



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Выжол, А. Н. Жорова, И. А. Муленко, А. Л. Хомкин, Решение кинетического уравнения Больцмана для полностью ионизованной плазмы с применением методов компьютерной алгебры,  
*Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2012, том 52, номер 9, 1700–1706

<https://www.mathnet.ru/zvmmf9740>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

21 мая 2025 г., 14:04:55



УДК 519.634

## РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ<sup>1)</sup>

© 2012 г. Ю. А. Выжол\*, А. Н. Жорова\*, И. А. Муленко\*, А. Л. Хомкин\*\*

(\* 54030 Николаев, ул. Никольская, 24, Николаевский гос. ун-т, Украина;

\*\* 125412 Москва, ул. Ижорская, 13/19, ОИВТ РАН, Россия)

e-mail: ivan\_mulenko@mail.ru, alhomkin@mail.ru

Поступила в редакцию 16.01.2012 г.

Переработанный вариант 28.03.2012 г.

Представлены результаты вычислений электронных кинетических коэффициентов полностью одно- и многократно ионизованной плазмы на основе решения кинетического уравнения Больцмана. Изложен метод вычисления, результат вычисления хорошо согласуется с экспериментом в задаче об электропроводности плазмы при различных значениях параметра неидеальности. Библ. 10. Фиг. 2. Табл. 3.

**Ключевые слова:** кинетическое уравнение Больцмана, интеграл столкновений, скобочный интеграл, транспортное сечение рассеяния заряженных частиц, кинетические коэффициенты, неидеальная плазма.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Ряд научных и практических задач требует знания транспортных характеристик многокомпонентных систем, типичным представителем которых является химически активная плазма. Поэтому является актуальной задача создания банка данных значений транспортных коэффициентов плазмы. Считается, что наиболее эффективными методами решения данной задачи являются метод кинетического уравнения (см. [1], [2]) и метод временных корреляционных функций (см. [2], [3]). Метод временных корреляционных функций удобнее использовать при учете вклада в кинетические коэффициенты интерференционных эффектов, а также эффектов, обусловленных коллективными взаимодействиями. Метод временных корреляционных функций удобен для исследования нестационарных (частотно-зависимых) кинетических коэффициентов. Если рассматривать слабонеидеальную плазму, не находящуюся в переменных внешних полях, то расчет кинетических коэффициентов можно выполнить в рамках метода кинетического уравнения. При этом удастся регулярным образом учесть вклад электрон-электронных столкновений. Результаты расчетов методом кинетического уравнения и методом временных корреляционных функций, в подавляющем большинстве случаев, идентичны только при учете парных столкновений.

Кинетическое уравнение

$$\mathbf{v}_k \frac{df_k}{d\mathbf{r}} + \frac{e_k \mathbf{E}}{m_k} \frac{df_k}{d\mathbf{v}_k} = \text{St}(f_e) \quad (1)$$

приобретает смысл, после установления вида интеграла столкновений в правой части уравнения (1), где  $e_k$  — заряд  $k$ -й компоненты,  $\text{St}(f_e)$  — интеграл столкновений.

Предположим возможность использования больцмановского интеграла при решении данной задачи. Положительной стороной является его простой вид. Рассеяние на большие углы в интеграле столкновений Больцмана учитывается с высокой степенью точности и не приводит к нефизическим результатам (за исключением спитцеровского приближения при значении парамет-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Украины (государственно-бюджетная научно-исследовательская тема “Теоретические исследования и математическое моделирование термодинамических и кинетических процессов в неидеальной плазме и твердом теле”). Гос. регистрационный номер 0110U001832.

ра неидеальности  $\Gamma = 3$ ). Вследствие его расходимости при рассмотрении рассеяния частиц на малые углы приходится ограничивать транспортные сечения некоторым значением максимального прицельного параметра  $b_{\max}$ . Интеграл столкновений Больцмана, в отличие от интегралов столкновения Балеску-Ленарда и Ландау, дает возможность применять его в условиях и слабой, и сильной неидеальности (см. [1], [2]). В условиях слабой неидеальности, когда справедливо диффузионное приближение, кинетические процессы описываются уравнением Фокера–Планка. Это дает тот же результат, что и уравнение Больцмана. В условиях сильной неидеальности экранировка становится парной при  $\Gamma > 1/6$  и вновь возможно применение уравнения Больцмана.

