ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАВНОМЕРНО ГИПЕРФИНИТНЫХ АЛГЕБР И ИХ СВЯЗЬ С НЕЙМАНОВСКИМИ КОЛЬЦАМИ[1])

Роберт Т. Пауэрс

Введение

В этой статье мы изучаем неймановские кольца операторов, каждое из которых является сильным замыканием возрастающей последовательности факторов типа I_n. Такие неймановские кольца будем называть гиперфинитными. Муррей и фон Нейман показали, что все гиперфинитные факторы типа II_1 изоморфны [10]. Мы исследуем аналогичный вопрос для гиперфинитных факторов типа III и покажем, что существует несчетное множество неизоморфных гиперфинитных факторов типа III.

При изучении гиперфинитных алгебр будет использована техника из теории C^*-алгебр. Каждое гиперфинитное кольцо порождается сепарабельной C^*-алгеброй, являющейся замыканием по норме возрастающей последовательности факторов типа I_n. Эти алгебры, называемые равномерно гиперфинитными алгебрами (РГФ), были определены и изучены Дж. Глиммом [4]. Мы рассматриваем каждое гиперфинитное кольцо как слабое замыкание РГФ-алгебры.

В § 2 мы показываем, как гиперфинитные факторы могут быть охарактеризованы состояниями, т. е. положительными линейными функционалами с единичной нормой на РГФ-алгебре. При этом используется связь между циклическими представлениями C^*-алгебры и состояниями алгебры [12][2]). Мы выводим необходимое и достаточное условие для того, чтобы состояние ω РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$ определяло факторпредставление $\mathfrak{A}$ (теорема 2.5).

В § 3 изучается вопрос о том, при каких условиях гиперфинитные кольца изоморфны. Будет показано (теорема 3.7), что если Π_1 и Π_2 — два представления РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве, то гиперфинитные кольца $\{\Pi_1(\mathfrak{A})\}''$ и $\{\Pi_2(\mathfrak{A})\}''$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует $*$-автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$, такой, что представления $x \to \Pi_1(x)$ и $x \to \Pi(x) = \Pi_2(\varphi(x))$ квазиэквивалентны. Из этого результата вытекает, что группа $*$-автоморфизмов РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$ действует транзитивно на пространстве чистых состояний[3]) алгебры $\mathfrak{A}$. Комбинируя результаты § 2 и 3, мы выведем необходимое и достаточное условие, выраженное в терминах состояний РГФ-алгебры для того, чтобы гиперфинитные факторы были изоморфны.

В § 4 мы конструируем однопараметрическое семейство фактор-состояний $\omega_\lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2)$ РГФ-алгебры. Используя результаты предыдущих разделов, мы показываем, что факторы M_λ, соответствующие состояниям ω_λ, попарно неизоморфны для различных λ.

---

[1]) Powers Robert T., Representation of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, *Ann. Math.*, **86**, № 1 (1967), 138—171.

[2]) См. также [14]. — *Прим. перев.*

[3]) Состояние называется чистым, если его нельзя представить в виде линейной комбинации двух различных состояний. — *Прим. перев.*

Из работы Пуканского [11] следует, что при $0<\lambda<1/2$ факторы M_λ имеют тип III. Таким образом, будет доказано существование несчетного множества неизоморфных гиперфинитных факторов типа III.

Автор выражает благодарность д-ру О. Е. Лэнфорду и проф. А. С. Вайтману за полезные обсуждения. Автор благодарен проф. Р. Кадисону за ряд замечаний по поводу рукописи.

§ 1. Некоторые определения и обозначения

Для обсуждения алгебр фон Неймана мы используем обозначения и терминологию, предложенную Муреем и фон Нейманом [9] (см. [2]). Если S — множество ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, то S' и S'' обозначают коммутант и бикоммутант S. Если S — симметрическое множество, содержащее единичный оператор I, то S'' — наименьшее слабо замкнутое кольцо операторов, содержащее S. По этой причине S'' называют неймановской алгеброй, порожденной S. Если S — симметрическая алгебра операторов, содержащая единицу, то S'' — слабое, сильное, ультраслабое и ультрасильное замыкание S.

По поводу этих операторных топологий мы отсылаем к [2, гл. I, § 3, стр. 32—37]. Напомним только, что слабая, сильная, ультраслабая и ультрасильная топологии характеризуются соответственно семейством полунорм

$$p_1(A)=|(f, Ag)|; \qquad p_2(A)=\|Af\|;$$

$$p_3(A)=\sum_{i=1}^{\infty}|(f_i, Ag_i)|, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|g_i\|^2<\infty;$$

$$p_4(A)=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|Af_i\|^2\Big)^{1/2}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|^2<\infty.$$

Мы используем физическое скалярное произведение (f, g), линейное по g и антилинейное по f.

Неймановское кольцо R называется фактором, если его центр $Z(R)=R\cap R'$ состоит только из операторов, кратных единичному оператору. Простейшие факторы — это факторы типа I_n. Их можно охарактеризовать семейством матричных единиц $(e_{ij},\ i, j=1,\dots, n)$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{n} e_{ii}=I,\ e_{ij}^*=e_{ji} \text{ и } e_{ij}e_{rs}=\delta_{jr}e_{is}\ (i, j=1,\dots, n).$$

Каждый фактор типа I_n содержит семейство матричных единиц и порождается им.

Нам понадобятся некоторые результаты об алгебраическом объединении факторов типа I_n. Если M_1 и M_2 — взаимно коммутирующие факторы (т. е. $A\in M_1$ и $B\in M_2$ влечет $AB=BA$) типа I_{n_1} и I_{n_2} соответственно, то $M=\{M_1, M_2\}''$ — фактор типа I_m с $m=n_1n_2$. Так как M — конечномерный фактор, то M является наименьшей $*$-алгеброй, содержащей M_1 и M_2. Если M_1 и M_2 — факторы типа I_n и I_m и если $M_1\subset M_2$, то n — делитель m и $N=M_2\cap M_1'$ — фактор типа I_p, где $p=m/n$.

Гиперфинитное кольцо — это неймановское кольцо, которое порождено возрастающей последовательностью факторов типа I_n. Эти кольца определяются следующим образом.

Определение 1.1. Слабозамкнутое неймановское кольцо R называется *гиперфинитным* кольцом класса $\{n_i\}$, если существует возрастающая последовательность факторов $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset R$ типов I_{n_1}, $\mathrm{I}_{n_2}, \ldots$, которые порождают R, т. е.

$$R = \{M_1, M_2, \ldots\}''.$$

Всегда предполагается, что $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Из предыдущего следует, что n_i является делителем n_{i+1} при $i = 1, 2, \ldots$.

Понятие гиперфинитного кольца — простое обобщение понятия *аппроксимативно конечного фактора,* введенного Муреем и фон Нейманом (см. [10, гл. IV]). Аппроксимативно конечные факторы — это гиперфинитные факторы типа II_1. Муррей и фон Нейман показали, что гиперфинитные факторы типа II_1 изоморфны независимо от их класса $\{n_i\}$. Понятие гиперфинитного фактора инвариантно относительно изоморфизма неймановских колец. Два неймановских кольца R_1 и R_2 называются алгебраически изоморфными, или просто изоморфными, если существует $*$-изоморфизм R_1 на R_2, т. е. взаимно однозначное отображение R_1 на R_2, которое сохраняет алгебраические операции (αA, $A+B$, AB, A^*). В книге [2, гл. I, § 4, стр. 57] показано, что $*$-изоморфизм одного неймановского кольца на другое необходимо ультраслабо и ультрасильно непрерывен. Так как гиперфинитное кольцо является ультрасильным замыканием возрастающей последовательности факторов типов I_n, то два изоморфных неймановских кольца либо одновременно гиперфинитные кольца класса $\{n_i\}$, либо ни одно из них не является гиперфинитным класса $\{n_i\}$.

Теперь мы определим один класс C^*-алгебр, которые тесно связаны с гиперфинитными кольцами. Эти алгебры были введены и изучены Глиммом [4]. Напомним, что всякая C^*-алгебра — это полная нормированная $*$-алгебра, причем $\|x\|^2 = \|x^*x\|$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.

Определение 1.2. C^*-алгебра называется *равномерно гиперфинитной* (РГФ) алгеброй класса $\{n_i\}$, если существует возрастающая последовательность факторов $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}$ типов I_{n_1}, I_{n_2}, для которой $\mathfrak{A}$ является замыканием по норме $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_i$. Предполагается, что $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

В условиях нашего определения говорят, что возрастающая последовательность факторов $\{M_i;\ i = 1, 2, \ldots\}$ порождает $\mathfrak{A}$. Из определения следует, что n_i является делителем n_{i+1} при $i = 1, 2, \ldots$.

Проблема алгебраической классификации РГФ-алгебр была решена Глиммом [4]. Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — РГФ-алгебры классов $\{n_i\}$ и $\{m_i\}$ соответственно. Алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ изоморфны тогда и только тогда, когда для каждого натурального i существует натуральное j, причем $j \geqslant i$, такое, что n_i является делителем m_j, а m_i — делителем n_j.

Отметим два свойства РГФ-алгебр, которые понадобятся в дальнейшем: 1) каждая РГФ-алгебра сепарабельна по норме и 2) РГФ-алгебра является простой. Следовательно, каждое циклическое представление РГФ-алгебры определено в сепарабельном гильбертовом пространстве и каждое $*$-представление является точным. Действительно, всякое $*$-представление РГФ-алгебры сохраняет норму, т. е. если $x \to \Pi(x)$ — представление РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$, то $\|x\| = \|\Pi(x)\|$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.

Из определений 1.1 и 1.2 ясно, что любое гиперфинитное кольцо класса $\{n_i\}$ содержит РГФ-алгебру того же класса и порожда-

ется ей[1]). В этой статье мы рассматриваем каждое гиперфинитное кольцо как слабое замыкание некоторого $*$-представления РГФ-алгебры. Мы будем рассматривать РГФ-алгебры как абстрактные алгебры (т. е. как C^*-алгебры, не связывая их с конкретной реализацией в виде алгебр ограниченных операторов в гильбертовом пространстве) и гиперфинитные кольца как слабо замкнутые кольца, порожденные представлениями РГФ-алгебр.

Далее, мы покажем, что гиперфинитные факторы класса $\{n_i\}$ можно охарактеризовать состояниями РГФ-алгебры класса $\{n_i\}$, т. е. положительными линейными функционалами на ней с нормой единица. Важнейшим в этом описании является связь между циклическими $*$-представлениями C^*-алгебры и состояниями алгебры. Из конструкции Гельфанда — Наймарка — Сигала [12][2]) следует, что для каждого состояния ω C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ существует циклическое $*$-представление Π_ω алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве H и вектор $f \in H$, для которого $\omega(x) = (f, \Pi_\omega(x) f)$, для всех $x \in \mathfrak{A}$ и $H = [\Pi_\omega(\mathfrak{A}) f]$, где через $[S]$ мы обозначаем наименьшее замкнутое линейное подпространство H, содержащее S. Представление Π_ω определяется с точностью до унитарной эквивалентности состоянием ω. Назовем Π_ω циклическим представлением $\mathfrak{A}$, индуцированным состоянием ω. Представление Π_ω неприводимо, если ω — чистое состояние.

Закончим этот раздел перечислением различных соотношений эквивалентности между представлениями C^*-алгебр.

Определение 1.3. Два $*$-представления Π_1 и Π_2 C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 называются *унитарно эквивалентными* ($\Pi_1 \sim \Pi_2$), если существует линейная изометрия U пространства H_1 на пространство H_2, такая, что $U\Pi_1(x) = \Pi_2(x) U$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.

Определим понятие квазиэквивалентности, которое принадлежит Макки [8]. Настоящее определение отличается от определения Макки, но эквивалентно ему, как показано в [3, предложение 5.3.1, стр. 104].

Определение 1.4. Пусть Π_1 и Π_2 — представления C^*-алгебры в гильбертовых пространствах H_1 и H_2. Пусть $R_1 = \Pi_1(\mathfrak{A})''$ и $R_2 = \Pi_2(\mathfrak{A})''$ — слабо замкнутые неймановские кольца, порожденные этими представлениями. Тогда представления Π_1 и Π_2 называются *квазиэквивалентными* ($\Pi_1 \underset{q}{\sim} \Pi_2$), если существует $*$-изоморфизм φ из R_1 на R_2, такой, что $\varphi(\Pi_1(x)) = \Pi_2(x)$ для всех $x \in \mathfrak{A}$. Понятие квазиэквивалентности полезно при изучении факторпредставлений. Если Π — факторпредставление C^*-алгебры, а Π_1 — ненулевое подпредставление Π (см. [8] или [3], § 5.3), то Π_1 — факторпредставление, квазиэквивалентное Π. Следовательно, факторпредставление C^*-алгебры квазиэквивалентно любому его циклическому подпредставлению.

