Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. В. Кисляков, Замечания об “исправлении”,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1984, том 135, 69–75

https://www.mathnet.ru/znsl4757

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
12 декабря 2025 г., 16:13:45

С.В.Кисляков

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ „ИСПРАВЛЕНИИ"

После того, как Д.Е.Меньшов более 40 лет назад установил, что всякая измеримая функция совпадает на множестве "почти полной" меры с функцией, ряд Фурье которой равномерно сходится, на эту тему было написано большое количество работ. Настоящая статья тесно примыкает к двум из них - [I] и [2]: в § I приведено дополнение к одному результату из [I], а в § 2 метод статьи [2] применяется для того, чтобы просто доказать основной результат из [3].

В части статьи [2] и во всей статье [I] изложение велось в очень общей ситуации - в [1], например, для произвольных конечномерных локально компактных абелевых групп. Здесь же в целях простоты и экономии места рассматривается случай группы окружности. Переход к общим группам встречает лишь (умеренные) технические, но не принципиальные трудности, которые интересующийся читатель легко преодолеет, ознакомившись с [I] и [2]. Следующие ниже определения даются для общих компактных абелевых групп ради параграфа 2, где рассматривается система Уолша (система характеров диадической группы).

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть G - компактная абелева группа с группой характеров Γ и нормированной мерой Хаара m. Система $\mathcal{B}$ конечных подмножеств группы Γ называется р е г у л я р н о й, если для каждого конечного множества E, $E \subset \Gamma$ семейство $\{B \in \mathcal{B} : E \setminus B \neq \emptyset\}$ конечно. Фиксировав регулярную систему $\mathcal{B}$, обозначим через $\mathcal{U}^\infty(G, \mathcal{B})$ (или просто $\mathcal{U}^\infty$) множество тех суммируемых функций f на G, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\mathcal{U}} = \sup_{B \in \mathcal{B}} \Big\| \sum_{b \in B} \hat{f}(b) b \Big\|_{L^\infty(G)},$$

а через $\mathcal{U}(G, \mathcal{B})$ (или $\mathcal{U}$) - замыкание множества $\mathcal{P}$ тригонометрических полиномов в пространстве $(\mathcal{U}^\infty, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$.

Заметим, что при переносе изложенных ниже результатов с окружности на более общие группы можно рассматривать аналоги пространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^\infty$ для некоторых нерегулярных систем $\mathcal{B}$ - например, в случае $G = \mathbb{T}^n$, для системы прямоугольных параллелепипедов в $\mathbb{Z}^n$ (метод указан в [I]).

§ I. Функции с заданным модулем

Пусть $\mathcal{B}$ - регулярная система подмножеств группы $\mathbb{Z}$. Из

теоремы 3 в [I] следует, что для всякой строго положительной ограниченной полунепрерывной снизу функции ψ на окружности $\mathbb{T}$ существует функция g, $g \in U^{\infty}(\mathbb{T}, \mathcal{B})$, такая, что $|g| = \psi$ п.в. и $\hat{g}(n) = 0$ при $n < 0$. Ясно, что последнее ограничение ("аналитичность" функции g) препятствует тому, чтобы результат сохранялся для функций ψ, обращающихся "достаточно интенсивно" (скажем, на множестве положительной меры) в нуль, и тому, чтобы функция g была вещественной. Оказывается, однако, что оба эти свойства можно обеспечить, отказавшись от аналитичности.

Обозначим через $U^{\infty}(\mathbb{T}, \mathcal{B})$ пространство таких функций g, что $\mathbb{P}_+ g, \mathbb{P}_- g \in U^{\infty}(\mathbb{T}, \mathcal{B})$ ($\mathbb{P}_+$ и $\mathbb{P}_-$ - ортогональные проекторы пространства $L^2(\mathbb{T})$, соответственно, на подпространство $H^2 = \operatorname{span}\{z^n : n \geqslant 0\}$ и его ортогональное дополнение H^2_-). Снабдим это пространство нормой

$$\|g\|_U = \|\mathbb{P}_+ g\|_U + \|\mathbb{P}_- g\|_U .$$

ТЕОРЕМА I. Пусть ψ - неотрицательная ограниченная полунепрерывная снизу функция на окружности. Тогда существует вещественная функция g, $g \in U^{\infty}(\mathbb{T}, \mathcal{B})$, такая, что $|g| = \psi$ п.в.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (эскиз). Сначала установим справедливость следующей леммы (ср. ее с теоремой о разложении в [I]).

