С. Ю. Максимов, *CW*-Группы, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, номер 1, 27–31

V. V. Batyrev

BOUNDEDNESS OF THE DEGREE OF HIGH DIMENSIONAL TORICAL FANO VARIETIES

Let V be a nonsingular projective torical variety with ample anti-canonical sheaf, i. e. a torical Fano variety. It is proved that the degree of this variety is less then a constant depending only on the dimension of V. There is a simple method for the computation of this constant.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исковских В. А. Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 12. (Итоги науки). ВИНИТИ, 1979, с. 59—157.
2. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий.— Успехи матем. наук, 1978, 33, вып. 2, с. 97—155.

Поступила в редакцию
18.05.81

УДК 512.8

С. Ю. Максимов

CW-ГРУППЫ

В настоящей работе рассматриваются так называемые CW-группы, являющиеся обобщением групп Уорфилда [1]; находятся достаточные условия того, что прямое слагаемое прямой суммы CW-групп есть прямая сумма CW-групп.

На протяжении всей работы Σ и $\oplus$ обозначают прямые суммы, под термином «группа» понимается абелева группа, под «счетностью» — не более чем счетность. Используемое в тексте определение подгрупп, в основном содержащихся одна в другой, а также в основном связанных подгрупп дано в [1, 2].

Определение 1. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольный класс групп. Группу G будем называть CW-группой относительно класса* $\mathfrak{A}$ *или, короче, CW-группой, если для любых групп $A_i \in \mathfrak{A}$ и любого гомоморфизма* $\varphi: G \to \sum\limits_{i \in I} A_i$ *существуют счетное подмножество $J \subseteq I$ и разложение* $G = G_1 \oplus G_2$, *такие, что G_2 — счетная прямая сумма ограниченных групп, а любой ненулевой элемент из G_1 имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме φ лежит в* $\sum\limits_{i \in J} A_i$.

Лемма 1. *Класс CW-групп замкнут относительно счетных прямых сумм.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1 из [1].

Лемма 2. *Класс CW-групп со счетными ульмовскими инвариантами замкнут относительно прямых слагаемых.*

Доказательство. Пусть $A = B \oplus C$ — CW-группа со счетными ульмовскими инвариантами, $\varphi: B \to \sum\limits_{i \in I} A_i$ — гомоморфизм, $A_i \in \mathfrak{A}$. Продолжим φ до гомоморфизма $\psi: B \oplus C \to \sum\limits_{i \in I} A_i$, положив $\psi|_B = \varphi$, $\psi|_C = 0$. По условию существуют разложение $B \oplus C = G_1 \oplus G_2$ и счетное подмножество $J_1 \subseteq I$, такие, что G_2 — счетная прямая сумма ограниченных групп, а любой ненулевой элемент из G_1 имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме ψ лежит в $\sum\limits_{i \in J_1} A_i$. В силу счетности ульмовских инвариантов группы A группа G_2 счетна, поэтому существует счетное подмножество $J_2 \subseteq I$, такое, что $\psi(G_2) \subseteq \sum_{i \in J_2} A_i$.

Отсюда получим, что любой ненулевой элемент группы A имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме ψ лежит в $\sum_{i \in J_1 \cup J_2} A_i$, но так как $\psi(B) = \varphi(B)$, то B есть CW-группа. Лемма доказана.

Определение 2. *Группу G назовем сервантно полной, если для любой ее подгруппы H в G найдется сервантная подгруппа H', в основном связанная с H.*