Наконец, определим то, что мы будем называть алгебраической эквивалентностью.

Определение 1.5. Два $*$-представления Π_1 и Π_2 C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ называются *алгебраически эквивалентными* ($\Pi_1 \underset{a}{\sim} \Pi_2$), если неймановские кольца $R_1 = \{\Pi_1(\mathfrak{A})\}$ и $R_2 = \{\Pi_2(\mathfrak{A})\}$ изоморфны.

---

[1]) Отметим, что любое гиперфинитное кольцо класса $\{n_i\}$ содержит РГФ-алгебру класса $\{2^i\}$ и порождается ей. — *Прим. перев.*

[2]) См. также [14]. — *Прим. перев.*

Определения 1.3, 1.4 и 1.5 вводят последовательно все более слабые понятия эквивалентности. Из унитарной эквивалентности вытекает квазиэквивалентность, из квазиэквивалентности — алгебраическая эквивалентность. Для неприводимых представлений C^*-алгебры квазиэквивалентность означает унитарную эквивалентность [3, предложение 5.3.3, стр. 106].

Алгебраическая эквивалентность — наиболее слабое из понятий эквивалентности этого раздела. Все неприводимые представления РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$ алгебраически эквивалентны. Действительно, если Π_1 и Π_2 — неприводимые представления $\mathfrak{A}$ в гильбертовых пространствах H_1 и H_2, то неймановские кольца $R_1 = \{\Pi_1(\mathfrak{A})\}''$ и $R_2 = \{\Pi_2(\mathfrak{A})\}''$ есть кольца $\mathfrak{B}(H_1)$ и $\mathfrak{B}(H_2)$, т. е. кольца всех ограниченных операторов в H_1 и H_2. Поскольку H_1 и H_2 — бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства, кольца R_1 и R_2 изоморфны.

Следовательно, представления Π_1 и Π_2 алгебраически эквивалентны.

Мы применяем три понятия эквивалентности, упомянутые выше, к состояниям C^*-алгебр. Два состояния ω_1 и ω_2 называются унитарно эквивалентными, квазиэквивалентными или алгебраически эквивалентными, если соответствующие им циклические представления Π_{ω_1} и Π_{ω_2}, индуцированные состояниями ω_1 и ω_2, унитарно эквивалентны, квазиэквивалентны или алгебраически эквивалентны.

§ 2. Описание гиперфинитных факторов

Теорема 2.1. *Предположим, что M — гиперфинитный фактор класса $\{n_i\}$, элементы которого являются операторами в гильбертовом пространстве H. Предположим, что $\mathfrak{A}$ — РГФ-алгебра того же класса $\{n_i\}$. Тогда M можно рассматривать как слабое замыкание $*$-представления Π алгебры $\mathfrak{A}$ в H (т. е. $M = \Pi(\mathfrak{A})''$). Более того, для любого $f \in H$, $\|f\| = 1$ состояние $\omega(x) = (f, \Pi(x) f)$ характеризует представление Π с точностью до квазиэквивалентности, а именно циклическое представление $\mathfrak{A}$, индуцированное ω, квазиэквивалентно Π.*

Доказательство. Так как M — гиперфинитный фактор класса $\{n_i\}$, то существует возрастающая последовательность факторов M_i типа I_{n_i}, которые порождают M. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — замыкание по норме множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Ясно, что $\mathfrak{A}_1$ — РГФ-алгебра класса $\{n_i\}$. Из классификационной теоремы Глимма следует, что алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ $*$-изоморфны. Тогда существует $*$-изоморфизм Π алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_1$. Ясно, что Π — $*$-представление $\mathfrak{A}$ в пространстве H. Так как $\mathfrak{A}_1$ слабо плотно в M, то $M = \{\Pi(\mathfrak{A})\}''$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, предположим, что $f \in H$ и $\|f\| = 1$. Пусть $\mathfrak{M} = [\Pi(\mathfrak{A}) f]$, и пусть E — эрмитов проектор на $\mathfrak{M}$. Ясно, что $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно $\Pi(x)$ при $x \in \mathfrak{A}$. Циклическое $*$-представление $\Pi_1(x) = E\Pi(x)E = \Pi(x)E$ алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{M}$ характеризуется с точностью до унитарной эквивалентности состоянием $\omega(x) = (f, \Pi(x) f)$. Так как Π — факторпредставление $\mathfrak{A}$ и так как Π_1 — подпредставление Π, то представления Π и Π_1 квазиэквивалентны. Следовательно, состояние ω характеризует пред-

ставление Π с точностью до унитарной эквивалентности. Это завершает доказательство теоремы.

Заметим, что факторпредставление Π теоремы 2.1 можно описать также с точностью до квазиэквивалентности с помощью матрицы плотности состояния Π, т. е. любым состоянием вида $\omega(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(f_i, \Pi(x) f_i)$, где $f_i \in H$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|^2 = 1$.

Это видно из следующего. Пусть H_1 — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Определим представление Π_1 алгебры $\mathfrak{A}$ в $H \otimes H_1$ таким образом: $\Pi_1(x) = \Pi(x) \otimes I$.

Так как отображение $\Pi(x) \to \Pi_1(x)$ ультраслабо непрерывно, то это отображение имеет единственное расширение до отображения неймановских колец $\{\Pi(\mathfrak{A})\}''$ и $\{\Pi_1(\mathfrak{A})\}''$. Тогда $\Pi \underset{q}{\sim} \Pi_1$. Каждую матрицу плотности состояния Π можно представить как векторное состояние Π_1, т. е. как состояние вида $\omega(x) = (f, \Pi_1(x) f)$, где $f \in H \otimes H_1$. Каждое векторное состояние характеризует представление с точностью до квазиэквивалентности согласно теореме 2.1. Поэтому матрица плотности характеризует его с точностью до квазиэквивалентности.

Теперь мы рассмотрим проблему описания тех состояний РГФ-алгебры, которые индуцируют факторпредставление. Начнем с описания центра произвольного представления РГФ-алгебры. Полезно ввести следующее определение.

Определение 2.2. Пусть $S \subset \mathfrak{A}$ — подмножество C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Коммутант S относительно $\mathfrak{A}$, обозначаемый через S^c, есть подмножество всех $x \in \mathfrak{A}$, которые коммутируют с каждым элементом S, т. е.

$$S^c = \{x \in \mathfrak{A};\ xy = yx \text{ для всех } y \text{ из } S\}.$$

Ясно, что S^c — замкнутая по норме подалгебра в $\mathfrak{A}$. Если S симметрично (т. е. $x \in S$ означает, что и $x^* \in S$), то S^c — C^*-подалгебра $\mathfrak{A}$. Заметим, что если $S_1 \subset S_2 \subset \mathfrak{A}$, то $S_2^c \subset S_1^c$.

Лемма 2.3.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра и $M \subset \mathfrak{A}$ — фактор типа I_n. Рассмотрим $*$-представление Π алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве H. Тогда слабое замыкание $\Pi(M^c)$ определяется следующим образом:

$$\{\Pi(M^c)\}'' = \{\Pi(M)\}' \cap \{\Pi(\mathfrak{A})\}''.$$

Доказательство. Так как $M^c \subset \mathfrak{A}$, то $\{\Pi(M^c)\}'' \subset \{\Pi(\mathfrak{A})\}''$, а так как

$$\{\Pi(M^c)\} \subset \{\Pi(M)\}',$$

то $\{\Pi(M^c)\}'' \subset \{\Pi(M)\}'$. Поэтому

$$\{\Pi(M^c)\}'' \subset \{\Pi(M)\}' \cap \{\Pi(\mathfrak{A})\}''.$$

Докажем обратное включение. Пусть $A \in \{\Pi(M)\}' \cap \{\Pi(\mathfrak{A})\}''$. Мы покажем, что $A \in \{\Pi(M^c)\}''$. Поскольку $\{\Pi(M^c)\}''$ слабозамкнуто, то достаточно показать, что для произвольного конечного множества пар векторов $\{f_k, g_k;\ k = 1, \ldots, m\}$ существует $x \in M^c$, такое, что

$$|(f_k, (A - \Pi(x)) g_k)| < 1 \text{ для } k = 1, \ldots, m.$$

Пусть $\{e_{ij};\ i, j = 1, \ldots, n\}$ — семейство матричных единиц, порождающих M. Так как A принадлежит слабому замыканию $\{\Pi(\mathfrak{A})\}$, то

существует $y \in \mathfrak{A}$, такое, что

$$|(\Pi(e_{1r}) f_k, (A - \Pi(y)) \Pi(e_{1r}) g_k)| < \frac{1}{n}.$$

Используя свойства матричных единиц и учитывая, что $A \in \{\Pi(M)\}'$, т. е. перестановочность A с $\Pi(e_{ij})$, мы получаем неравенства

$$|(f_k, (\Pi(e_{rr}) A - \Pi(e_{r1} y e_{1r})) g_k)| < \frac{1}{n}.$$

Суммируя все неравенства по r, получаем

$$|(f_k, (A - \Pi(x)) g_k)| < 1 \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

где

$$x = \sum_{r=1}^{n} e_{r1} y e_{1r}.$$

Непосредственный подсчет показывает, что x коммутирует со всеми e_{ij}. Так как $\{e_{ij}\}$ являются образующими элементами для M, то $x \in M^c$. Следовательно, A принадлежит слабому замыканию $\{\Pi(M^c)\}$. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — РГФ-*алгебра. Обозначим через* J *совокупность всех факторов* $M \subset \mathfrak{A}$ *типа* I_n *для* $n = 1, 2, \ldots$. *Пусть* Π — *произвольное* $*$-*представление* $\mathfrak{A}$ *и* R — *гиперфинитное кольцо, порожденное* $\{\Pi(\mathfrak{A})\}$, *т. е.* $R = \{\Pi(\mathfrak{A})\}''$. *Тогда центр* R *равен пересечению колец* $\{\Pi(M^c)\}''$ *для всех* $M \in J$, *т. е.*

$$R \cap R' = \bigcap_{M \in J} \{\Pi(M^c)\}''.$$

Доказательство. Допустим, что $A \in \bigcap_{M \in J} \{\Pi(M^c)\}''$. Ясно, что $A \in R$. Так как $\mathfrak{A}$ — РГФ-алгебра и Π непрерывно по норме, то $\{\Pi(\mathfrak{A})\}$ — замыкание по норме возрастающей последовательности факторов $\{\Pi(M_i)\}$, где $M_i \in J$ при $i = 1, 2, \ldots$. Поэтому ввиду $A \in \{\Pi(M^c)\}'' \subset \{\Pi(M)\}'$ для всех $M \in J$ имеем $A \in \{\Pi(\mathfrak{A})\}' = R'$, и, следовательно, A принадлежит центру R.

Обратно, пусть $A \in R \cap R'$. Тогда $A \in \{\Pi(\mathfrak{A})\}''$ и для каждого $M \in J$ имеем $A \in \{\Pi(M)\}'$. Из леммы 2.3 вытекает $A \in \{\Pi(M^c)\}''$ для каждого $M \in J$. Поэтому $A \in \bigcap_{M \in J} \{\Pi(M^c)\}''$. Это завершает доказательство леммы.

Теорема 2.5. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — РГФ-*алгебра и* $\{M_i, i = 1, 2, \ldots\}$ — *возрастающая последовательность факторов типа* I_{n_i}, *которые порождают* $\mathfrak{A}$. *Пусть* ω — *состояние* $\mathfrak{A}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Состояние* ω *индуцирует факторпредставление* $\mathfrak{A}$.

(ii) *Для каждого* $x \in \mathfrak{A}$ *существует такое натуральное* r, *зависящее только от* x, *что* $|\omega(xy) - \omega(x)\omega(y)| \leqslant \|y\|$ *для всех* $y \in M_r^c$.