В [5], [7] на основе применения методов компьютерной алгебры авторами был выполнен расчет транспортных сечений и скобочных интегралов больцмановского интеграла столкновений в 20-м приближении разложения асимметричной по полю поправки к функции распределения электронов по полиномам Сонина. Результаты этих исследований могут быть использованы для решения кинетического уравнения Больцмана и расчета электронных кинетических коэффициентов неидеальной плазмы.

Целью работы является расчет электропроводности и других электронных кинетических коэффициентов неидеальной полностью ионизованной плазмы на основе решения кинетического уравнения Больцмана с учетом 20-го приближения в разложении функции распределения по полиномам Сонина, установление функциональной зависимости электропроводности и спитцевского множителя ( $\gamma_E$ ) от параметра неидеальности  $\Gamma$ .

## 2. МЕТОД ЧЕПМЕНА–ЭНСКОГА

Эффективным методом решения кинетического уравнения Больцмана является метод последовательных приближений Чепмена–Энскаго, поскольку имеет универсальный, хорошо отлаженный алгоритм. В качестве базовых выбираются локально-равновесные функции распределения. Кинетическое уравнение Больцмана в отсутствие переменного внешнего поля представляется в виде

$$\mathbf{v}_k \frac{df_k}{d\mathbf{r}} + \frac{e_k \mathbf{E}}{m_k} \frac{df_k}{d\mathbf{v}_k} = \sum_j \iiint [f_k(\mathbf{v}'_k) f_j(\mathbf{v}'_j) - f_k(\mathbf{v}_k) f_j(\mathbf{v}_j)] g_{kj} b db d\varphi d\mathbf{v}_j. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) ищем в виде  $f_e(\mathbf{v}_e) = f_e^0(\mathbf{v}_e) + \mathbf{v}_e \mathbf{f}_e^1(\mathbf{v}_e)$ , где  $f_e^0(\mathbf{v}_e) = n_e (m_e/2\pi T)^{3/2} \exp(-m_e \mathbf{v}_e^2/2T)$  – функция распределения электронов по скоростям Максвелла, соответствующая равновесному состоянию плазмы при заданных  $n_e$  и  $T$ ,  $\mathbf{f}_e^1(\mathbf{v}_e) = -f_e^0(\mathbf{v}_e) \varphi_e(\mathbf{v}_e)$ ,  $m_e$  – масса электрона. Вектор возмущения  $\varphi_e(\mathbf{v}_e)$  задается в виде ряда по полиномам Сонина  $S_r^{3/2}(x)$  степени  $r$  и порядка  $3/2$ :

$$\varphi_e(\mathbf{v}_e) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}_r^e S_r^{3/2}(m_e \mathbf{v}_e^2/2T). \quad (3)$$

Неизвестные векторы  $\mathbf{P}_r^e$  определяются из решения линеаризованного по  $\varphi_e(\mathbf{v}_e)$  кинетического уравнения (2):

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_e^0}{\partial \mathbf{r}} + \frac{-e \mathbf{E}}{m_e} \frac{\partial f_e^0}{\partial \mathbf{v}_e} = \sum_j J_{ej}, \quad (4)$$

где

$$J_{ej} = \iiint f_e^0 f_j^0 \left[ \mathbf{v}_e \varphi_e(\mathbf{v}_e) + \mathbf{v}_j \varphi_j(\mathbf{v}_j) - \mathbf{v}'_e \varphi'_e(\mathbf{v}'_e) - \mathbf{v}'_j \varphi'_j(\mathbf{v}'_j) \right] g_{ej} b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi d\varphi d\mathbf{v}_j. \quad (5)$$

Умножая уравнение (4) на величину

$$\frac{2}{n_e} \frac{m_e}{2T} \mathbf{v}_e S_n^{3/2}(m_e \mathbf{v}_e^2/2T)$$

и выполняя интегрирование в (5) по скоростям электронов  $\mathbf{v}_e$ , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных векторов  $\mathbf{P}_r^e$  (см. [4]):

$$3\delta_{n0} \left[ \frac{\partial \ln(n_e T)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e\mathbf{E}}{T} \right] - \frac{15}{2} \delta_{n1} \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} = - \sum_{r=0}^{\infty} L_{rn}^e \mathbf{P}_r^e, \quad (6)$$

где  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера,  $m = 0, 1; n = 0, 1, 2, \dots$ . Приближенное решение системы (6) может быть получено путем редукции.