Лемма 3. *Класс сервантно полных групп замкнут относительно прямых слагаемых.*

Доказательство. Пусть $A = B \oplus C$ — сервантно полная группа, H — произвольная подгруппа группы B. Тогда существует сервантная подгруппа H' группы A, в основном связанная с H. Положим $F = \pi_B(H')$, где π_B — проекция на B, и докажем, что F в основном связана с H и сервантна в B. В самом деле, рассмотрим произвольный $b \in F$. Тогда существует $c \in C$, такой, что $b + c \in H'$. Поэтому существует $n > 0$, такое, что $n(b+c) \in H$, $n(b+c) \neq 0$. Но $H \subseteq B$. Отсюда $nc = 0$, то есть $0 \neq nb \in H$, и F в основном содержится в H. Пусть теперь $0 \neq x \in H$, тогда существует $n > 0$, такое, что $nx \in H'$, $nx \neq 0$. Отсюда $nx \in B \cap H' \subseteq F$. Поэтому и H в основном содержится в F, то есть F и H в основном связаны. Докажем, что любой ненулевой элемент из F имеет ненулевое кратное, все высоты которого в B и F совпадают. Действительно, пусть $0 \neq x \in F$; тогда существует $n > 0$, такое, что $nx \neq 0$ и $nx \in H'$. Предположим, что $nx = mb$, $b \in B$. Тогда в силу сервантности H' существует $h \in H'$, такой, что $nx = mh$. Пусть $h = b' + c$, где $b' \in B$, $c \in C$. Тогда $nx = mb'$, так как $nx \in B$. Теперь совпадение высот вытекает из того, что $b' \in \pi_B(H')$, а в силу [2, лемма 4] подгруппа F сервантна в B. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $A = B \oplus C = \sum_{i \in I} A_i$, причем все A_i суть CW-группы со счетными ульмовскими инвариантами. Тогда существует счетное подмножество $J \subseteq I$, такое, что $A^* = \sum_{i \in J} A_i$ в основном связана о $(A^* \cap B) \oplus (A^* \cap C)$.*

Доказательство. Пусть $\pi_B : A \to B$ — проекция A на B, и пусть $i_1 \in I$. Повторив рассуждения, проведенные в лемме 2, получим, что существует счетное подмножество $M_1 \subseteq I$, такое, что любой ненулевой элемент из A_{i_1} имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме π_B лежит в $\sum_{i \in M_1} A_i$. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 \in M_1$. В силу леммы 1 $\sum_{i \in M_1} A_i$ есть CW-группа, поэтому аналогично можно построить счетное подмножество $M_2 \subseteq I$, такое, что $M_1 \subseteq M_2$, и любой ненулевой элемент из $\sum_{i \in M_1} A_i$ имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме π_B лежит в $\sum_{i \in M_2} A_i$. Продолжив процесс, получим счетную цепочку подмножеств $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$, таких, что $|M_n| \leqslant \aleph_0$ для каждого n и любой ненулевой элемент из $\sum_{i \in M_n} A_i$

имеет ненулевое кратное, образ которого при π_B лежит в $\sum_{i\in M_{n+1}} A_i$. Положим $J=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $A^*=\sum_{i\in J} A_i$. Тогда $|J|\leqslant\aleph_0$ и для любого $x\in A^*$ существует $m>0$, такое, что $mx\neq 0$ и $\pi_B(mx)\in A^*$. Пусть $x=b+c$, $b\in B$, $c\in C$; отсюда $mb=\pi_B(mx)\in A^*$. Поэтому $mc=mx-mb\in A^*$, то есть $mx=mb+mc\in(A^*\cap B)\oplus(A^*\cap C)$, а поскольку $(A^*\cap B)\oplus(A^*\cap C)\subseteq A^*$, то $(A^*\cap B)\oplus(A^*\cap C)$ и A^* в основном связаны. Лемма доказана.

Теорема 1. *Класс сервантно полных прямых сумм CW-групп со счетными ульмовскими инвариантами замкнут относительно прямых слагаемых.*

Доказательство. Пусть $A=B\oplus C=\sum_{i\in I} A_i$ — сервантно полная группа, причем все A_i суть CW-группы со счетными ульмовскими инвариантами. Индукцией по τ докажем, что для любого τ существуют подгруппы $X_\alpha\subseteq B$, $Y_\alpha\subseteq C$, $\alpha\leqslant\tau$, такие, что $\sum_{\alpha\leqslant\tau}(X_\alpha\oplus Y_\alpha)$ сервантна в A и в основном связана с $\sum_{\alpha\leqslant\tau} A^*_\alpha$, где $A^*_\alpha=\sum_{i\in J_\alpha} A_i$, $|J_\alpha|\leqslant\aleph_0$.

Проведем доказательство для $\tau=1$. В самом деле, по лемме 4 существует счетное подмножество $J_1\subseteq I$, такое, что $A^*_1=\sum_{i\in J_1} A_i$ в основном связана с $(A^*_1\cap B)\oplus(A^*_1\cap C)$. В силу леммы 3 подгруппы B и C сервантно полны. Поэтому существуют подгруппы X_1, Y_1, сервантные в B и C соответственно, причем X_1 в основном связана с $A^*_1\cap B$, а Y_1 — с $A^*_1\cap C$. Отсюда $X_1\oplus Y_1$ в основном связана с $(A^*_1\cap B)\oplus(A^*_1\cap C)$, а значит, и с A^*_1. Кроме того, $X_1\oplus Y_1$ сервантна в A, то есть для $\tau=1$ утверждение доказано.