(iii) *Для каждого* $x \in \mathfrak{A}$ *существует фактор* $M \subset \mathfrak{A}$ *типа* I_m, *такой, что* $|\omega(xy) - \omega(x)\omega(y)| \leqslant \|y\|$ *для всех* $y \in M^c$.

Доказательство. Мы докажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть Π — циклическое $*$-представление $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве H с циклическим вектором $f_0 \subset H$, такое, что $\omega(x) = (f_0, \Pi(x) f_0)$ для всех $x \in \mathfrak{A}$. Пусть $R = \{\Pi(\mathfrak{A})\}''$.

Чтобы доказать (i)$\Rightarrow$(ii), предположим, что условие (ii) не выполнено. Тогда существует $x \in \mathfrak{A}$, такое, что для каждого положительного целого i существует $y_i \in M_i^c$, для которого $|\omega(xy_i) - \omega(x)\omega(y_i)| > \|y_i\|$. Можно считать, что $\|y_i\| = 1$ для $i = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$|(f_0, \Pi(xy_i) f_0) - (f_0, \Pi(x) f_0)(f_0, \Pi(y_i) f_0)| = \\ = |(g, \Pi(y_i) f_0)| > \|y_i\| = 1,$$

где

$$g = (\Pi(x)^* - (f_0, \Pi(x)^* f_0)) f_0.$$

Определим последовательность слабозамкнутых множеств $\{Q_i\}$ следующим образом:

$$Q_i = \{A \in \{\Pi(M_i^c)\}''; \quad |(g, Af_0)| \geqslant 1, \ \|A\| \leqslant 1\}.$$

Так как $\Pi(y_i) \in Q_i$, то Q_i — непустое множество для каждого $i = 1, 2, \ldots$. Поскольку $M_i^c \subset M_j^c$ при $i \geqslant j$, то $Q_i \subset Q_j$ при $i \geqslant j$. Поэтому пересечение любого конечного набора множеств $\{Q_i\}$ непусто. Так как единичный шар $\mathfrak{B}(H)$ компактен в слабой операторной топологии ([1], гл. IV, § 2, сл. 3), то существует оператор $A \in Q_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Покажем, что A принадлежит центру R.

Ясно, что $A \in R$. Далее, $A \in \{\Pi(M_i^c)\}'' \subset \{\Pi(M_i)\}'$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$. Так как $\Pi(\mathfrak{A})$ порождено кольцами $\{\Pi(M_i)\}$ при $i = 1, 2, \ldots$, то

$$A \in \Pi(\mathfrak{A})' \subset R'.$$

Поэтому A принадлежит центру R, причем A не является оператором, кратным единице, так как $|(g, Af_0)| \geqslant 1$ и $(g, f_0) = 0$. Следовательно, R не фактор, и тем самым мы доказали, что (i)$\Rightarrow$(ii). (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидно.

Чтобы доказать (iii)$\Rightarrow$(i), предположим, что ω удовлетворяет условию (iii). Пусть A принадлежит центру R. Мы докажем, что A кратно единичному оператору. Так как ω удовлетворяет условию (iii), то для каждого $x \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ существует фактор M типа $\mathrm{I}_m (M \subset \mathfrak{A})$, для которого $|\omega(\varepsilon^{-1}xy) - \omega(\varepsilon^{-1}x)\omega(y)| \leqslant \|y\|$ для всех $y \in M^c$. Поэтому

$$|(f_0, \Pi(x)\Pi(y) f_0) - (f_0, \Pi(x) f_0)(f_0, \Pi(y) f_0)| < \varepsilon \|y\| = \\ = \varepsilon \|\Pi(y)\| \text{ для всех } y \in M^c. \tag{a}$$

Последнее равенство вытекает из того факта, что Π — *точное представление* $\mathfrak{A}$.

Так как A принадлежит центру R, то из леммы 2.4 следует, что $A \in \{\Pi(M^c)\}''$. Из теоремы Капланского [7] следует, что единичный шар $\{\Pi(M^c)\}$ сильно плотен в единичном шаре $\{\Pi(M^c)\}''$. Поэтому для каждого $\delta > 0$ существует $y \in M^c$, такое, что $\|y\| \leqslant \|A\|$ и

$$|(f_0, \Pi(x)(A - \Pi(y)) f_0)| < \delta/2 \tag{b}$$

и

$$|(f_0, \Pi(x) f_0) \cdot (f_0, (A - \Pi(y)) f_0)| < \delta/2. \tag{c}$$

Комбинируя неравенства (a), (b) и (c), находим

$$|(f_0, \Pi(x) Af_0) - (f_0, \Pi(x) f_0)(f_0, Af_0)| < \varepsilon \|A\| + \delta.$$

Так как $x \in \mathfrak{A}$ произвольное, а ε и δ — сколь угодно малые положительные числа, то

$(f_0, \Pi(x)(A-\alpha I) f_0)=0$ для всех $x \in \mathfrak{A}$, где $\alpha=(f_0, Af_0)$. Так как $A \in R'$, то

$$(f_0, \Pi(x^*y)(A-\alpha I) f_0)=(\Pi(x) f_0, (A-\alpha I)\Pi(y) f_0)=0$$

для всех $x, y \in \mathfrak{A}$. Поскольку $[\Pi(\mathfrak{A}) f_0]=H$, то $A=\alpha I$. Поэтому центр R состоит из операторов, кратных единичному оператору. Следовательно, R — фактор. Это завершает доказательство теоремы.

Состояния, удовлетворяющие условиям (ii) и (iii) теоремы 2.5, мы будем называть состояниями, которые *асимптотически можно представить в виде произведения*. Заметим, что, как следует из теоремы 2.5, если состояние ω удовлетворяет условию (ii) для возрастающей последовательности факторов $\{M_i, i=1, 2, \ldots\}$, которые порождают $\mathfrak{A}$, то ω удовлетворяет условию (ii) для любой другой возрастающей последовательности факторов $\{N_i, i=1, 2, \ldots\}$, порождающих $\mathfrak{A}$. Докажем одно простое следствие из теоремы 2.5.

Следствие 2.6. *Пусть* Π — $*$-*представление* РГФ-*алгебры* $\mathfrak{A}$ *в гильбертовом пространстве* H. *Тогда* Π — *факторпредставление* $\mathfrak{A}$ *в том и только том случае, когда каждое векторное состояние* Π *асимптотически можно представить в виде произведения.*

Доказательство. Пусть Π — факторпредставление $\mathfrak{A}$. Так как каждое циклическое подпредставление Π — снова факторпредставление $\mathfrak{A}$, то из теоремы 2.5 следует, что каждое *векторное состояние* Π *асимптотически разлагается в произведение.*

Обратно, пусть *каждое векторное состояние* Π *асимптотически представляется в виде произведения*. Тогда из теоремы 2.5 следует, что каждое циклическое подпредставление Π есть факторпредставление. Пусть A принадлежит центру $\{\Pi(\mathfrak{A})\}''$. Тогда для каждого $f \in H$, $f \neq 0$ сужение A на $\{\Pi(\mathfrak{A}) f\}$ есть скалярный оператор. Так как $f \in H$ произвольно, то сам оператор A скалярный. Следовательно, центр $\{\Pi(\mathfrak{A})\}''$ состоит только из операторов, кратных единичному оператору. Поэтому Π — факторпредставление $\mathfrak{A}$. Это завершает доказательство следствия.

Теперь мы выведем необходимое и достаточное условие для того, чтобы два факторпредставления РГФ-алгебры были квазиэквивалентны. Введем обозначения. Пусть ω — состояние C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, M — подалгебра $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\omega | M$ сужение состояния ω на M. Ясно, что $\omega | M$ — состояние M. Норма разности сужений двух состояний $\omega_1 | M$ и $\omega_2 | M$ есть

$$\|\omega_1 | M-\omega_2 | M\|=\operatorname{Sup}\{|\omega_1(x)-\omega_2(x)|,\ x \in M,\ \|x\|=1\} \leqslant \|\omega_1-\omega_2\|.$$

Если существует последовательность факторов $\{M_i\}$ типов I_{n_i}, для которой $\|\omega_1 | M_i^c-\omega_2 | M_i^c\| \to 0$ при $i \to \infty$, то состояния ω_1 и ω_2 мы будем называть *асимптотически равными*. Мы покажем в следующей теореме, что факторсостояния РГФ-алгебры квазиэквивалентны тогда и только тогда, когда они асимптотически равны.

Теорема 2.7. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — РГФ-*алгебра и* $\{M_i, i=1, 2, \ldots\}$ *возрастающая последовательность факторов типа* I_{n_i}, *которые порождают* $\mathfrak{A}$. *Пусть* Π_1 *и* Π_2 — *два факторпредставления* $\mathfrak{A}$, *а* ω_1 *и* ω_2 — *векторные состояния представлений* Π_1 *и* Π_2 *соответственно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Π_1 и Π_2 *квазиэквивалентны.*

(ii) *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такое натуральное* i, *для которого*

$$\| \omega_1 | M_i^c - \omega_2 | M_i^c \| < \varepsilon.$$

(iii) *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует фактор* M *типа* I_m $M \subset \mathfrak{A}$, *для которого*

$$\| \omega_1 | M^c - \omega_2 | M^c \| < \varepsilon.$$

(iv) *Существует фактор* N *типа* I_n, *для которого*

$$\| \omega_1 | N^c - \omega_2 | N^c \| < 2.$$

Доказательство. Мы докажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). Пусть φ_1 и φ_2 — циклические $*$-представления $\mathfrak{A}$ в гильбертовых пространствах H_1 и H_2, индуцированные состояниями ω_1 и ω_2. Пусть $f_1 \in H_1$ и $f_2 \in H_2$ — циклические векторы этих представлений, для которых $\omega_1(x) = (f_1, \varphi_1(x) f_1)$ и $\omega_2(x) = (f_2, \varphi_2(x) f_2)$ при $x \in \mathfrak{A}$. Так как Π_1 и Π_2 — факторпредставления $\mathfrak{A}$, то из теоремы 2.1 следует, что $\varphi_1 \underset{q}{\sim} \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $\Pi_1 \underset{q}{\sim} \Pi_2$.

Пусть $H = H_1 \oplus H_2$ — прямая сумма H_1 и H_2, и пусть φ: $\varphi(x) = \varphi_1(x) \oplus \varphi_2(x)$ — прямая сумма представлений φ_1 и φ_2. Чтобы доказать (i) $\Rightarrow$ (ii), предположим, что $\Pi_1 \underset{q}{\sim} \Pi_2$. Тогда $\varphi_1 \underset{q}{\sim} \varphi_2$. По определению существует $*$-изоморфизм α кольца $\{\varphi(\mathfrak{A}_1)\}''$ на кольцо $\{\varphi(\mathfrak{A}_2)\}''$, для которого $\alpha(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x)$ при всех $x \in \mathfrak{A}$. Пусть R — слабозамкнутое кольцо, порожденное $\varphi(\mathfrak{A})$ в $H = H_1 \oplus H_2$. Докажем, что R — фактор. Так как α ультраслабо непрерывно и R — ультраслабое замыкание $\{\varphi(\mathfrak{A})\}$, то ясно, что каждый оператор $A \in R$ имеет вид $A = A_1 \oplus \alpha(A_1)$, где $A_1 \in \{\varphi(\mathfrak{A})\}''$, и поэтому

$$\alpha(A_1) \in \{\varphi_2(\mathfrak{A})\}''.$$

Пусть A принадлежит центру R. Тогда A_1 должно принадлежать центру $\{\varphi_1(\mathfrak{A})\}''$. Так как $\{\varphi_1(\mathfrak{A})\}''$ — фактор, то A_1 должно быть кратно единичному оператору в H_1, поэтому A — оператор, кратный единичному оператору в H. Следовательно, R — фактор и φ — факторпредставление $\mathfrak{A}$.

