2 > x_2$. Снова применяя (4.9), получаем

$$|L_3| \leqslant c_{25}\langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T} |x' - z'|^\alpha \int_{\mathbb{C}} \frac{dl_y}{|y|} \leqslant c_{25}\rho^\alpha \langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_{x',\Pi_T}.$$

Наконец, в случае $i = n$ воспользуемся формулой (4.10), согласно которой

$$\begin{gathered} \frac{\partial G}{\partial x_n} = -2\Gamma - b_n G + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \widetilde{G}_i}{\partial x_i}, \\ \widetilde{G}_i = 2\int_0^t \big(\Gamma_{x_i}(x - \mathbf{b}u, t-u) + b_i \Gamma(x - \mathbf{b}u, t-u)\big)\, du. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Последний член (5.9) дает в L_3 вклад

$$L_3' = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t d\tau \int_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} [\varphi(x',\tau) - \varphi(z',\tau)] \frac{\partial \widetilde{G}_i(x,y',t-\tau)}{\partial x_i}\, dy',$$

который оценивается в точности так же, как сам интеграл L_3 при $i < n$. Наконец, из неравенства

$$\int \big(2\Gamma + |b_n||G|\big)\, dy' \leqslant c_{26}\Big(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + 1\Big)$$

следует, что полученная выше оценка L_3 справедлива и при $i = n$.

Мы оценили все интегралы L_i и показали, что

$$\big|u_{x_i}(x,t) - u_{z_i}(z,t)\big| \leqslant c_{27}|x-z|^\alpha \langle\varphi\rangle_{\Pi_T}^{(\alpha,\alpha/2)}.$$

Вместе с (5.8) это доказывает (5.5); таким образом, лемма 5.1 доказана.

Доказательство теоремы 5.1. В соответствии с определением нормы $\langle u\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(l+2,l/2+1)}$, нужно оценить

$$\langle D_t^{j_0} D_x^j u\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \quad \text{и} \quad \langle D_t^{k_0} D_x^k u\rangle_{t,\mathbb{D}_T}^{((1+\alpha)/2)},$$

где $\alpha = l - [l] \in (0,1)$, $2j_0 + |j| = [l] + 2$, $2k_0 + |k| = [l] + 1$. Так как $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то можно считать, что j_n и k_n принимают значения 0 или 1. Поэтому всегда можно представить $D_t^{j_0} D_x^j u$ в виде

$$D_t^{j_0} D_x^j u = \frac{\partial G}{\partial x_i} * D_t^{j_0} D_{x'}^{j'} \varphi, \qquad |j'| = |j| - 1$$

или, если $|j| = 0$ и $2j_0 = |l| + 2$, в виде

$$D_t^{j_0} u = \frac{\partial G}{\partial t} * D_t^{j_0-1}\varphi = -2\frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} * D_t^{j_0-1}\varphi - \mathbf{b}\cdot\nabla G * D_t^{j_0-1}\varphi.$$

В силу неравенства (5.5)

$$\langle \frac{\partial G}{\partial x_i} * D_t^{j_0} D_{x'}^{j'} \varphi\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant C\langle D_t^{j_0} D_{x'}^{j'} \varphi\rangle_{\Pi_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant C\langle\varphi\rangle_{\Pi_T}^{(l+1,\frac{l+1}{2})},$$

так как $2j_0 + |j'| = [l] + 1$. Кроме того,

$$\langle \nabla G * D_t^{j_0-1}\varphi\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant C\langle D_t^{j_0-1}\varphi\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant C\langle\varphi\rangle_{\Pi_T}^{(l,l/2)} \leqslant CC(T)\langle\varphi\rangle_{\Pi_T}^{(l+1,l/2+1/2)},$$

Так как $2|j_0 - 1| = [l]$ и $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{l+1,(l+1)/2}(\Pi_T)$.

Обратимся к производной $D_t^{k_0} D_x^k u$, которую мы представим в виде

$$D_t^{k_0} D_x^k u = G * D_t^{k_0} D_{x'}^{k'} \varphi, \quad \text{если} \quad k_n = 0,$$

$$D_t^{k_0} D_x^k u = \frac{\partial G}{\partial x_n} * D_t^{k_0} D_{x'} k' \varphi, \quad \text{если} \quad k_n = 1.$$

В первом случае в силу (5.7)

$$\langle G * D_t^{k_0} D_{x'}^{k'} \varphi \rangle_{t, \mathbb{D}_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leqslant c_{28}(T) \big| D_t^{k_0} D_{x'}^{k'} \varphi \big|_{\Pi_T} \leqslant c_{29}(T) T^{\alpha/2} \langle \varphi \rangle_{\Pi_T}^{(l+1, \frac{l+1}{2})}. \tag{5.10}$$

Во втором случае воспользуемся равенством (4.4), которое влечет за собой

$$D_t^{k_0} D_x^k u$$
$$= - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{b_n} \Big(G * D_t^{k_0} D_{x'}^{k'} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big) - \frac{1}{b_n} \Big(\frac{\partial G}{\partial t} * D_t^{k_0} D_{x'}^{k'} \varphi \Big) - \frac{2}{b_n} \Big(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} * D_t^{k_0} D_{x'}^{k'} \varphi \Big).$$

Так как $2k_0 + |k'| + 1 = [l]$, то первый член правой части оценивается по неравенству (5.7). Для оценки второго члена мы используем неравенство (5.6) и получаем

$$\langle \frac{\partial G}{\partial t} * D_t^{k_0} D_{x'}^{k'} \varphi \rangle_{t, \mathbb{D}_T}^{((1+\alpha)/2)} \leqslant c_{30} \langle D_t^{k_0} D_{x'}^{k'} \varphi \rangle_{t, R_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leqslant c_{31} \langle \varphi \rangle_{R_T}^{(l+1, \frac{l+1}{2})}.$$

Третий член оценивается с помощью известного неравенства (2.4), гл. IV, [25].