ЛЕММА I. Пусть $0 < r < 1$. Тогда существуют постоянные C и β, $C, \beta > 0$ со следующим свойством. Для всякой функции φ, $\varphi \in C(\mathbb{T})$, $\varphi \geqslant 0$, всякого (малого) δ, $\delta > 0$, всякого η, $\eta > 0$ и всякого натурального числа M найдутся вещественная функция g, $\hat{g} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, и тригонометрический полином h со спектром вне интервала $[-M, M]$, такие, что

$$\|g\|_U \leqslant \eta \|\varphi\|_\infty , \quad |g| \leqslant \eta |\varphi|, \quad \|\hat{g} - \hat{h}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant \delta ,$$

$$\|\varphi - g\|_{L^r} \leqslant C\eta^{-\beta} \|\varphi\|_{L^r} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что можно ограничиться случаем, когда (скажем) $\eta > 100$ (при малых η положим $g = h = 0$). Пусть N - натуральное число. Из леммы 3 в [I] вытекает, что для любого K, $K \geqslant 10$ и любого тригонометрического полинома p найдутся такие тригонометрические полиномы q_1 и q_2, что $(q_1 p)^\wedge(n) = 0$ при $n \leqslant N$, $(q_2 p)^\wedge(n) = 0$ при $n \geqslant -N$, $\|\hat{q}_i\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant K$ $(i = 1, 2)$ и $\|(1 - q_1 - q_2)p\|_{L^r} \leqslant CK^{-\beta} \|p\|_{L^r}$, где C и β, $\beta > 0$, зависят лишь от r. Отметим еще, что из доказательства леммы 3 в [I] (которое представляет собой количественное уточнение итеративной конструкции из [5], стр.32-33) видно, что $q_1 + q_2$ -

вещественная функция (последнее будет использовано).

Пусть $\mathcal{U}$ – открытая дуга с центром в точке 1 и мерой k^{-1} $(k \in \mathbb{N})$. Если $x_\ell = \exp[2\pi i \ell/k]$, $0 \leqslant \ell \leqslant k-1$, то дуги $x_\ell + \mathcal{U}$ попарно не пересекаются и покрывают окружность за исключением конечного множества, а "треугольные" функции $\alpha_{\mathcal{U},\ell}$,

$$\alpha_{\mathcal{U},\ell}(t) = (m\mathcal{U})^{-1} \mathbb{1}_{\mathcal{U}} * \mathbb{1}_{\mathcal{U}}(t - x_\ell), \quad t \in \mathbb{T} \qquad (\mathrm{I})$$

образуют разбиение единицы и обладают следующими свойствами: $\|\alpha_{\mathcal{U},i}\|_\infty = \|\hat{\alpha}_{\mathcal{U},i}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \alpha_{\mathcal{U},i}(x_i) = 1$; $\|\alpha_{\mathcal{U},i}\|_{L^2} \geqslant m(\mathcal{U}+\mathcal{U})$.