Пусть $f = \sqrt{1/2}\,(f_1 + f_2) \in H$, а $\omega(x)$ — состояние:

$$\omega(x) = (f, \varphi(x) f) = 1/2\,(f_1, \varphi_1(x) f_1) + 1/2\,(f_2, \varphi_2(x) f_2) = \\ = 1/2\,\omega_1(x) + 1/2\,\omega_2(x) \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{A}.$$

Предположим, что $\omega_1 \neq \omega_2$; при $\omega_1 = \omega_2$ утверждение (ii) теоремы, очевидно, выполнено. Тогда существует $x \in \mathfrak{A}$, для которого $\omega_1(x) - \omega_2(x) = 1$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как φ_1, φ_2 и φ — факторпредставления $\mathfrak{A}$, то из следствия 2.6 находим, что состояния ω_1, ω_2 и ω *можно асимптотически представить в виде произведения*. Поэтому существуют натуральные числа i_1, i_2 и i_3, для которых

$$| \omega_1(xy) - \omega_1(x)\,\omega_1(y) | < \varepsilon \frac{1}{9} \| y \| \qquad \text{для всех } y \in M_{i_1}^c,$$

$$| \omega_2(xy) - \omega_2(x)\,\omega_2(y) | < \varepsilon \frac{1}{9} \| y \| \qquad \text{для всех } y \in M_{i_2}^c,$$

$$| \omega(xy) - \omega(x)\,\omega(y) | < \varepsilon \frac{1}{9} \| y \| \qquad \text{для всех } y \in M_{i_3}^c.$$

Так как $\omega = 1/2\,\omega_1 + 1/2\,\omega_2$ и так как $\{M_i\}$ — возрастающая последовательность факторов, то мы приходим к неравенству

$$|(\omega_1(x) - \omega_2(x))(\omega_1(y) - \omega_2(y))| = |\omega_1(y) - \omega_2(y)| \leqslant \frac{8}{9}\varepsilon\|y\|$$

$$\text{для всех } y \in M_i^c, \text{ где } i = \max(i_1, i_2, i_3).$$

Поэтому имеем $\|\omega_1|M_i^c - \omega_2|M_i^c\| < \varepsilon$. Следовательно, мы доказали, что (i)$\Rightarrow$(ii).

Ясно, что (ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv).

Докажем, что (iv)$\Rightarrow$(i). Предположим, что Π_1 и Π_2 не квазиэквивалентны. Пусть R — неймановское кольцо, порожденное $\varphi(\mathfrak{A})$ на $H = H_1 \oplus H_2$, и пусть E — эрмитов проектор на $H_1 \subset H$. Покажем, что $C = I - 2E$ принадлежит центру R. Так как E коммутирует с $\varphi(x)$ для $x \in \mathfrak{A}$, имеем $E \in R'$. Поскольку Π_1 и Π_2 не квазиэквивалентны, то φ_1 и φ_2 также не квазиэквивалентны. Поэтому из [3, следствие 5.3.6, стр. 106] вытекает, что факторпредставления *дизъюнктны*. Это означает, что нулевой оператор есть единственный замкнутый оператор из H_1 в H_2, для которого $A\varphi_1(x)$-$\varphi_2(x)A$ для всех $x \in \mathfrak{A}$. Следовательно, каждый оператор $B \in R'$ оставляет H_1 инвариантным (т. е. $BH_1 \subset H_1$). Поэтому $E \in R'' = R$ и $C = I - 2F$ принадлежит центру R.

Тогда из леммы 2.4 следует, что для любого фактора $N \in \mathfrak{A}$ типа I_n, где $n = 1, 2, \ldots$, имеем $C \in \{\varphi(N^c)\}''$. Из теоремы Капланского [7] следует, что единичный шар $\{\varphi(N^c)\}$ сильно плотен в единичном шаре $\{\varphi(N^c)\}''$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует $x \in N^c$, для которого $\|x\| \leqslant \|C\| = 1$ и

$$|(f_1, (\varphi(x) - C)f_1)| = |\omega_1(x) + 1| < \varepsilon/2,$$
$$|(f_2, (\varphi(x) - C)f_2)| = |\omega_2(x) - 1| < \varepsilon/2.$$

Следовательно, $|\omega_1(x) - \omega_2(x)| > 2 - \varepsilon$ для некоторого $x \in N^c$ и $\|x\| \leqslant 1$. Так как N и $\varepsilon > 0$ произвольны, то получаем, что для любого фактора $N \subset \mathfrak{A}$ типа I_n, $n = 1. 2, \ldots$, имеем $\|\omega_1|N^c - \omega_2|N^c\| \geqslant 2$. Но это противоречит утверждению (iv) теоремы. Следовательно, из (iv) вытекает (i). Этим завершается доказательство теоремы.

Так как факторпредставление РГФ-алгебры характеризуется с точностью до квазиэквивалентности любой ее матрицей плотности состояний (см. обсуждение после теоремы 2.1), то теорема 2.7 остается справедливой, если состояния ω_1 и ω_2 (в утверждении теоремы) являются произвольными матрицами плотности состояний представлений Π_1 и Π_2 соответственно. Заметим также, что теорема 2.7 может быть использована, чтобы определить, когда два неприводимых представления РГФ-алгебры унитарно эквивалентны, так как неприводимые представления квазиэквивалентны тогда и только тогда, когда они унитарно эквивалентны.

§ 3. Изоморфные гиперфинитные кольца

В этом разделе мы изучаем вопрос: при каких условиях гиперфинитные кольца одного и того же класса изоморфны? Соответствующий вопрос в терминах представлений РГФ-алгебр состоит в следующем: при каких условиях представления РГФ-алгебр алгебраически эквивалентны? Мы покажем (теорема 3.7), что два представления Π_1 и Π_2 РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$ в сепарабельных гильбертовых пространствах алгебраически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $*$-автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ (т. е. $*$-изоморфизм $\mathfrak{A}$ на себя),

при котором представления $x \to \Pi_1(x)$ и $x \to \Pi_2(\varphi(x))$ квазиэквивалентны. Доказательство этого результата несколько утомительно, поскольку мы показываем, как явно строить автоморфизм φ. Читатель найдет изложенную последовательность лемм более осмысленной, если он начнет с теоремы 3.7 и затем вернется обратно к началу этого раздела.

Из теоремы 3.7 будут получены два следствия. Первое утверждает, что группа $*$-автоморфизмов РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$ действует транзитивно на множестве чистых состояний $\mathfrak{A}$. Во втором следствии мы приведем необходимое и достаточное условие в терминах состояний РГФ-алгебр для того, чтобы два гиперфинитных фактора были изоморфны.

Лемма 3.1 (Кадисон, Глимм). *Пусть $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра операторов, содержащая единичный оператор, в гильбертовом пространстве H. Пусть $R = \{\mathfrak{A}\}''$. Тогда каждый унитарный оператор $U \in R$ можно аппроксимировать сколь угодно точно в сильной операторной топологии унитарными операторами из $\mathfrak{A}$, т. е. для любого унитарного оператора $U \in R$ и любого конечного множества векторов $\{f_i \in H;\ i=1, \ldots, n\}$ существует унитарный оператор $V \in \mathfrak{A}$, для которого $\|(U-V)f_i\| \leqslant 1$ при $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство (более сильный результат см. [6, теорема 2]).

Пусть $U \in R$ — унитарный оператор. Из хорошо известной спектральной теории унитарных операторов мы знаем, что U может быть представлен в виде $U = \exp(i\pi A)$, где $A \in R$ — эрмитовый оператор, норма которого меньше единицы, т. е. $\|A\| \leqslant 1$. Отображение $A \to \exp(i\pi A)$ сильно непрерывно на единичном шаре из $\mathfrak{B}(H)$. Из теоремы Капланского о плотности [7] следует, что единичный шар эрмитовых операторов в $\mathfrak{A}$ сильно плотен в единичном шаре эрмитовых операторов в $R = \{\mathfrak{A}\}''$. Поэтому $A \to \exp(i\pi A)$ можно аппроксимировать сколь угодно точно в сильной топологии унитарными операторами из $\mathfrak{A}$ вида $V = \exp(i\pi B)$, где $B \in \mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — изоморфные РГФ-алгебры, и пусть $M \subset \mathfrak{A}_1$ и $N \subset \mathfrak{A}_2$ — факторы типа I_r. Тогда подалгебры $M^c \subset \mathfrak{A}_1$ и $N^c \subset \mathfrak{A}_2$ — $*$-изоморфные РГФ-алгебры.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, M и N — C^*-алгебры, о которых идет речь в формулировке леммы. Из результатов Глимма [4, доказательство, теорема 1.13] следует, что существует возрастающая последовательность факторов $\{M_i\}$ типа I_{m_i}, которая порождает $\mathfrak{A}_1$ и обладает свойством $M_i \supset M$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$. Пусть $P_i = M_i \cap M^c$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$. Так как $M \subset M_i$ и так как M и M_i — факторы типа I_r и I_{m_i}, то P_i — фактор типа I_{p_i}, где $p_i = m_i/r$. Пусть $\mathfrak{B}$ — замыкание по норме увеличивающейся последовательности факторов $\{P_i\}$. Ясно, что $\mathfrak{B}$ — РГФ-алгебра класса (p_i). Покажем, что $\mathfrak{B} = M^c$. Так как P_i с M^c $(i = 1, 2, \ldots)$, то $\mathfrak{B} \subset M^c$. Докажем обратное включение. Поскольку $\mathfrak{B}$ замкнута по норме, то достаточно доказать, что для каждого $x \in M^c$ и $\varepsilon > 0$ существует $y \in \mathfrak{B}$, для которого $\|x - y\| < \varepsilon$.

Пусть $x \in M^c$ и $\varepsilon > 0$. Так как факторы $\{M_i\}$ порождают $\mathfrak{A}_1$, то существует целое число $i > 0$ и $z \in M_i$, такие, что $\|x - z\| < \varepsilon/r$.

Пусть $\{e_{ij};\ i, j=1, \ldots, r\}$ — семейство матричных единиц, порождающих M. Пусть $y=\sum_{i=1}^{r} e_{i1} z e_{1i}$. Так как $M \subset M_i$, то по построению $y \in M_i$ и $y \in M^c$. Поэтому $y \in M_i \cap M^c \subset B$ и $\|x-y\|<\varepsilon$, поскольку

$$\|x-y\|=\left\|\sum_{i=1}^{r} e_{i1}(x-z) e_{1i}\right\|=\sum_{i=1}^{r}\|x-z\|<\varepsilon.$$

Следовательно, $\mathfrak{B}=M^c$ и M^c — РГФ-алгебра класса (p_i).

Аналогично существует возрастающая последовательность факторов $\{N_i\}$ типа I_{n_i}, которые порождают $\mathfrak{A}_2$ и обладают свойством $N_i \supset N$ $(i=1, 2, \ldots)$. Предыдущие соображения гарантируют нам, что N^c — РГФ-алгебра класса $\{q_i\}$, где $q_i=n_i/r$.

Так как $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — изоморфные РГФ-алгебры, причем $m_i=p_i r$ и $n_i=q_i r$, то из классификации Глимма РГФ-алгебр следует, что M^c и N^c $*$-изоморфны. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3. *Пусть R — неймановское кольцо операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $M \subset R$ и $N \subset R$ — факторы типа I_n. Тогда существует унитарный оператор $U \in R$, такой, что $*$-изоморфизм $A \to UAU^{-1}$ отображает M на N, т. е. $UMU^{-1}=N$.*

Доказательство. Пусть $\{E_{ij}, i, j=1, \ldots, n\}$ и $\{F_{ij}, i, j=1, \ldots, n\}$ — семейство матричных единиц, которые порождают M и N соответственно. Для доказательства леммы достаточно доказать, что существует частичная изометрия $V \in R$ с областью определения $\{E_{11}H\}$ и областью значений в $\{F_{11}H\}$ (т. е. $V^*V=E_{11}$, $VV^*=F_{11}VE_{11}=F_{11}V=V$). Тогда требуемый унитарный оператор U может быть записан в виде

$$U=\sum_{i=1}^{n} F_{i1} V E_{1i}.$$

Непосредственный подсчет с использованием свойств V и свойства семейства матричных единиц показывает, что U — действительно унитарный оператор и что он удовлетворяет соотношению $UE_{ij}U^{-1}=F_{ij}$ для $i, j=1, \ldots, n$, и поэтому мы имеем $UMU^{-1}=N$.

Чтобы доказать существование частично изометрического оператора V с искомыми свойствами, проделаем следующее. Пусть $\Delta_R(E)$ — произвольная весовая функция (относительно R), как определил ее фон Нейман [13, § 21, определение 7]. $\Delta_R(E)$ есть числовая функция, значения которой принадлежат расширенному множеству действительных чисел, определенная для всех эрмитовых проекторов $E \in R$; функция $\Delta_R(E)$ обладает такими свойствами:

(i) $0 \leqslant \Delta_R(E) \leqslant +\infty$ для всех $E \in R$, $\Delta_R(E)=0$ тогда и только тогда, когда $E=0$.