Интеграл столкновений Больцмана выражается через скобочные интегралы, содержащие ортогональные полиномы Сонина  $S_n^{3/2}(\cdot)$

$$L_{rn}^e = - \frac{2}{n_e} \frac{m_e}{2T} \sum_j \iiint \iiint f_j^0 f_j^0 \mathbf{v}_e S_n^{3/2} \left( \frac{m_e v_e^2}{2T} \right) g_{ej} b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi d\phi d\mathbf{v}_e d\mathbf{v}_j, \quad (7)$$

$$\left[ \mathbf{v}'_e S_r^{3/2} \left( \frac{m_e v_e'^2}{2T} \right) - \mathbf{v}_e S_r^{3/2} \left( \frac{m_e v_e^2}{2T} \right) + \mathbf{v}'_j S_r^{3/2} \left( \frac{m_j v_j'^2}{2T} \right) - \mathbf{v}_j S_r^{3/2} \left( \frac{m_j v_j^2}{2T} \right) \right],$$

где  $\mathbf{v}'$  – скорости частиц после столкновения. Из (7) видно, что величины  $L_{rn}^e$  являются симметричными, их можно представить в виде  $L_{rn}^e = \sum_j L_{rn}^{ej}$ . При столкновении легкой и массивной частиц, когда  $m_k/m_j \ll 1$ , величины  $L_{rn}^{ej}$  имеют вид

$$L_{rn}^{ej} = 16n_j \sqrt{\frac{T}{2\pi m_e}} \int_0^{\infty} y^5 e^{-y^2} \sigma_{t_{ej}}^1(y^2) S_r^{3/2}(y^2) S_n^{3/2}(y^2) dy, \quad (8)$$

где  $y^2 = m_e g^2 / 2T$ ,  $\sigma_{t_{ej}}^1(y^2)$  – транспортное сечение рассеяния электронов на частицах сорта  $j$ ,  $j = (i, a)$  (например, электрон-ионные и электрон-атомные столкновения).

Значительную трудность представляет расчет скобочных интегралов, характеризующих столкновения частиц одинаковой массы (например, электрон-электронных). В этом случае не удастся получить простое выражение вида (8) и приходится рассчитывать каждый скобочный интеграл отдельно. С ростом индексов  $r, n$  в скобочном интеграле количество аналитических преобразований, необходимых для его вычисления, факториально растет. При  $r, n > 4$  выполнение преобразований “вручную” становится бессмысленным. Поэтому эта задача была решена авторами методами компьютерной алгебры (см. [5], [7]). Учитывалось 20-е приближение в разложении неравновесной поправки к функции распределения по полиномам Сонина. Для достижения этой цели была разработана специализированная система аналитических вычислений на ЭВМ. Скобочный интеграл, характеризующий столкновение одинаковых частиц других сортов, записывается в точности так же с заменой массы электрона и транспортных сечений электрон-электронного рассеяния различных порядков на массу и соответствующие транспортные сечения рассеяния частиц рассматриваемого сорта. Скобочные интегралы содержат сечения передачи импульса электрон-электронного ( $e-e$ ) рассеивания различных порядков (см. [2], [5]):

$$\sigma_i^n = 2\pi \int_0^{\pi} b(\chi) \left| \frac{db}{d\chi} \right| (1 - \cos^n \chi) d\chi, \quad (9)$$

где  $b$  – прицельное расстояние. Сечения рассеяния высших порядков (до 20 включительно) также были вычислены авторами в [5]. При этом использовалась стандартная система аналитических вычислений общего назначения MathCad. Явный вид выражений для сечений электрон-электронного рассеяния низших порядков (1, 2, 4) на кулоновском и коротко действующем кулоновском (ККП) потенциалах, а также таблица скобочных интегралов приведены в [5], [7]. Выражения транспортных сечений высших порядков являются достаточно громоздкими и здесь не приводятся. Выбор ККП обусловлен тем, что в области сильной неидеальности характер экранировки зарядов становится парным.

## 3. ЭЛЕКТРОННЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

В полностью ионизованной плазме с  $n_e = n_i$ , в интегралах столкновений учитываются лишь акты электрон-ионного и электрон-электронного рассеяния. Полный интегральный матричный элемент (скобочный интеграл) равен  $L_{rn}^e = L_{rn}^{ei} + L_{rn}^{ee}$ .

В общем случае неоднородной неравновесной плазмы имеется 9 электронных транспортных коэффициентов, определяющихся соответственно из уравнений для плотностей электрического тока, диффузионного и теплового потоков (см. [4])

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e &= -e \int \mathbf{v}_e f_e(\mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e, & \hat{\mathbf{O}}_e &= \int \mathbf{v}_e f_e(\mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e, \\ \mathbf{q} &= \frac{1}{2} \sum_k m_k \int v_k^2 \mathbf{v}_k f_k(\mathbf{v}_k) d\mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (10)$$

После подстановки в (10) функции распределения электронов  $f_e(\mathbf{v}_e) = f_e^0(\mathbf{v}_e) + \mathbf{v}_e \mathbf{f}_e^1(\mathbf{v}_e)$  и интегрирования по скоростям, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e &= -e \mathbf{P}_0^e \frac{n_e T}{m_e} = \sigma_e \mathbf{E} + \alpha_e \nabla T + \gamma_e^D \nabla x_e, \\ \hat{\mathbf{O}}_e &= \mathbf{P}_0^e \frac{n_e T}{m_e} = D_e^E \mathbf{E} - D_e^T \nabla T - D_e^D \nabla x_e, \\ \mathbf{q} &= \frac{5 n_e T^2}{2 m_e} (\mathbf{P}_0^e - \mathbf{P}_1^e) = -\beta_e \mathbf{E} - \lambda_e \nabla T + \omega_e \nabla x_e, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность внешнего электрического поля,  $\nabla T$  — градиенты температуры и  $\nabla x_e$  — концентрации частиц. Смысл различных коэффициентов переноса ясен из формул (11). Сами кинетические коэффициенты, представленные в выражениях (11), имеют вид (см. [4])

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{3e^2 n_e}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e}{L^{(n+1)e}}, & \alpha_e &= \frac{15en_e k_B}{2m_e} \frac{\tilde{L}_{01}^e}{L^{(n+1)e}}, & \gamma_e^D &= \frac{3eP}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e}{L^{(n+1)e}}, \\ \beta_e &= \frac{15en_e k_B T}{2m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e + \tilde{L}_{01}^e}{L^{(n+1)e}}, & \lambda_e &= \frac{75n_e k_B T}{4m_e} \frac{\tilde{L}_{01}^e + \tilde{L}_{11}^e}{L^{(n+1)e}}, & \omega_e &= -\frac{15Pk_B T}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e + \tilde{L}_{01}^e}{L^{(n+1)e}}, \\ D_e^E &= \frac{3en_e}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e}{L^{(n+1)e}}, & D_e^T &= \frac{15n_e k_B}{m_e} \frac{\tilde{L}_{01}^e}{L^{(n+1)e}}, & D_e^D &= \frac{3P}{m_e} \frac{\tilde{L}_{00}^e}{L^{(n+1)e}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Величины в (12) характеризуют перенос заряда, энергии и массы, соответственно, обусловленный наличием внешнего поля  $\mathbf{E}$ , градиента температуры  $\nabla T$  и градиента плотности  $\nabla x_e$ . Определитель  $L^{(n+1)e}$  в (11) имеет вид

$$L^{(n+1)e} = \begin{vmatrix} L_{00}^e & \dots & L_{0n}^e \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n0}^e & \dots & L_{nn}^e \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где  $\tilde{L}_{rn}^e$  — минор элемента  $L_{rn}^e$  в определителе  $L^{(n+1)e}$ .