Пусть ϱ – малое положительное число. Воспользовавшись непрерывностью функции φ, найдем столь малую окрестность $\mathcal{U}$ (как в предыдущем абзаце), чтобы для некоторого подмножества I множества $\{0, \dots, k-1\}$ и некоторых неотрицательных чисел c_ℓ, $\ell \in I$ выполнялись неравенства (в них $\alpha_\ell = \alpha_{\mathcal{U},\ell}$):

$$0 \leqslant \sum_{\ell \in I} c_\ell \alpha_\ell \leqslant \varphi; \quad \|\varphi - \sum_{\ell \in I} c_\alpha \alpha_\ell\|_{L^2} \leqslant \varrho.$$

Пусть ε – еще одно малое положительное число (его малость будет определена по мощности множества I и числу η). Выберем такие вещественнозначные тригонометрические полиномы p_ℓ, что $\|\hat{p}_\ell - \hat{\alpha}_\ell\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant \varepsilon$, $\ell \in I$. После этого построим по индукции (применяя на каждом шаге утверждение, сформулированное в начале доказательства леммы, но со все бо́льшим „N") полиномы $q_1^{(\ell)}$ и $q_2^{(\ell)}$, $\ell \in I$, со следующими свойствами:

(а) для каждого ℓ из I функция $(q_1^{(\ell)} p_\ell)^\wedge$ сосредоточена в $(M, +\infty)$, а функция $(q_2^{(\ell)} p_\ell)^\wedge$ – в $(-\infty, -M)$;

(б) более того, для каждого ℓ из I множество $\operatorname{supp}(q_1^{(\ell)} p_\ell)^\wedge \cup \operatorname{supp}(q_2^{(\ell)} p_\ell)^\wedge$ не пересекается с (конечным в силу регулярности системы $\mathcal{B}$) множеством $\bigcup \{ B \in \mathcal{B} :$ B не содержит целиком хотя бы одно из множеств $\operatorname{supp}(q_s^{(n)} p_n)^\wedge$, где $n < \ell$, $s = 1, 2 \}$;

(в) $\|(q_s^{(\ell)})^\wedge\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant \eta/4$, $\|(1 - q_1^{(\ell)} - q_2^{(\ell)}) p_\ell\|_{L^2} \leqslant C_1 \eta^{-\beta} \|p_\ell\|_{L^2}$;

(г) функции $q_1^{(\ell)} + q_2^{(\ell)}$ вещественнозначны.

Проверим, что функции g, $g = \sum_{\ell \in I} c_\ell (q_1^{(\ell)} + q_2^{(\ell)}) \alpha_\ell$ и h, $h = \sum_{\ell \in I} c_\ell (q_1^{(\ell)} + q_2^{(\ell)}) p_\ell$ удовлетворяют заключению леммы. Очевидно, что $|g| \leqslant \eta |\varphi|$, $\|\hat{g} - \hat{h}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant \varepsilon \operatorname{card} I \|\varphi\|_\infty \eta$ и что спектр полинома h лежит вне интервала $[-M, M]$. Несложные оценки (см. [I], § 3) показывают, что $\|h\|_U \leqslant (\eta/2) \|\varphi\|_\infty$ (при проверке этого главную роль играет свойство (б)) и $\|\varphi - h\|_\eta^2 \leqslant \varrho^2 + (C\eta^{-\beta})^2 \|\varphi\|_\eta^2$. Ясно, что если заменить в этих неравенствах

h на g, то это приведет к появлению в их правых частях членов $\varepsilon \operatorname{card} I \|\varphi\|_\infty h$ и $(\varepsilon \operatorname{card} I \|\varphi\|_\infty h)^r$. Выбирая ϱ, а затем ε достаточно малыми, мы получим то, что требуется. ●

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что заключение леммы I, очевидно, сохраняется и для ограниченных полунепрерывных снизу неотрицательных функций φ (достаточно аппроксимировать такую функцию снизу в метрике L^r неотрицательной непрерывной функцией). Применим это заключение к такой функции φ, взяв в качестве h решение уравнения $ch^{-\beta} = 1/2$ – получатся функции g и h. Положим $f = h^{-1}g$, $q = h^{-1}h$. Тогда $\|f\|_U \leqslant \|\varphi\|_\infty$, $|f| \leqslant |\varphi|$, q – тригонометрический полином, $\operatorname{supp} \hat{q} \cap [-M, M] = \varnothing$, $\|\hat{q} - \hat{f}\|_{\ell^1} \leqslant \delta$ и $\|f\|_r^r = h^{-r}\|g\|_r^r \geqslant h^{-r}(\|\varphi\|_r^r - \|\varphi - g\|_r^r) \geqslant h^{-r} 2^{-1}\|\varphi\|_r^r$, так что $\|f\|_r \geqslant \sigma\|\varphi\|_r$, где σ – фиксированная постоянная, $0 < \sigma < 1$.