Доказательство теоремы закончено.

В заключение отметим, что оценка (1.10) для области с гладкой границей и разрешимость задачи (1.1) устанавливаются стандартными методами, изложенными, например, в [6, 25]. Отметим также, что мы могли бы дать прямое доказательство весовой оценки (1.11) для задач (1.1) и (4.1), не прибегая к теоремам 1.1 или 5.1.

Список литературы

[1] Карслоу Х., Егер Дж., *Теплопроводность твердых тел*, Наука, М., 1964.

[2] Мейрманов А.М., *Задача Стефана*, Наука, Новосибирск, 1986.

[3] Hanzawa Ei-Ichi, *Classical solutions of the Stefan problem*, Tohoku Math. J. **33** no. 3 (1981), 297–335.

[4] Базалий Б.В., Дегтярев С.П., *О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости*, Мат. сб. **132**, № 1 (1987), 3–19.

[5] Агранович М.С., Вишик М.И., *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, Успехи мат. наук. **19**, № 3 (1964), 53–161.

[6] Солонников В.А., *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Тр. МИАН СССР **83** (1965), 3–163.

[7] Темирбулатов С.И., *Задача теплопроводности с производной по времени в граничном условии*, Дифференц. уравнения, № 4 (1983), 666–673.

[8] Барковский В.В., Кульчицкий В.Л., *Обобщенные решения некоторых смешанных задач для уравнения Шрёдингера*, Линейные и нелинейные краевые задачи, Киев, 1971, с. 22–30.

[9] Кульчицкий В.Л., *О гладкости обобщенных решений некоторых смешанных краевых задач для уравнения Шрёдингера*, Линейные и нелинейные краевые задачи, Киев, 1971, с. 160–167.

[10] Kačur J., *Nonlinear parabolic equations with the mixed nonlinear and nonstationary boundary conditions*, Mathematica Slovaca **30** (1980), 213–237.

[11] Хазан М.И., *Краевые задачи с эволюцией в граничном условии*, Пробл. мат. анализа, № 10 (1986), 105–115.

[12] Hintermann Th., *Evolutionsgleichungen mit dynamischer Kandbedingungen*, Disertation, Iniversität Zürich, 1988, pp. 1–64.

[13] Могилевский И.Ш., Григорьева Н.А., *Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности*, Геометрические вопросы теории функций и множеств, Калинин, 1985, с. 27–42.

[14] Анисютин Б.М., *Энергетические оценки решения задачи теплопроводности с производной по времени в граничном условии*, Динамика сплошной среды, Новосибирск, **1990**, № 95, 24–39.

[15] Радкевич Е.В., *О разрешимости общих нестационарных задач со свободной границей*, Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики, Новосибирск, 1986, с. 85–111.

[16] Радкевич Е.В., Меликулов А.С., *Краевые задачи со свободной границей*, Ташкент, 1988.

[17] Радкевич Е.В., *Об операторных пучках контактных задач со свободной границей*, Динамика сплошной среды, № 86 (1988), 79–87.

[18] Солонников В.А., Фролова Е.В., *О задаче с третьим краевым условием для уравнения Лапласа в плоском угле и ее приложении к параболическим задачам*, Алгебра и анализ **2**, № 4 (1990), 213–241.

[19] Солонников В.А., Фролова Е.В., *Об одной нестационарной задаче в двугранном угле*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 188, 1991, с. 159–177; (Е. В. Фролова), с. 178–185.

[20] Белоносов В.С., Зеленяк Т.И., *Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений*, Новосибирск, 1975.

[21] Белоносов В.С., *Оценки решений параболических систем в весовых классах Гельдера и некоторые их приложения*, Мат. сб. **110**, № 2 (1979), 163–188.

[22] Солонников В.А., *Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи*, Препринт ЛОМИ, Р-2-77, 1977, с. 3–20.

[23] Солонников В.А., Хачатрян А.Г., *Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гёльдеровских нормах*, Тр. МИАН СССР **147** (1980), 147–155.

[24] Солонников В.А., *Оценки решений некоторых некоэрцитивных начально-краевых задач с помощью теоремы о мультипликаторах в интегралах Фурье-Лапласа*, Функциональные и численные методы математической физики, Киев, 1986, с. 220–228.

[25] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М., 1967.

[26] Головкин К.К., Солонников В.А., *Об оценках операторов свертки*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **7** (1968), 6–86.

Поступило 24 июня 1992 г.