При вычислении кинетических коэффициентов полностью ионизованной плазмы удобно пользоваться не их абсолютными значениями, а приведенными величинами  $\sigma_e^* = \sigma_e / \sigma_e^0$ ,  $\alpha_e^* = \alpha_e / \alpha_e^0$ ,  $\beta_e^* = \beta_e / \beta_e^0$  и т.д. Тогда все полученные безразмерные кинетические коэффициенты являются функциями только параметра неидеальности  $\Gamma$ . Размерные величины в знаменателях определяются по формулам

$$\sigma_0 = 3\sqrt{\pi} T^{3/2} / (8\sqrt{m_e} e^2), \quad \alpha_0^e = \frac{15\sqrt{\pi} k_B (k_B T)^{3/2}}{16 \sqrt{m_e} e^3}, \quad \gamma_0^e = \frac{3\sqrt{\pi} (k_B T)^{5/2}}{8 \sqrt{m_e} e^3},$$

**Таблица 1.** Сходимость процесса Чепмена–Энскога (спитцеровское приближение) при различных значениях зарядового числа ионов

Размер матрицы	$Z = 1$	$Z = 2$	$Z = 3$	$Z = 4$
$2 \times 2$	0.594455543181	0.713236764499	0.7782003715929	0.8191665481
$3 \times 3$	0.575073818989	0.684520180616	0.7459527413716	0.7861916844
$4 \times 4$	0.578450776091	0.685262501102	0.7455857769967	0.7854014116
$5 \times 5$	0.580045477961	0.685599225167	0.7455512558581	0.7852785426
$6 \times 6$	0.580814923492	0.685705310196	0.7455287209728	0.7852513658
$7 \times 7$	0.581227062542	0.685739459464	0.7455184683443	0.7852529602
$8 \times 8$	0.581466961779	0.685750458060	0.7455159620134	0.7852626451
$9 \times 9$	0.580156491885	0.685468790389	0.7454640647041	0.7852569507
$10 \times 10$	0.580063937599	0.685465820245	0.7454562329257	0.7852335074
$11 \times 11$	0.580853728472	0.685511817948	0.7454618136812	0.7852795189
$12 \times 12$	0.580867047010	0.685513162731	0.745468672068	0.7852879599

**Таблица 2.** Сходимость процесса Чепмена–Энскога для кулоновского потенциала при  $\Gamma = 1$  в зависимости от зарядового числа ионов ( $Z$ )

Размер матрицы	$Z = 1$	$Z = 2$	$Z = 3$	$Z = 4$
$2 \times 2$	0.88305904002	0.92025720572	0.93950141553	0.95126303478
$3 \times 3$	0.88013550989	0.91688166327	0.93614216081	0.94807622103
$4 \times 4$	0.87964144112	0.91643197564	0.93576923423	0.94776813235
$5 \times 5$	0.87946623995	0.91633067295	0.93571251539	0.94773686723
$6 \times 6$	0.87941774022	0.91632749372	0.93572670518	0.94775760042
$7 \times 7$	0.87941684323	0.91634900449	0.93575247150	0.94778287883
$8 \times 8$	0.87943141218	0.91637295701	0.93577542817	0.94780329592
$9 \times 9$	0.87938733709	0.91633139349	0.93573629925	0.94776642335
$10 \times 10$	0.87945007317	0.91639549117	0.93579396396	0.94781791708
$11 \times 11$	0.87945583240	0.91640108404	0.9357983716	0.94782148288
$12 \times 12$	0.87946474537	0.91640878431	0.93580425519	0.94782606356

$$\beta_0^e = \frac{15\sqrt{\pi}(k_B T)^{5/2}}{16 \sqrt{m_e e^4}}, \quad \lambda_e^0 = \frac{75\sqrt{\pi}(k_B T)^{5/2}}{32 \sqrt{m_e e^4}}, \quad \omega_e^0 = \frac{15\sqrt{\pi}(k_B T)^{7/2}}{16 \sqrt{m_e e^4}}, \quad (14)$$

$$D_{e0}^E = \frac{3\sqrt{\pi}(k_B T)^{3/2}}{8 \sqrt{m_e e^3}}, \quad D_{e0}^D = \frac{3\sqrt{\pi}(k_B T)^{5/2}}{8 \sqrt{m_e e^4}}, \quad D_{e0}^T = \frac{15\sqrt{\pi}k_B(k_B T)^{3/2}}{16 \sqrt{m_e e^4}}.$$

Полученные в этом разделе соотношения позволяют непосредственно перейти к численному расчету кинетических коэффициентов полностью ионизованной плазмы.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Электропроводность до 7-го приближения рассчитана в [8]. Поскольку аналитическое представление очень трудоемкое и занимает много времени, для дальнейших расчетов предлагаем использовать возможности современных языков программирования (например, Delphi). С целью определения роли вклада электрон-электронных столкновений параллельно проводились вычисления проводимости полностью ионизованной плазмы с учетом и без учета электрон-электронных столкновений, а затем вычислялось их отношение, т.е. фактически определялся спитцеровский множитель  $\gamma_E$  (см. [9]). Для удобства проведения вычислений вся входящая информация для  $\gamma_E$  также была представлена как функция параметра неидеальности  $\Gamma$ .