Воспользовавшись сказанным, проведем индуктивное построение. Положим $f_0 = q_0 = 0$; если для некоторого n, $n \geqslant 1$ функции $f_0, \ldots, f_{n-1} \in (\ell^1(\mathbb{Z}))^\vee$ и тригонометрические полиномы $q_0, \ldots, q_{n-1}$ уже построены, то в качестве f_n и q_n возьмем функции f и q, которые дает описанная конструкция, примененная к $\varphi = \psi - |f_0 + \ldots + f_{n-1}|$, $\delta = 2^{-n}$ и столь большому числу M, чтобы интервал $[-M, M]$ содержал все множества семейства $\mathcal{B}$, не содержащие целиком объединение $\operatorname{supp} \hat{q}_0 \cup \ldots \cup \operatorname{supp} \hat{q}_{n-1}$. Очевидно, будем иметь при всех n, $n \geqslant 1$:

(а) $|f_0 + \ldots + f_{n-1}| \leqslant \psi$, $\|f_n\|_r \geqslant \sigma \|\psi - |f_0 + \ldots + f_{n-1}|\|_r$;

(б) $\|\hat{f}_n - \hat{q}_n\|_{\ell^1} \leqslant 2^{-n}$;

(в) полиномы q_n попарно ортогональны в $L^2(\mathbb{T})$.

Ясно, что тогда $|q_0 + \ldots + q_{n-1}| \leqslant \psi + 1$, поэтому из (в) следует, что ряд $\sum_{n \geqslant 0} q_n$ сходится в L^2. Вместе с ним сходится и ряд $\sum_{n \geqslant 0} f_n$. Пусть F – его сумма. Так как $\|f_n\|_r \leqslant \|f_n\|_2 \xrightarrow{n \geqslant 0} 0$, то второе из неравенств (а) показывает, что $|F| = \psi$ п.в. Наконец, из выбора числа M на каждом шаге индукции нетрудно усмотреть, что $\sup_n \|q_1 + \ldots + q_n\|_U < \infty$, а тогда и $\sup_n \|f_1 + \ldots + f_n\|_U < \infty$, т.е. $F \in U^\infty$. ●

Изложенная конструкция аналогична примененной в [I], § 4. Обе они используют некоторые идеи, использованные А.Б.Александровым для построения "внутренних" функций в абстрактных пространствах.

§ 2. Равномерная сходимость по двум системам

В [3] было установлено, что в теореме Д.Е.Меньшова исправленную функцию можно выбрать так, чтобы равномерно сходился не только ее ряд Фурье (по тригонометрической системе), но и ряд по сис-

теме Уолша. Затем в [4] было объявлено о переносе этой теоремы на торы. Доказательство из [3] следует оригинальным рассуждениям Д.Е.Меньшова.

В статье [2], среди прочего, теорема Д.Е.Меньшова была распространена на конечномерные компактные абелевы группы с эргодическим эпиморфизмом (а затем в [I], другим методом - на произвольные конечномерные локально компактные абелевы группы). Мы покажем, что метод работы [2] позволяет легко получить результат, упомянутый в предыдущем абзаце. Метод из [I] для этой цели, видимо, неприменим.

Система Уолша W - это группа характеров диадической группы $D=(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$; последнюю мы будем отождествлять (пренебрегая неоднозначностью на счетном множестве) с окружностью с помощью канторова отображения $h: D \longrightarrow \mathbb{T}$,

$$h(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) = \exp 2\pi i \Big(\sum_{j\geq 1} \varepsilon_j 2^{-j}\Big)$$

(мы считаем, что $\mathbb{Z}_2=(0,1)$). Нормированная мера Лебега m на $\mathbb{T}$ окажется тогда и мерой Хаара для группы D . Эргодическим эпиморфизмом (для дальнейшего не обязательно знать, что это такое) для окружности является (например) отображение $z \longrightarrow z^2$, а для диадической группы - отображение $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) \longrightarrow (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots)$. Ключевой момент для дальнейшего - это то, что при указанном отождествлении оба отображения совпадают.