(ii) если $\{E_i;\ i=1, \ldots, n\}$ — взаимно ортогональные проекторы из R, то $\Delta_R(E_1+\cdots+E_n)=\Delta_R(E_1)+\cdots+\Delta_R(E_n)$.

(iii) Если $U \in R$ — унитарный оператор, то $\Delta_R(UEU^{-1})=\Delta_R(E)$ для всех $E \in R$.

Покажем, что для любого проектора E из центра R $\Delta_R(EE_{11})=\Delta_R(EF_{11})$. Пусть $P_i=EE_{ii}$ и $Q_i=EF_{ii}$ для $i=1, \ldots, n$. Тогда

$P_iP_j=0$ и $Q_iQ_j=0$ для $i\neq j$, а так как $\sum_{i=1}^{n} P_i=\sum_{i=1}^{n} Q_i=E$, то из условия (ii) имеем

$$\Delta_R(E)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_R(P_i)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_R(Q_i). \qquad \text{(a)}$$

Пусть $S(i)=I-E_{11}-E_{ii}+E_{i1}+E_{1i}$ и $V(i)=I-F_{11}-F_{ii}+$ $+F_{i1}+F_{1i}$ для $i=1,\dots,n$. Непосредственный подсчет показывает, что $S(i)$ и $V(i)$ — унитарные операторы, обладающие свойствами: $S(i)P_1S(i)^{-1}=P_i$ и $V(i)Q_1V^{-1}(i)=Q_i$ для $i=1,\dots,n$. Так как $S(i)$, $V(i)\in R$, то из условия (iii) $\Delta_R(P_1)=\Delta_R(P_i)$ и $\Delta_R(Q_1)=\Delta_R(Q_i)$ для $i=1,\dots,n$. Поэтому мы имеем из уравнения (a) соотношение $\Delta_R(EF_{11})=\frac{1}{n}\Delta_R(E)$. Так как это соотношение выполняется для произвольной весовой функции $\Delta_R(E)$ и для произвольного центрального проектора E, то из [13, § 24] следует, что существует частично изометрический оператор V с областью определения $\{E_{11}H\}$ и областью значений $\{F_{11}H\}$. Этим доказательство леммы завершено.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — $*$-изоморфные* РГФ-*алгебры операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Более того, пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ порождают одно и то же неймановское кольцо R, т. е. $R=\mathfrak{A}_1''=\mathfrak{A}_2''$. Пусть $M\subset\mathfrak{A}_1$ — фактор типа* I_n, *$(f_i,\ i=1,\dots,n)$ — произвольное конечное множество векторов из H и $\varepsilon>0$ — произвольное число. Тогда существует фактор $N\subset\mathfrak{A}_2$ типа I_n и унитарный оператор $U\in R$, для которых*

(i) $UMU^{-1}=N\subset\mathfrak{A}_2$.

(ii) $\|Uf_i-f_i\|<\varepsilon$ *для* $i=1,\dots,n$.

Доказательство. Так как $M\subset\mathfrak{A}_1$ и так как $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ $*$-изоморфны, существует фактор $N_1\subset\mathfrak{A}_2$ типа I_n. Далее, так как $R=\mathfrak{A}_1''=\mathfrak{A}_2''$, то $M\subset R$ и $N_1\subset R$. Следовательно, из леммы 3.3 вытекает, что существует унитарный оператор $V\in R$, для которого $VMV^{-1}=N_1$. Поскольку $V^{-1}\in R=\mathfrak{A}_2''$, то из леммы 3.1 следует, что существует унитарный оператор S, принадлежащий $\mathfrak{A}_2$, для которого $\|(S-V^{-1})\times(Vf_i)\|<\varepsilon$ при $i=1,\dots,n$. Пусть $N=SN_1S^{-1}$. Так как $S\in\mathfrak{A}_2$ и $N_1\in\mathfrak{A}_2$, то $N\in\mathfrak{A}_2$. Пусть $U=SV$. Ясно, что $U\in R$ — унитарный оператор. Далее имеем

$$UMU^{-1}=SVMV^{-1}S^{-1}=SN_1S^{-1}=N,$$

$$\|Uf_i-f_i\|=\|(SV-I)f_i\|=\|(S-V^{-1})Vf_i\|<\varepsilon \quad (i=1,\dots,n).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $M\subset\mathfrak{A}_1$, $N\subset\mathfrak{A}_2$ и $U\in R$ удовлетворяют предположениям и утверждению леммы* 3.4, *за исключением условия* (ii). *Пусть M_1 — фактор типа I_m, для которого $M\subset M_1\subset\mathfrak{A}_1$. Предположим, что задано некоторое число $\varepsilon>0$ и $\{f_i,\ i=1,\dots,n\}$ — произвольное конечное множество векторов в H. Тогда существует фактор N_1 типа I_m и унитарный оператор $U_1\in R$, для которых выполнены следующие условия:*

(i) $N\subset N_1\subset\mathfrak{A}_2$,

(ii) $U_1M_1U_1^{-1}=N_1$,

(iii) $U_1AU_1^{-1}=UAU^{-1}$ *для всех A из M,*

(iv) $\|U_1U^{-1}f_i-f_i\|<\varepsilon$, $i=1,\dots,n$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}=U\mathfrak{A}_1U^{-1}$, $P=UMU^{-1}$ и $P_1=UM_1U^{-1}$. Ясно, что $\mathfrak{B}$ — РГФ-алгебра, которая изоморфна $\mathfrak{A}_1$ и поэтому $*$-изоморфна $\mathfrak{A}_2$. Так как $U\in R=\mathfrak{A}_1''$, то мы имеем $\mathfrak{B}''=U\mathfrak{A}_1''U^{-1}=\mathfrak{A}_1''=\mathfrak{A}_2''$. Пусть P^c — коммутант P относительно $\mathfrak{B}$ и N^c — коммутант N относительно $\mathfrak{A}_2$. Заметим, что, хотя $P=N$, $P^c\neq N^c$. Из леммы 3.2 следует, что P^c и N^c — $*$-изоморфные РГФ-алгебры. Из леммы 2.3 вытекает, что $\{P^c\}''=P'\cap R=N'\cap R=\{N^c\}''$. Следовательно, P^c и N^c порождают одинаковые нейманoвские кольца.

Пусть $Q_1=P_1\cap P^c$. Так как $P_1\supset P$ и так как P и P_1 — факторы типов I_n и I_m, то Q_1 — фактор типа I_q, где $q=m/n$. Заметим, что P_1 является наименьшей C^*-алгеброй, содержащей P и Q_1. Поскольку $Q_1\subset P^c$, а P^c и N^c — изоморфные РГФ-алгебры, причем $\{P^c\}''=\{N^c\}''$, то из леммы 3.4 вытекает, что существует фактор Q_2 типа I_q ($Q_2\subset N^c$) и унитарный оператор $V\in\{P^c\}''=\{N^c\}''$, для которого $VQ_1V^{-1}=Q_2$ и $\|Vf_i-f_i\|<\varepsilon$ $(i=1,\dots,n)$.

Пусть $U_1=VU$, и пусть N_1 — наименьшая C^*-алгебра, содержащая N и Q_2. Докажем, что U_1 и N_1 удовлетворяют условиям леммы. Так как $N\subset\mathfrak{A}_2$ и $Q_2\subset\mathfrak{A}_2$ — взаимно коммутирующие факторы типов I_n и I_q, то N_1 — фактор типа I_m и $N\subset N_1\subset\mathfrak{A}_2$. Следовательно, условие (i) леммы выполнено. Для $A\in M$ $UAU^{-1}\in P$, а поскольку $V\in\{P^c\}''\subset P'$, то мы имеем $U_1AU_1^{-1}=VUAU^{-1}V^{-1}=UAU^{-1}$ для $A\in M$. Следовательно, условие (iii) также выполнено. Далее, мы имеем $U_1M_1U_1^{-1}=VUM_1U^{-1}V^{-1}=VP_1V^{-1}$. Так как P — наименьшая C^*-алгебра, содержащая P и Q_1, то VP_1V^{-1} — наименьшая C^*-алгебра, содержащая $N=P=VPV^{-1}$ и $Q_2=VQ_1V^{-1}$, следовательно, $U_1M_1U_1^{-1}=N_1$ и условие (ii) выполнено. Легко видеть, что условие (iv) также выполнено, потому что $\|U_1U^{-1}f_i-f_i\|=\|Vf_i-f_i\|<\varepsilon$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — $*$-изоморфные* РГФ-*алгебры операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Далее предположим, что $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ порождают одно и то же нейманoвское кольцо R, т. е. $R=\mathfrak{A}_1''=\mathfrak{A}_2''$. Тогда существует унитарный оператор $U\in R$, такой, что при $A\in\mathfrak{A}_1$ отображение $A\to UAU^{-1}$ есть $*$-изоморфизм $\mathfrak{A}_1$ на $\mathfrak{A}_2$, т. е. $U\mathfrak{A}_1U^{-1}=\mathfrak{A}_2$.*

Доказательство. Доказательство состоит в построении унитарного оператора U. Пусть множества $\{A_i;\ i=1,2,\dots\}$ и $\{B_i;\ i=1,2,\dots\}$ — счетные плотные подмножества единичных шаров в $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ соответственно. Такие множества существуют, так как $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ сепарабельны по норме. Пусть, далее, $\{f_i,\ i=1,2,\dots\}$ — счетное всюду плотное подмножество в единичном шаре H. Такое множество существует, так как H сепарабельно.

Построим возрастающую последовательность факторов $\{M_i\subset\mathfrak{A}_1\ i=1,2,\dots\}$ и $\{N_i\subset\mathfrak{A}_2,\ i=1,2,\dots\}$ и последовательность унитарных операторов $\{U_i\in R,\ c=1,2,\dots\}$ со следующими свойствами:

(i) Для каждого положительного целого числа r существуют операторы $C_i\in M_r$ и $D_i\in N_r$, для которых $\|A_i-C_i\|\leqslant 2^{-r+1}$ и $\|B_i-D_i\|\leqslant 2^{-r+1}$ при $i=1,\dots,r$.

(ii) Для каждого положительного целого r $U_rM_iU_r^{-1}=N_i$ при $1\leqslant i\leqslant r$, и если $r>1$, то $U_rAU_r^{-1}=U_{r-1}AU_{r-1}^{-1}$ для всех $A\in M_{r-1}$.

(iii) Для каждого целого положительного r $\|(U_{r+1}-U_r)f_i\|<2^{-r}$ при $i=1,\dots,r$.

При $r=1$ положим $M_1=N_1=\{\alpha I\}$ и $U_1=I$. Тогда свойства (i), (ii) и (iii), очевидно, выполняются. Пусть M_i, N_i и U_i выбраны для $i=1,\dots,r$ таким образом, чтобы условия (i), (ii) и (iii) были выполнены. Построим M_{r+1}, N_{r+1} и U_{r+1}, удовлетворяющие этим условиям.

Пусть $M\supset M_r$ — фактор, содержащийся в $\mathfrak{A}_1$, для которого существуют $C_i\in M$, такие, что $\|A_i-C_i\|<2^{-r}$ для $i=1,\dots,r+1$.

Из статьи Глимма [4, теорема 1.13] следует, что подобный фактор $M\subset\mathfrak{A}_1$ существует. Из леммы 3.5 вытекает, что существует N, для которого $N_r\subset N\subset\mathfrak{A}_2$, и унитарный оператор $V_1\in R$, такой, что

$$V_1MV_1^{-1}=N,\ V_1AV_1^{-1}=U_rAU_r^{-1}\quad\text{для всех}\quad A\in M_r; \tag{a}$$

$$\|(V_1U_r^{-1}-I)(U_rf_i)\|=\|(V_1-U_r)f_i\|<2^{-(r+1)}\quad(i=1,\dots,r+1). \tag{b}$$

Пусть $N_{r+1}\supset N$ — фактор в $\mathfrak{A}_2$, такой, что существуют $D_i\in N_{r+1}$, причем $\|B_i-D_i\|<2^{-r}$ $(i=1,\dots,r+1)$. Заметим, что $M=V_1^{-1}NV_1$. Тогда из леммы 3.5 вытекает, что существует фактор M_{r+1}, для которого $M_r\subset M\subset M_{r+1}\subset\mathfrak{A}_1$, и унитарный оператор $V_2\in R$, обладающий свойствами

$$V_2N_{r+1}V_2^{-1}=M_{r+1},\ V_2AV_2^{-1}=V_1^{-1}AV\quad\text{для всех}\quad A\in N, \tag{c}$$

$$\|(V_2V_1-I)f_i\|<2^{-(r+1)}\quad(i=1,\dots,r+1).$$

Пусть $U_{r+1}=V_2^{-1}$. Тогда $U_{r+1}\in R$ и

$$\|(U_{r+1}-V_1)f_i\|=\|V_2(V_2^{-1}-V_1)f_i\|=\|(V_2V_1-I)f_i\|<2^{-(r+1)} \tag{d}$$

при $i=1,\dots,r+1$.