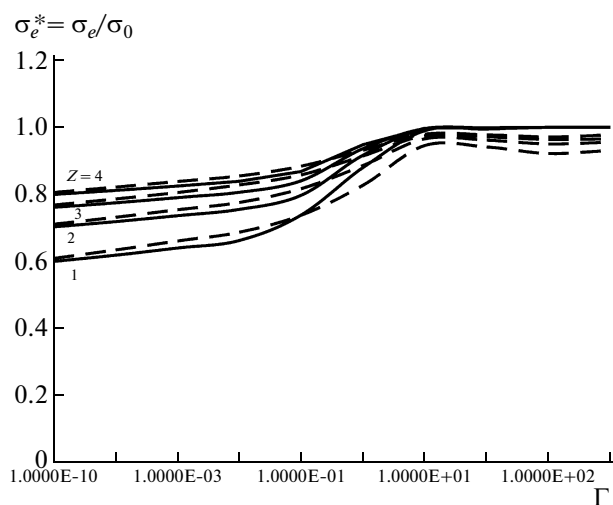
**Таблица 3.** Сходимость процесса Чепмена–Энскога для ККП при  $\Gamma = 1$  в зависимости от зарядового числа ионов ( $Z$ )

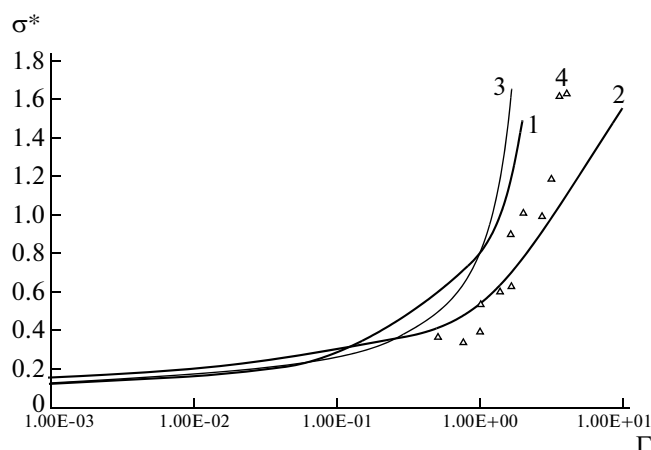
Размер матрицы	$Z = 1$	$Z = 2$	$Z = 3$	$Z = 4$
$2 \times 2$	0.82628068329	0.88839116579	0.9177855789	0.9349245079
$3 \times 3$	0.82653015357	0.88589467934	0.9144498298	0.9314178962
$4 \times 4$	0.82680765587	0.88571931271	0.9142108653	0.9311916119
$5 \times 5$	0.82675622848	0.88563104791	0.9141490109	0.9311514899
$6 \times 6$	0.82669686368	0.88560290448	0.9141420303	0.9311544522
$7 \times 7$	0.82666787300	0.88560400089	0.9141529339	0.9311678947
$8 \times 8$	0.82666347035	0.88561771327	0.9141689199	0.9311828135
$9 \times 9$	0.82663419984	0.88558616089	0.9141380104	0.9311532703
$10 \times 10$	0.82669232316	0.88565114145	0.9141962929	0.9312046701
$11 \times 11$	0.82670847046	0.88566486589	0.9142067395	0.9312128766
$12 \times 12$	0.82673379300	0.88568274378	0.9142192799	0.9312221433

Сходимость процесса Чепмена–Энскога иллюстрируют табл. 1–3, где приведены значения спитцеровского множителя  $\gamma_E$ , вычисленного с удержанием различного числа членов в разложении (3).