Нам понадобятся функции $\alpha_{u,\ell}$, введенные в § I (формула (I)). Мы будем рассматривать только такие дуги u , что $mu = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Преобразование Фурье функции g на $\mathbb{T}$, связанное с группой $\mathbb{T}$, будет, как и раньше, обозначаться через $\hat{g}$; через $\mathcal{F}g$ будет обозначаться преобразование Фурье, связанное с диадической группой. Доказательство следующей леммы предоставляется читателю.

ЛЕММА 2. $\sup_{u,\ell} \|\mathcal{F}\alpha_{u,\ell}\|_{\ell^1(W)} \leq 100$. ●

Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - регулярные системы подмножеств, соответственно, групп $\mathbb{Z}$ и W.

ТЕОРЕМА 2. Для всякой измеримой функции f на $\mathbb{T}$ и всякого ε, $\varepsilon > 0$, существует функция g, $g \in \mathcal{U}(\mathbb{T}, \mathcal{B}_1) \cap \mathcal{U}(D, \mathcal{B}_2)$, такая, что $m\{f \neq g\} < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и в [2], достаточно проверить заключение теоремы для функций f вида $f = \sum_{\ell} c_\ell \alpha_{u,\ell}$, установив, что для таких f исправленная функция g дополнительно удовлетворяет оценке

$$\max\left\{\|g\|_{u(\mathbb{T})},\ \|g\|_{u(D)}\right\} \leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_\infty \varepsilon^{-1}. \quad (2)$$

(Переход к общему случаю состоит в почленном исправлении быстро и равномерно сходящегося ряда функций такого вида, сумма которого отличается от заданной измеримой функции на множестве малой меры).

Пусть $\psi = 1 - \beta\alpha_{v,0}$, где $mV = 2^{-s} \asymp \varepsilon$ (s - как всегда, натуральное число), а коэффициент β подобран так, что $\int\psi = 0$. Ясно, что $\beta \asymp \varepsilon^{-1}$, откуда $\|\hat{\psi}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant \mathrm{const}\,\varepsilon^{-1}$ и (по лемме 2) $\|\mathcal{F}\psi\|_{\ell^1(W)} \leqslant \mathrm{const}\,\varepsilon^{-1}$. Кроме того, $\psi(t) \neq 1$ лишь на дуге с мерой порядка ε.

Исправленную функцию будем искать в виде $g = \sum_\ell c_\ell \alpha_{u,\ell}(z)\psi(z^{2^{k_\ell}})$. Если числа k_ℓ достаточно велики, то мера пересечения множества $\{z : \psi(z^{2^{k_\ell}}) \neq 1\}$ с носителем функции $\alpha_{u,\ell}$ примерно равна ε, помноженному на меру этого носителя. Так как носители функций $\alpha_{u,\ell}$ - интервалы, покрывающие окружность с кратностью 2, то $m\{f \neq g\} \leqslant \mathrm{const}\,\varepsilon$ при больших k_ℓ. Ясно, что $\hat{g} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $\mathcal{F}g \in \ell^1(W)$, поэтому достаточно обеспечить оценку (2). Для этого зафиксируем малое число ρ и подберем две конечные системы полиномов: тригонометрических $q, q_1, q_2, \ldots$ и по системе Уолша $r, r_1, r_2, \ldots$ так, чтобы выполнялись соотношения: $\int q\,dm = \int r\,dm = 0$; $\|\hat{q} - \hat{\psi}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant \rho$ и $\|(\alpha_{u,\ell} - q_\ell)^\wedge\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant \rho$ при всех ℓ; $\|\mathcal{F}(r - \psi)\|_{\ell^1(W)} \leqslant \rho$ и $\|\mathcal{F}(r_\ell - \alpha_{u,\ell})\|_{\ell^1(W)} \leqslant \rho$ при всех ℓ. После этого числа k_ℓ выберем по индукции столь большими, чтобы выполнялись условия:

(а) носитель функции $(q_\ell(z)\, q(z^{2^{k_\ell}}))^\wedge$ не пересекается с объединением тех множеств семейства $\mathcal{B}_1$, которые не содержат целиком множество $\bigcup_{j<\ell} \operatorname{supp}(q_j(z)\, q(z^{2^{k_j}}))^\wedge$;

(б) носитель функции $\mathcal{F}(r_\ell(z)\, r(z^{2^{k_\ell}}))$ не пересекается с объединением тех множеств семейства $\mathcal{B}_2$, которые не содержат целиком множество $\bigcup_{j<\ell} \operatorname{supp}\mathcal{F}(r_j(z)\, r(z^{2^{k_j}}))$

(Обеспечить эти условия возможно, поскольку $\int q\,dm = \int r\,dm = 0$; полезно вспомнить еще, что отображение $z \to z^2$ соответствует сдвигу в группе D).

Используя (а) и (б), легко доказать (см. [2]), что

$$\|\sum c_\ell q_\ell(z) q(z^{2^{k_\ell}})\|_{u(\mathbb{T},\mathcal{B}_1)} \leqslant \mathrm{const}\,\varepsilon^{-1}\|f\|_\infty \text{ и } \|\sum c_\ell r_\ell(z) r(z^{2^{k_\ell}})\|_{u(D,\mathcal{B}_2)} \leqslant \mathrm{const}\,\varepsilon^{-1}\|f\|_\infty.$$

Нормы функции g в пространствах $u(\mathbb{T},\mathcal{B}_1)$ и $u(\mathbb{T},\mathcal{B}_2)$ отличаются от оцененных величин на $\rho N \varepsilon^{-1}$, где N - число слагаемых в сумме, определяющей функцию f. Осталось воспользоваться произволом в выборе числа ρ. ●

Нетрудно усмотреть, что в теореме 2 пространство $u(\mathbb{T},\mathcal{B}_1)$

можно было бы заменить на пространство таких функций g, что $P_+ g, P_- g \in u(\mathbb{T}, \mathcal{B}_1)$.

Изложенный метод можно применять всякий раз, когда на заданном множестве имеется несколько групповых структур с общим эргодическим эпиморфизмом. С его помощью можно, например, показать, что теорема 2 сохраняется, если потребовать, чтобы у исправленной функции дополнительно сходились равномерно ряды по конечному числу мультипликативных систем Виленкина, а также установить аналогичные факты для n-мерных торов.

Литература

1. Кисляков С.В. Новая теорема об исправлении. - Изв. АН СССР, сер.матем., 1984, 48, № 2.
2. Хрущёв С.В. Теорема Меньшова об исправлении и гауссовские процессы. - Труды матем.ин-та им.В.А.Стеклова, 1981, 155, 151-181.
3. Котляр Б.Д. Ряды Уолша и теорема Меньшова об "исправлении" функций. - Изв.АН СССР, сер.матем., 1966, 30, № 5, 1193-1200.
4. Черномашенцев Г.М. Об "исправлении" функций нескольких переменных, заданных на торе. - Докл.АН СССР, 1967, 176, № 2, 277-278.
5. Aleksandrov A.B. Essays on non locally convex Hardy classes. Lecture Notes Math., 1981, 864, 1-89.

S.V.Kisliakov. Remarks on correcting.

Summary

The paper consists of two sections. In the first one it is proved that any bounded non-negative lower semi-continuous function on the unit circle is the modulus of some function with uniformly bounded Fourier sums. In the second section a simple proof of the following known result is presented: given a measurable function f on the unit circle and $\varepsilon > 0$, a function g can be found so that $m\{f \neq g\} < \varepsilon$ and the Fourier series of g with respect to the trigonometric system and to the Walsh system converge uniformly.