Из построения U_{r+1} вытекает

$$U_{r+1}M_{r+1}U_{r+1}^{-1}=V_2^{-1}M_{r+1}V_2=N_{r+1}.$$

Комбинируя соотношения (a) и (c), получаем $U_{r+1}AU_{r+1}^{-1}=V_2^{-1}AV_2=U_rAU_r^{-1}$ для $A\in M_r$. Следовательно, M_{r+1}, N_{r+1} и U_{r+1} удовлетворяют условию (ii). Факторы $M_{r+1}\supset M$ и N_{r+1} удовлетворяют условию (i) по построению. Унитарный оператор U_{r+1} удовлетворяет условию (iii), так как из (b) и (d) мы имеем

$$\|(U_{r+1}-U_r)f_i\|\leqslant\|(U_{r+1}-V_1)f_i\|+\|(V_1-U_r)f_i\|\leqslant 2\cdot 2^{-(r+1)}=2^{-r}.$$

Следовательно, существование возрастающих последовательностей $\{M_i\}$ и $\{N_i\}$ и последовательности $\{U_i\}$, удовлетворяющих условиям (i), (ii) и (iii), установлено.

Из условия (iii) следует, что последовательность векторов $\{U_rf_i;\ r=1,2,\dots\}$ сходится сильно при $r\to\infty$ для каждого $i=1,2,\dots$. Так как векторы $\{f_i\}$ плотны в единичном шаре H и так как операторы $\{U_r\}$ равномерно ограничены, то U_r сходятся сильно к некоторому оператору U при $r\to\infty$. Поскольку U_r унитарный при каждом r, то U есть изометрия H на H, т. е. $\|Uf\|=\|f\|$ для всех $f\in H$.

Покажем, что отображение $\varphi(A)=U^*AU$, рассматриваемое на операторах $A\in\mathfrak{A}_2$, является $*$-изоморфизмом $\mathfrak{A}_2$ на $\mathfrak{A}_1$. Из условия (ii) вытекает, что если $A\in N_r$, то $U_n^*AU_n=U_r^*AU_r$ при всех $n>r$. Так как U_n сходится сильно к U при $n\to\infty$, то $U_n^*AU_n$ сходится слабо к U^*AU при $n\to\infty$. Поэтому мы имеем $U^*AU=U_r^*AU_r$ для всех $A\in N_r$, и, следовательно.

$$U^*N_rU=U_r^*N_rU_r=M_r.$$

Так как U_r унитарный и N_r — алгебра, то $U^*ABU = U^*AUU^*BU$ для $A, B \in N_r$. Ясно, что отображение $\varphi(A) = U^*AU$ линейно и сохраняет $*$-операцию. Поэтому для каждого $r = 1, 2, \ldots$ отображение $\varphi(A) = U^*AU$, рассматриваемое на N_r, есть $*$-изоморфизм N_r на M_r. Из условия (i) следует, что увеличивающиеся последовательности $\{N_r\}$ и $\{M_r\}$ порождают $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_1$ соответственно. Так как φ непрерывно в сильной топологии и отображает плотное подмножество $\mathfrak{A}_2$ на плотное подмножество $\mathfrak{A}_1$, то φ является $*$-изоморфизмом $\mathfrak{A}_2$ на $\mathfrak{A}_1$.

Если нам известно, что U — унитарный оператор, то мы немедленно можем заключить, что обратное отображение $A \to UAU^{-1}$, рассматриваемое на $A \in \mathfrak{A}_1$, есть $*$-изоморфизм $\mathfrak{A}_1$ на $\mathfrak{A}_2$, т. е. $U\mathfrak{A}_1 U^{-1} = \mathfrak{A}_2$. Покажем поэтому, что U — унитарный оператор. Предположим, что U не унитарный оператор. Так как U — изометрический оператор, то $UU^* = E$, где E — эрмитовый проектор; поскольку $E \neq I$, существует вектор $f \in H$ $\|f\| = 1$, для которого $Ef = 0$. Пусть $g = Uf$. Так как φ — $*$-изоморфизм $\mathfrak{A}_2$ на $\mathfrak{A}_1$, то $U^*ABU = U^*AU \cdot U^*BU$ для всех A, B из $\mathfrak{A}_2$. Тогда $(g, ABg) = (g, AUU^*Bg) = (g, AEB_g)$ для всех A и B [1]). Так как $R = \mathfrak{A}_2''$ и $U \in R$, то из теоремы Капланского о плотности [7] следует, что существуют операторы A и B, для которых $\|A\| \leqslant 1$ и $\|B\| \leqslant 1$, такие, что

$$\|(A - U) f\| \leqslant \frac{1}{4}$$

и

$$\|(B - U^*) g\| = \|Bg - f\| < \frac{1}{4}.$$

Тогда мы имеем

$$|(g, AEBg)| \leqslant |(g, AE(Bg - f))| + |(g, AEf)| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|Bg - f\| + 0 < \frac{1}{4}$$

и

$$|(g, A \cdot Bg)| = |(g, A(Bg - f))| +$$
$$+ |(g, (A - U) f) + (g, g)| > -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + (g, g) = \frac{1}{2}.$$

Но это невозможно, так как $(g, AEBg) = (g, ABg)$. Следовательно, $UU^* = I$ и U — унитарный оператор. Это завершает доказательство леммы.

Теорема 3.7. *Пусть* Π_1 *и* Π_2 — *$*$-представления* РГФ-*алгебры* $\mathfrak{A}$ *в гильбертовых пространствах* H_1 *и* H_2 *соответственно. Предположим, что по крайней мере одно из гильбертовых пространств* H_1 *и* H_2 *сепарабельно. При этих предположениях представления* Π_1 *и* Π_2 *алгебраически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $*$-автоморфизм* φ *алгебры* $\mathfrak{A}$, *такой, что представления* $x \to \Pi_1(x)$ *и* $x \to \Pi(x) = \Pi_2(\varphi(x))$ *квазиэквивалентны.*

Доказательство. Пусть существует такой $*$-автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$, что

$$\Pi_1(x) \underset{q}{\sim} \Pi(x) = \Pi_2(\varphi(x)).$$

Тогда существует $*$-изоморфизм неймановского кольца $\{\Pi_1(\mathfrak{A})\}''$ на неймановское кольцо $\{\Pi(\mathfrak{A})\}''$. Так как φ отображает $\mathfrak{A}$ на себя,

[1]) Здесь и в дальнейшем нужно иметь в виду, что $U^*U = I$. — *Прим. перев.*

то

$$\{\Pi(\mathfrak{A})\}'' = \{\Pi_2(\varphi(\mathfrak{A}))\}'' = \{\Pi_2(\mathfrak{A})\}''.$$

Следовательно, $\{\Pi_1(\mathfrak{A})\}''$ и $\{\Pi_2(\mathfrak{A})\}''$ $*$-изоморфны. Поэтому $\Pi_1 \underset{a}{\sim} \Pi_2$.

Чтобы доказать обратное, предположим, что $\Pi_1 \underset{a}{\sim} \Pi_2$. Так как $\Pi_1(x) \underset{q}{\sim} \Pi_2(\varphi(x))$ означает $\Pi_1(\varphi^{-1}(x)) \underset{q}{\sim} \Pi_2(x)$, то можно предположить без потери общности, что H_2 сепарабельно. Поскольку $\Pi_1 \underset{a}{\sim} \Pi_2$, то существует $*$-изоморфизм α неймановского кольца $\{\Pi_1(\mathfrak{A})\}''$ на неймановское кольцо $\{\Pi_2(\mathfrak{A})\}''$. Пусть Π_0 — представление $\mathfrak{A}$ в H_2, определенное соотношением $\Pi_0(x) = \alpha(\Pi_1(x))$ для $x \in \mathfrak{A}$. Но α ультраслабо непрерывно, следовательно, $\{\Pi_0(\mathfrak{A})\}'' = \{\Pi_2(\mathfrak{A})\}''$. Ясно, что $\Pi_0 \underset{q}{\sim} \Pi_1$. Так как $\Pi_0 \underset{q}{\sim} \Pi_1$, то нужно только показать, что существует $*$-автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$, такой, что $\Pi_0(x) \underset{q}{\sim} \Pi(x) = \Pi_2(\varphi(x))$.

Заметим, что $\Pi_0(\mathfrak{A})$ и $\Pi_2(\mathfrak{A})$ — $*$-изоморфные РГФ-алгебры, порождающие одно и то же неймановское кольцо R, поэтому из леммы 3.6 вытекает, что существует унитарный оператор $U \in R$, для которого $U\Pi_0(\mathfrak{A})U^{-1} = \Pi_2(\mathfrak{A})$. Так как $A \to UAU^{-1}$ отображает $\Pi_0(\mathfrak{A})$ на $\Pi_2(\mathfrak{A})$ и поскольку Π_0 и Π_2 — точные представления $\mathfrak{A}$, то для каждого $x \in \mathfrak{A}$ существует единственное $\varphi(x) \in \mathfrak{A}$, для которого $U\Pi_0(x)U^{-1} = \Pi_2(\varphi(x))$. Легко проверить, что отображение φ, определяемое этим соотношением, является $*$-автоморфизмом $\mathfrak{A}$. Представления $\Pi_0(x)$ и $\Pi(x) = \Pi_2(\varphi(x))$ унитарно эквивалентны и поэтому квазиэквивалентны. Тем самым теорема доказана.

Следствие 3.8. *Группа всех $*$-автоморфизмов РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$ действует транзитивно на пространстве чистых состояний, т. е. если ω_1 и ω_2 — чистые состояния $\mathfrak{A}$, то существует $*$-автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}_1$, такой, что $\omega_1(x) = \omega_2(\varphi(x))$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть ω_1 и ω_2 — чистые состояния $\mathfrak{A}$. Пусть Π_1 и Π_2 — циклические $*$-представления $\mathfrak{A}$, индуцированные состояниями ω_1 и ω_2. Так как ω_1 и ω_2 — чистые состояния $\mathfrak{A}$, представления Π_1 и Π_2 являются неприводимыми представлениями в бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространствах. Следовательно, неймановские кольца $\{\Pi_1(\mathfrak{A})\}''$ и $\{\Pi_2(\mathfrak{A})\}''$ изоморфны. Поэтому $\Pi_1 \underset{a}{\sim} \Pi_2$. Из теоремы 3.7 вытекает, что существует $*$-автоморфизм α-алгебры $\mathfrak{A}$, для которого $\Pi_1(x) \underset{q}{\sim} \Pi(x) = \Pi_2(\alpha(x))$. Так как Π_1 и Π_2 неприводимы, то Π_1 и Π унитарно эквивалентны. Поскольку $\rho(x) = \omega_2(\alpha(x))$ — состояние $\mathfrak{A}$, следовательно, состояния ω_1 и ρ индуцируют унитарно эквивалентные неприводимые представления $\mathfrak{A}$. Тогда из теоремы Глимма и Кадисона [6] следует, что существует унитарный элемент $u \in \mathfrak{A}$, такой, что $\omega_1(x) = \rho(u^*xu) = \omega_2(\alpha(u^*xu))$ для всех $x \in \mathfrak{A}$. Пусть $\varphi(x) = \alpha(u^*xu)$. Ясно, что φ — автоморфизм $\mathfrak{A}$ и $\omega_1(x) = \omega_2(\varphi(x))$ для всех $x \in \mathfrak{A}$. Таким образом, следствие доказано.

Комбинируя теоремы 3.7 и 2.7, мы немедленно получим следующее следствие, которое будет использовано для выяснения того, когда гиперфинитные факторы одного класса изоморфны.