На фиг. 1 приведены зависимости спитцеровского множителя от параметра неидеальности для ККП (штриховая линия) и кулоновского потенциалов (сплошная линия) при различных значениях зарядового числа ионов. При учете не логарифмических членов в транспортных сечениях электрон–электронных столкновений в большинстве случаев спитцеровский множитель  $\gamma_E$  становится функцией параметра неидеальности  $\Gamma$ . В то время как ранее считалось, что данная величина является постоянной для заданного значения зарядового числа иона. Спитцеровская асимптотика (вследствие слабой логарифмической зависимости от  $\Gamma$ ) для идеальной плазмы  $\gamma_E = 0.582$  достигается лишь при очень малых  $\Gamma < 10^{-45}$ . Из фиг. 1 видно, что при  $\Gamma \gg 1$  значение спитцеровского множителя стремится к 1. С ростом значений  $\Gamma$  роль электрон–электронных столкновений ослабевает. Для большинства моделей вклад электрон–электронных столкновений в электропроводность стремится к нулю при  $\Gamma \rightarrow \infty$ .

На фиг. 2 показана зависимость приведенной проводимости плазмы  $\sigma_e^* = \sigma_e / \sigma_0$  от параметра неидеальности в спитцеровском приближении, а также для кулоновского и коротко действующего

**Фиг. 1.** Зависимость спитцеровского множителя от параметра неидеальности: данная работа, 1 – ККП, 2 – кулоновский потенциал, 3 – спитцеровская асимптотика.



**Фиг. 2.** Зависимость приведенной электропроводности полностью ионизованной плазмы от параметра неидеальности: данная работа, 1 – кулоновский потенциал, 2 – ККП, 3 – [9], 4 – эксперимент [10].

шего кулоновского потенциалов. Полученные результаты качественно отражают поведение экспериментально выделенной кулоновской составляющей проводимости плазмы (см. [10]). Используя формулы (12) и (14), получаем аналогичные зависимости для других приведенных электронных кинетических коэффициентов  $\alpha_0^e$ ,  $\beta_0^e$ ,  $\gamma_0^e$  и т.д.

## 5. ВЫВОДЫ

При помощи решения кинетического уравнения Больцмана в работе выполнен расчет основных электронных кинетических коэффициентов неидеальной полностью и многократно ионизованной плазмы. Разработан пакет программ для вычисления электронных кинетических коэффициентов полностью ионизованной плазмы. Изложена реализация математической модели электропроводности плазмы при различных значениях параметра неидеальности  $\Gamma$ . Приведены результаты вычислений при различных значениях  $\Gamma$  для матриц высших порядков. Подтверждена установленная ранее зависимость спитцеровского множителя от параметра неидеальности.

Получено удовлетворительное согласие результатов теоретических расчетов с экспериментально выделенной кулоновской составляющей проводимости плазмы инертных газов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.
2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
3. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Рёнке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. М.: Физматлит, 2002.
4. Очерки физики и химии низкотемпературной плазмы / Под ред. Л.С. Полака. М.: Наука, 1971.
5. Выжол Ю.О., Жорова А.М., Муленко И.О., Хомкин О.Л. Розробка системи аналітичних обчислень на ЕВМ та її застосування в кінетиці плазми // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Випуск № 1. 2011. С. 96–103.
6. Экстремальные состояния вещества // Сб. научных трудов ИВТ РАН под ред. Фортова В.Е. и Кузьменкова Е.А. М., 1991, 368 с.
7. Выжол Ю.А., Жорова А.Н., Муленко И.А., Хомкин А.Л. Применение методов компьютерной алгебры к расчету скобочных интегралов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 10. С. 1867–1882.
8. Выжол Ю.А., Муленко И.А., Федосеева Е.В., Хомкин А.Л. Определение вклада электрон-электронных столкновений в проводимость полностью ионизированной плазмы для различных моделей расчета транспортных сечений // Український фізичний ж. 1997. Т. 42. № 9. С. 1083–1090.
9. Спитцер Л., Хэрм Р. Явления переноса в полностью ионизованном газе. Проблемы современной физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
10. Иванов Ю.В., Минцев В.Б., Фортвов В.Е., Дремин А.Н. Электропроводность неидеальной плазмы // ЖЭТФ. 71. № 1. 1976. С. 216–224.