Пусть для всех $\tau<\tau_0$ утверждение верно. Докажем его для τ_0. Предположим сначала, что τ_0 — непредельное, и пусть $\tau_0=\tau+1$. В силу индуктивного предположения $\sum_{\alpha\leqslant\tau}(X_\alpha\oplus Y_\alpha)$ сервантна в A и в основном связана с $\sum_{\alpha\leqslant\tau} A^*_\alpha$; поэтому согласно [2, лемма 5] имеем разложение

$$A=\sum_{\alpha\leqslant\tau}(X_\alpha\oplus Y_\alpha)\oplus\sum_{i\,\overline{\in}\,\bigcup_{\alpha\leqslant\tau} J_\alpha} A_i.$$

Так как $\sum_{\alpha\leqslant\tau} X_\alpha$ — прямое слагаемое A, $X_\alpha\subseteq B$ для всех $\alpha\leqslant\tau$, то $\sum_{\alpha\leqslant\tau} X_\alpha$ — прямое слагаемое B, то есть существует B_τ, такое, что

$$B=\sum_{\alpha\leqslant\tau} X_\alpha\oplus B_\tau.$$

Аналогично существует C_τ, такое, что

$$C=\sum_{\alpha\leqslant\tau} Y_\alpha\oplus C_\tau.$$

Таким образом,

$$A=\sum_{\alpha\leqslant\tau}(X_\alpha\oplus Y_\alpha)\oplus B_\tau\oplus C_\tau.$$

Положим $\sum\limits_{\alpha\leqslant\tau}(X_\alpha\oplus Y_\alpha)=H$. Тогда будем иметь

$$A=H\oplus\sum_{i\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\leqslant\tau}J_\alpha}A_i=H\oplus B_\tau\oplus C_\tau.$$

Отсюда

$$A/H=\sum_{i\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\leqslant\tau}J_\alpha}(A_i\oplus H)/H=((B_\tau\oplus H)/H)\oplus((C_\tau\oplus H)/H).$$

По лемме 4 существует счетное подмножество $J_{\tau+1}\subseteq I$, такое, что фактор-группа $(\overset{*}{A}_{\tau+1}\oplus H)/H=\sum\limits_{i\in J_{\tau+1}}(A_i\oplus H)/H$ в основном связана с

$$(((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(B_\tau\oplus H))/H)\oplus(((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(C_\tau\oplus H))/H).$$

Пусть $\pi_\tau:A\to B_\tau\oplus C$ — проекция; тогда имеем включения

$$\pi_\tau((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(B_\tau\oplus H))\subseteq B_\tau,$$
$$\pi_\tau((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(C_\tau\oplus H))\subseteq C_\tau.$$

По лемме 3 в B_τ существует сервантная подгруппа $X_{\tau+1}$, в основном связанная с $\pi_\tau((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(B_\tau\oplus H))$, а в C_τ существует сервантная подгруппа $Y_{\tau+1}$, в основном связанная с $\pi_\tau((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(C_\tau\oplus H))$. Путем непосредственной проверки нетрудно убедиться, что $(X_{\tau+1}\oplus H)/H$ в основном связана с $((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(B_\tau\oplus H))/H$, а $(Y_{\ +1}\oplus H)/H$ — с $((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(C_\tau\oplus H))/H$. Отсюда заключаем, что $((X_{\ +1}\oplus H)/H)\oplus$ $\oplus((Y_{\tau+1}\oplus H)/H)$ в основном связана с $(((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(B_\tau\oplus H))/H)\oplus$ $\oplus(((A^*_{\tau+1}\oplus H)\cap(C_\tau\oplus H))/H)$, а значит, и с $(A^*_{\ +1}\oplus H)/H$. Поэтому $H\oplus X_{\tau+1}\oplus Y_{\tau+1}$ в основном связана с $A_{\ +1}\oplus H$, откуда $\sum\limits_{\alpha\leqslant\tau_0}(X_\alpha\oplus Y_\alpha)$ в основном связана $\sum\limits_{\alpha\leqslant\tau_0}\overset{*}{A}_\alpha$. Кроме того, по построению $\sum\limits_{\alpha\leqslant\tau_0}(X_\alpha\oplus Y_\alpha)$ сервантна в А, то есть для непредельного τ_0 утверждение доказано.