Следствие 3.9. *Пусть $\mathfrak{A}$ — РГФ-алгебра и $\{M_i, i = 1, 2, \ldots\}$ — возрастающая последовательность факторов типа I_{n_i}, порождающая $\mathfrak{A}$. Пусть Π_1 и Π_2 — факторпредставления $\mathfrak{A}$, а ω_1 и ω_2 — состояния Π_1 и Π_2 соответственно.*

Представления Π_1 *и* Π_2 *алгебраически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует* $*$*-автоморфизм* φ *алгебры* $\mathfrak{A}$, *такой, что состояния* $\omega_1(x)$ *и* $\omega(x)=\omega_2(\varphi(x))$ *обладают свойством* $\lim\limits_{i\to\infty}\|\omega_1|M_i^c-\omega|M_i^c\|=0$.

Доказательство. Так как факторпредставление $\mathfrak{A}$ квазиэквивалентно своему циклическому подпредставлению, достаточно рассмотреть только циклические представления $\mathfrak{A}$, индуцированные состояниями ω_1 и ω_2. Так как эти циклические представления действуют в сепарабельных гильбертовых пространствах, доказательство следствия непосредственно вытекает из теорем 2.7 и 3.7.

§ 4. Конструкция однопараметрического семейства неизоморфных аппроксимативно конечных факторов

В этом разделе будет построено однопараметрическое семейство состояний ω_λ, $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$, РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$ класса $\{2^i\}$. Используя теорему 2.5, мы покажем, что эти состояния индуцируют факторпредставления алгебры $\mathfrak{A}$. Факторы M_λ, порожденные этими представлениями, были изучены Глиммом в [5]. В этой статье Глимм показывает, что факторы M_λ изоморфны факторам, которые были построены Пукански [11], и тем самым устанавливает, что факторы M_λ принадлежат типу III при $0<\lambda<\frac{1}{2}$. Мы покажем, что факторы M_λ попарно неизоморфны при различных λ, т. е. состояния ω_χ и $\omega_{\lambda'}$ алгебраически эквивалентны лишь при $\lambda=\lambda'$. Напомним, что два состояния по определению алгебраически эквивалентны, если индуцированные ими циклические $*$-представления алгебраически эквивалентны.

Далее, следует представлять себе, что факторы M_λ, рассматриваемые в этом разделе, образуют лишь малую часть среди множества всех аппроксимативно конечных факторов. Грубо говоря, состояния ω_λ являются простейшими факторсостояниями, которые можно непосредственно построить. Мы изучаем эти „простейшие" факторы, надеясь понять, как может быть построена полная классификация аппроксимативно конечных факторов с точностью до изоморфизма.

Рассмотрим класс состояний C^*-алгебры, которые мы называем product-состояниями (мультипликативными состояниями). Мультипликативное состояние определяется по отношению к факторизации C^*-алгебры; под факторизацией мы понимаем следующее (по факторизации $\mathfrak{B}(H)$ см. [9, гл. III]). Пусть $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра и $\{\mathfrak{B}_i;\ i=1, 2,\dots\}$ — конечный или бесконечный набор C^*-подалгебр в $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что $\{\mathfrak{B}_i, i=1, 2,\dots\}$ образуют факторизацию алгебры $\mathfrak{A}$, если подалгебры $\mathfrak{B}_i$ и $\mathfrak{B}_j$ взаимно коммутативны при $i\neq j$, т. е. $\mathfrak{B}_i\subset\mathfrak{B}_j^c$, и если набор $\{\mathfrak{B}_i\}$ порождает $\mathfrak{A}$, т. е. наименьшая C^*-подалгебра в $\mathfrak{A}$, содержащая $\mathfrak{B}_i$, $i=1, 2,\dots$, совпадает с $\mathfrak{A}$. Говорят, что состояние ω алгебры $\mathfrak{A}$ есть мультипликативное состояние относительно факторизации $\{\mathfrak{B}_i, i=1, 2,\dots\}$, если $\omega(xy)=\omega(x)\omega(y)$ всякий раз. когда $x\in\mathfrak{B}$ и $y\in\mathfrak{B}_i^c$. Тот факт, что ω есть мультипликативное состояние, мы обозначим записью $\omega=\omega|\mathfrak{B}_1\otimes\omega|\mathfrak{B}_2\otimes\dots$. Из определения мультипликативного состояния немедленно следует, что $\omega(x_1\dots x_n)=\omega(x_1)\dots\omega(x_n)$, если $x_i\in\mathfrak{B}_{r(i)}$ и $r(i)\neq r(j)$ при $i\neq j$.

Каждая РГФ-алгебра допускает факторизацию на факторы типа I_n. Пусть $\mathfrak{A}$ — РГФ-алгебра, порожденная возрастающей последовательностью $\{M_i, i=1, 2, \ldots\}$ факторов типа I_{m_i}. Определим последовательность взаимно коммутирующих факторов типа I_{n_i}, $n_i = m_i/m_{i-1}$, соотношениями $N_i = M_i \cap M_{i-1}^c$. Положим $M_0 = \{\alpha E\}$.

Так как факторы N_i, $i=1, \ldots, r$, порождают M_r и так как факторы M_i порождают алгебру $\mathfrak{A}$, то факторы N_i порождают $\mathfrak{A}$. Следовательно, $\{N_i, i=1, 2, \ldots\}$ — факторизация алгебры $\mathfrak{A}$.

По заданной факторизации алгебры $\mathfrak{A}$ можно построить состояние, мультипликативное относительно этой факторизации. Нетрудно показать, что если $\{N_i, i=1, 2, \ldots\}$ — факторизация алгебры $\mathfrak{A}$ на факторы типа I_{n_i} и ω_i — состояния на N_i, то существует единственное состояние ω на $\mathfrak{A}$, такое, что $\omega = \omega | N_1 \otimes \omega | N_2 \otimes \ldots$ и $\omega / N_i = \omega_i$ для $i=1, 2, \ldots$.

Как будет сейчас показано, из теоремы 2.5 следует, что построенные таким образом мультипликативные состояния являются факторсостояниями, т. е. они индуцируют факторпредставления алгебры $\mathfrak{A}$.

Лемма 4.1. *Пусть $\{N_i, i=1, 2, \ldots\}$ — факторизация РГФ-алгебры $\mathfrak{A}$ на факторы типа I_{n_i} и ω — состояние на $\mathfrak{A}$, мультипликативное относительно этой факторизации, т. е. $\omega = \omega | N_1 \otimes \omega | N_2 \otimes \ldots$. Тогда ω есть факторсостояние.*

Доказательство. Пусть M_r — фактор типа I_{m_r}, $m_r = n_1 \ldots n_r$, порожденный взаимно коммутирующими факторами N_i, $i=1, \ldots, r$. Так как факторы N_i порождают $\mathfrak{A}$, то возрастающая последовательность факторов M_r также порождает $\mathfrak{A}$. Пусть $x \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$. Так как $\{M_r\}$ порождают $\mathfrak{A}$, существуют целые числа r и $z \in M_r$, такие, что $\|x - z\| < \varepsilon/2$. Так как $\omega = \omega | N_1 \otimes \omega | N_2 \otimes \ldots$ и $z \in M_r$, то $\omega(zy) = \omega(z)\omega(y)$ для $y \in M_r^c$. Следовательно, для всех $y \in M_r^c$ имеем

$$|\omega(xy) - \omega(x)\omega(y)| = |\omega((x-z)y) - \omega(x-z)\omega(y) + \omega(zy) - \omega(z)\omega(y)| = |\omega((x-z)y) - \omega(x-z)\omega(y)| \leqslant 2\|x-z\|\|y\| \leqslant \varepsilon\|y\|.$$

Так как x и ε произвольны, то из теоремы 2.5 следует, что ω есть факторсостояние. Лемма доказана.

Введем однопараметрическое семейство мультипликативных состояний РГФ-алгебры класса $\{2^i\}$.

Определение 4.2. Пусть $\mathfrak{A}$ — равномерно гиперфинитная алгебра класса $\{2^i\}$ и $\{N_i, i=1, 2, \ldots\}$ — факторизация алгебры $\mathfrak{A}$ на факторы типа I_2. Обозначим через e_{ij}^r, $i, j=1, 2$, семейство матричных единиц, образующих базис в N_r. Определим состояние ω_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$ как единственное состояние алгебры $\mathfrak{A}$, такое, что $\omega_\lambda = \omega_\lambda | N_1 \otimes \omega_\lambda | N_2 \otimes \ldots$ и $\omega_\lambda(e_{ij}^r) = \lambda_i \delta_{ij}$, где $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_2 = 1 - \lambda$.

Из определения немедленно следует, что

$$\omega(e_{i_1 j_1}^{r_1} \ldots e_{i_n j_n}^{r_n}) = \lambda_{i_1} \delta_{i_1 j_1} \ldots \lambda_{i_n} \delta_{i_n j_n},$$

где $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda$, $i_k, j_k = 1, 2$; $r_k = 1, 2, \ldots$ и $r_k = r_e$ для $k \neq e$. Так как полиномы от e_{ij}^r всюду плотны в $\mathfrak{A}$, то состояние ω_λ определено однозначно.

Из леммы 4.1 следует, что ω_λ есть факторсостояние алгебры $\mathfrak{A}$. В [5] показано, что ω_0 — чистое состояние алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. ω_0 индуцирует факторпредставление типа I_∞. При $\lambda=\frac{1}{2}$ состояние ω_λ индуцирует факторпредставление типа II_1, а при $0<\lambda<\frac{1}{2}$ — факторпредставление типа III.

При изучении состояний ω_λ нам потребуются некоторые сведения о состояниях факторов типа I_n. Каждое такое состояние ω можно разложить на взаимно ортогональные чистые состояния, т. е. ω может быть представлено в виде $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\omega_i$, где $\lambda_i\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, ω_i — чистое состояние и $\|\omega_i-\omega_j\|=2$ при $i\neq j$. Хотя разложение на взаимно ортогональные чистые состояния определено, вообще говоря, не однозначно, коэффициенты λ_i этого разложения однозначно определены состоянием ω (см. приложение). Коэффициенты λ_i назовем собственными значениями состояния ω на M. В наборе собственных значений $\{\lambda_i,\ i=1,\ldots,n\}$ собственное значение λ появляется столько раз, сколько раз оно встречается в разложении $\omega=\sum\lambda_i\omega_i$. В дальнейшем собственные значения записываются в порядке невозрастания, т. е. $\lambda_i\leqslant\lambda_j$ при $i\geqslant j$.

Будем говорить, что два набора собственных значений $\{\lambda_i,\ i=1,\ldots,n\}$ и $\{\lambda'_i,\ i=1,\ldots,n\}$ близки, если сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i-\lambda'_i|$ мала. В приложении будет доказано, что если ω_1 и ω_2 — близкие по норме состояния фактора типа I_n, то наборы их собственных значений близки. Фактически мы покажем, что если ω_1 и ω_2 — состояния фактора типа I_n и $\{\lambda_1,\ i=1,\ldots,n\}$ и $\{\lambda'_i,\ i=1,\ldots,n\}$ — наборы их собственных значений, то $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i-\lambda'_i|\leqslant\|\omega_1-\omega_2\|$.

Заметим, что собственные значения состояний $\omega=\omega|N_1\otimes\omega|N_2$ могут быть выражены через собственные значения состояний $\omega|N_1$ и $\omega|N_2$. Пусть M — фактор типа I_m и $\{N_1,N_2\}$ — факторизация M на факторы типов I_{n_1} и I_{n_2}, $m=n_1n_2$. Тогда если $\omega=\omega|N_1\otimes\omega|N_2$ и $\{\lambda_i,\ i=1,\ldots,n_1\}$ и $\{\lambda'_i,\ i=1,\ldots,n_2\}$ суть наборы собственных значений состояний $\omega|N_1$ и $\omega|N_2$, то собственные значения состояния ω суть $\lambda_i\lambda'_j$, $i=1,\ldots,n_1$, $j=1,\ldots,n_2$.

Пользуясь введенными обозначениями, приступим к доказательству утверждения о том, что состояния ω_λ и $\omega_{\lambda'}$, введенные определением 4.2, алгебраически эквивалентны лишь при $\lambda=\lambda'$. Доказательство этого результата основано на следующих леммах.