Пусть теперь τ_0 — предельное. По индуктивному предположению $\sum\limits_{\alpha<\tau_0}(X_\alpha\oplus Y_\alpha)$ сервантна в A и в основном связана с $\sum\limits_{\alpha<\tau_0}\overset{*}{A}_\alpha$. Положим $X_{\tau_0}=Y_{\tau_0}=A^{\tau}_{\tau_0}=0$. Тогда, очевидно, $\sum\limits_{\alpha\leqslant\tau_0}(X_\alpha\oplus Y)_\alpha$ в основном связана с$\sum\limits_{\alpha\leqslant\tau_0}\overset{*}{A}_\alpha$ и сервантна в A. Итак, утверждение полностью доказано.

Далее, согласно [2, лемма 5] для любого τ имеем разложение

$$A=\sum_{\alpha\leqslant\tau}(X_\alpha\oplus Y_\alpha)\oplus\sum_{i\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\leqslant\tau}J_\alpha}A_i.$$

Более того, нетрудно видеть, что на каждом непредельном шаге множество J_τ можно выбрать непустым, поэтому существует τ_0, такое, что

$$A=\sum_{\alpha\leqslant\tau_0}(X_\alpha\oplus Y_\alpha).$$

Отсюда

$$B = \sum_{\alpha < \tau_0} X_\alpha, \quad C = \sum_{\alpha < \tau_0} Y_\alpha.$$

Кроме того,

$$X_\alpha \oplus Y_\alpha \cong A^*_\alpha$$

для любого α. Поэтому в силу лемм 1, 2 подгруппы X_α и Y_α суть CW-группы. Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет получить следующее утверждение для групп без кручения:

Теорема 2. *Класс прямых сумм CW-групп без кручения замкнут относительно прямых слагаемых.*

Доказательство легко следует из теоремы 1, если заметить, что всякая группа без кручения сервантно полна и имеет нулевые ульмовские инварианты.

Автор благодарен А. В. Иванову за постановку задачи и А. П. Мишиной за постоянное внимание к работе.

S. Yu. Maksimov

CW-GROUPS

If a purely divisible group G is a direct sum of CW-groups with countable Ulm invariants then any summand of G has the same properties.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А. В. О тестовой проблеме Капланского.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1981, 42, с. 200—220.
2. Warfield R. An isomorphic refinement theorem for Abelian groups.— Pacif. J. Math., 1970, 34, p. 237—255.

Поступила в редакцию
25.05.81

УДК 513.83

В. В. Успенский

О СПЕКТРЕ ЧАСТОТ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть X_1 и X_2 — два пространства одной и той же тесноты, $t(X_1) = t(X_2) = \tau$. Может случиться, что утверждение «каково бы ни было Y, если $t(Y) \leqslant \tau$, то и $t(X_i \times Y) \leqslant \tau$» верно при $i=1$ и не верно при $i=2$. Введенное [1] и подробно исследованное А. В. Архангельским (см. [2], а также [3], гл. II, § 3) понятие спектра частот $\mathrm{Sp}\,X$ топологического пространства X направлено на обнаружение подобного рода «скрытых» свойств X, связанных с теснотой. В настоящей работе изучаются пространства непрерывных функций с точки зрения упомянутых «скрытых» особенностей структуры. Все пространства предполагаются вполне регулярными, τ — произвольный бесконечный кардинал, ω — наименьший бесконечный кардинал, $\mathfrak{c} = \exp \omega$. Через $C(X)$ обозначается пространство непрерывных вещественных функций на X, которое наделено топологией поточечной сходимости. Теснота $C(X)$ выражается формулой $t(C(X)) = \sup\{l(X^n) : n \in \mathbf{N}\}$ (см. [3], теорема 4.1.2); l — число Линделёфа. Нас интересует поведение тесноты при умножении $C(X)$ на произвольное Y. Согласно приведенной формуле $t(C(X)) = \omega$, когда X — бикомпакт. Этому случаю уделяется особое внимание.

Определение 1: $\mathrm{Sp}\,X = \{\tau : t(X \times Y) \leqslant \tau$ *для любого* Y, *такого, что* $t(Y) \leqslant \tau\}$.