Лемма 4.3. *Пусть M — фактор типа I_m, $m=2^n$, и $\{N_i,\ i=1,\ldots,n\}$ — факторизация M на факторы типа I_2. Пусть $\omega=\omega|N_1\otimes\ldots\otimes\omega|N_n$ — мультипликативное состояние M, такое, что при каждом i состояние $\omega|N_i$ имеет собственные значения $\{1-\lambda,\lambda\}$, $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. Обозначим $\{M_1,M_2\}$ факторизацию M на факторы типов I_2 и $\mathrm{I}_{m/2}$ соответственно. Пусть $\rho=\rho|M_1\otimes\rho|M_2$ — мультипликативное состояние M, такое, что $\rho|M_1$ имеет собственные значения $\{1-\alpha,\alpha\}$, $\lambda\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. Тогда*

$$\frac{1}{2}\min\left\{|\alpha-\lambda|,\ \left|\alpha-\frac{1}{2}\right|\right\}\leqslant\|\omega-\rho\|.$$

Доказательство. Пусть $\{\lambda_i, i=1, \ldots, m\}$ — набор собственных значений состояния ω. Из разложения $\omega = \omega|N_1 \otimes \ldots \otimes \omega|N_n$ следует, что собственные значения состояния ω суть $(1-\lambda)^{n-k}\lambda^k$, $k=0, 1, \ldots, n$, причем собственное значение $(1-\lambda)^{n-k}\lambda^k$ входит $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ раз в набор собственных значений ω. Следовательно, $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^k$, $k=0, 1, \ldots, n$, при $i \geqslant j$.

Пусть $\{\mathfrak{B}_i, i=1, \ldots, m\}$ — набор собственных значений состояния ρ и $\{\lambda'_i, i=1, \ldots, m/2\}$ — набор собственных значений состояния $\rho|M_2$. Так как $\rho = \rho|M_1 \otimes \rho|M_2$, то собственные значения $\mathfrak{B}_i$ имеют вид $\mathfrak{B}_{p(i)} = (1-\alpha)\lambda'_i$ и $\mathfrak{B}_{q(i)} = \alpha\lambda'_i$, где $i \to p(i)$ и $i \to q(i)$ суть взаимно однозначные отображения множества $\{1, 2, \ldots, m/2\}$ на непересекающиеся подмножества в $\{1, \ldots, m\}$. Из теоремы 5.6 (см. приложение) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{m} |\mathfrak{B}_i - \lambda_i| \leqslant \|\omega - \rho\|$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} |\mathfrak{B}_i - \lambda_i| = \sum_{i=1}^{m/2} s_i \leqslant \|\omega - \rho\|,$$

где

$$s_i = |(1-\alpha)\lambda'_i - \lambda_{p(i)}| + |\alpha\lambda'_i - \lambda_{q(i)}|.$$

Мы предполагаем далее, что $\alpha > 0$, так как в противном случае лемма очевидным образом справедлива. Тогда имеют место неравенства

$$\begin{aligned} s_i &= (1-\alpha)|\lambda'_i - (1-\alpha)^{-1}\lambda_{p(i)}| + \alpha|\lambda'_i - \alpha^{-1}\lambda_{q(i)}| \geqslant \\ &\geqslant \alpha|(1-\alpha)^{-1}\lambda_{p(i)} - \alpha^{-1}\lambda_{q(i)}| \geqslant \\ &\geqslant \alpha|(1-\alpha)^{-1}c(i) - \alpha^{-1}d(i)|, \end{aligned}$$

где

$$c(i) = \max\{\lambda_{p(i)}, \lambda_{q(i)}\}, \quad d(i) = \min\{\lambda_{p(i)}, \lambda_{q(i)}\}.$$

Следовательно,

$$s_i \geqslant c(i)\left|\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{d(i)}{c(i)}\right|,$$

где $\frac{d(i)}{c(i)} = 0$ в случае, когда $0 = c(i) \geqslant d(i) \geqslant 0$. Так как $d(i)/c(i) = (\lambda/(1-\lambda))^k$ при некотором $k=0, 1, \ldots, n$, и $\lambda \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$\begin{aligned} \left|\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{c(i)}{d(i)}\right| &\geqslant \min\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\lambda}{1-\lambda}, \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}\right\} \geqslant \\ &\geqslant \min\left\{|\alpha - \lambda|, \left|\alpha - \frac{1}{2}\right|\right\}. \end{aligned}$$

Итак, имеем неравенство $s_i \geqslant c(i)\min\left\{|\alpha - \lambda|, \left|\alpha - \frac{1}{2}\right|\right\}$, и поэтому

$$\min\left\{|\alpha - \lambda|, \left|\alpha - \frac{1}{2}\right|\right\} \sum_{i=1}^{m/2} c(i) \leqslant \sum_{i=1}^{m/2} s_i \leqslant \|\omega - \rho\|.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{m/2} (c(i) + d(i)) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ и $c(i) \geqslant d(i)$, то

$$\sum_{i=1}^{m/2} c(i) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$\frac{1}{2}\min\left\{|\alpha-\lambda|, \left|\alpha-\frac{1}{2}\right|\right\} \leqslant \|\omega-\rho\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Для всякого* $\varepsilon>0$ *и целого положительного* n *существует* $\delta_1(\varepsilon, n)$ *со следующими свойствами. Пусть* $\mathfrak{A}$ *есть* C^**-алгебра и* M — C^**-подалгебра в* $\mathfrak{A}$. *Пусть, кроме того,* $\{e_{ij}, i, j=1, \ldots, n\}$ — *семейство матричных единиц в* $\mathfrak{A}$. *Если существуют элементы* $x_{ij}\in M$, *такие, что* $\|x_{ij}-e_{ij}\|<\delta$, *то существуют матричные единицы* $f_{ij}\in M$, *такие, что* $\|f_{ij}-e_{ij}\|<\varepsilon$.

По поводу доказательства этой леммы мы отсылаем читателя к статье Глимма [4, лемма 1.10].

Если $N, M\subset\mathfrak{A}$ — факторы и $N\supset M$, то $M^c\supset N^c$. В следующей лемме мы показываем, что если единичный шар в N почти содержит единичный шар в M, то единичный шар в M^c почти содержит единичный шар в N^c.

Лемма 4.5. *Для каждого* $\varepsilon>0$ *и целого положительного* n *существует* $\delta_2(\varepsilon, n)$ *со следующими свойствами. Пусть* $\mathfrak{A}$ — C^**-алгебра,* $M\subset\mathfrak{A}$ — *подфактор типа* I_n, $\{e_{ij}, i, j=1, \ldots, n\}$ — *семейство матричных единиц в* M, N — C^**-подалгебра в* $\mathfrak{A}$. *Если существуют элементы* $x_{ij}\in N$, *такие, что* $\|e_{ij}-x_{ij}\|<\delta$, *то для каждого* $z\in N^c$, $\|z\|\leqslant 1$, *существует такой* $y\in M^c$, *что* $\|z-y\|<\varepsilon$.

Доказательство. Положим $\delta_2(\varepsilon, n)=\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2n}, n\right)$, где δ_1 есть δ из леммы 4.4. Если существуют элементы $x_{ij}\in N$ с $\|e_{ij}-x_{ij}\|<\delta$, то по лемме 4.4 существуют матричные единицы $\{f_{ij}\in N, i, j=1, \ldots, n\}$ с $\|e_{ij}-f_{ij}\|<\frac{\varepsilon}{2n}$. Возьмем $z\in N^c$, $z\neq 0$ *и* $\|z\|\leqslant 1$. Так как $z\in N^c$, то

$$z=\sum_{i=1}^{n} f_{i1}zf_{1i}=\sum_{i=1}^{n} zf_{ii}.$$

Пусть $y=\sum_{i=1}^{n} e_{i1}ze_{1i}$. Так как $\{e_{ij}\}$ образуют базис в M, то $y\in M^c$. Кроме того, $\|z-y\|<\varepsilon$, поскольку

$$\|z-y\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}(f_{i1}zf_{1i}-e_{i1}ze_{1i})\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\|f_{i1}z(f_{1i}-e_{1i})\|)+\|(f_{i1}-e_{i1})ze_{1i}\|\leqslant$$

$$\leqslant\|z\|\sum_{i=1}^{n}(\|f_{i1}-e_{i1}\|+\|f_{1i}-e_{1i}\|)<\varepsilon\|z\|\leqslant\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.6. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — РГФ-*алгебра класса* $\{2^i\}$ *и* $\{N_i, i=1, 2, \ldots\}$ — *факторизация* $\mathfrak{A}$ *на множители типа* I_2. *Обозначим* $e_{ij}^{(r)}$ *семейство матричных единиц алгебры* N_r.

Пусть $\{M_i, i=1, 2, \ldots\}$ — *возрастающая последовательность подфакторов типа* I_{m_i}, *которые порождают* $\mathfrak{A}$. *Тогда для каждого* $\varepsilon>0$ *и натурального* n *существуют числа* r *и* s *и семейство матричных единиц* $\{f_{ij}, i, j=1, 2\}$, *такие, что*

$$f_{ij} \in M_s \cap M_n^c \text{ и } \|f_{ij} - e_{ij}^{(r)}\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 = \delta_1(\varepsilon, 2)$, где δ_1 есть δ из леммы 4.4. Мы докажем существование целых чисел r и s и элементов $\{x_{ij}, i, j=1, 2\}$, таких, что

$$x_{ij} \in M_s \cap M_n^c \text{ и } \|x_{ij} - e_{ij}^{(r)}\| < \varepsilon_1.$$

Так как $M_s \cap M_n^c$ — C^*-подалгебра в $\mathfrak{A}$, то из леммы 4.4 будет следовать существование матричных единиц $f_{ij} \in M_s \cap M_n^c$ с $\|f_{ij} - e_{ij}^{(r)}\| < \varepsilon$.

Для доказательства существования $\{x_{ij}\}$ с требуемыми свойствами мы поступим следующим образом. Пусть $\{q_{ij}, i, j=1, \ldots, m_n\}$ — семейство матричных единиц, порождающих M_n. Обозначим через P_k фактор, порожденный факторами $\{N_i, i=1, \ldots, k\}$. Так как $\{N_i\}$ порождают $\mathfrak{A}$, то возрастающая последовательность факторов P_k порождает $\mathfrak{A}$. Следовательно, существует целое число p и элементы $\{z_{ij} \in P_p, i, j=1, \ldots, m_n\}$ с $\|q_{ij} - z_{ij}\| < \delta_2\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1, m_n\right)$, где δ_2 есть δ из леммы 4.5. Пусть $r=p+1$. Так как $e_{ij}^{(r)} \in P_p^c$ и $\|e_{ij}\| \leqslant 1$, то по лемме 4.5 существуют элементы $y_{ij} \in M_n^c$ с $\|y_{ij} - e_{ij}^{(r)}\| < \frac{1}{2}\varepsilon_j$. Так как M_n^c есть РГФ-алгебра, порожденная возрастающей последовательностью факторов $\{M_i \cap M_n^c, i=n+1, \ldots\}$ (см. доказательство леммы 3.2), то существуют целое $s>n$ и элементы $x_{ij} \in M_s \cap M_n^c$ с $\|x_{ij} - y_{ij}\| < \frac{1}{2}\varepsilon_1$. Неравенство

$$\|x_{ij} - e_{ij}^{(r)}\| \leqslant \|x_{ij} - y_{ij}\| + \|y_{ij} - e_{ij}^{(r)}\| < \varepsilon_1$$

завершает доказательство леммы.

Лемма 4.7. *Пусть* ω_λ — *состояние алгебры* $\mathfrak{A}$, *описанное в определении* 4.2, *и* $\{M_i, i=1, 2, \ldots\}$ — *возрастающая последовательность факторов типа* I_{m_i}, *порождающих* $\mathfrak{A}$. *Далее, пусть* ρ — *состояние алгебры* $\mathfrak{A}$, *которое алгебраически эквивалентно состоянию* ω_λ. *Тогда для каждого* $\varepsilon>0$ *существует фактор* $N = M_s \cap M_n^c$, *его факторизация* $\{N_1, N_2\}$ *на факторы типов* I_2 *и* I_n *соответственно и такое состояние* ρ_1 *фактора* N, *что*

$$\|\rho_1 - \rho | N\| < \varepsilon,$$

$$\rho_1 = \rho_1 | N_1 \otimes \rho_1 | N_2$$

и $\rho_1 | N_1$ *имеет собственные числа* $\{1-\lambda, \lambda\}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$. Так как ω_λ — факторсостояние и ω_λ и ρ индуцируют алгебраически эквивалентные представления алгебры $\mathfrak{A}$, то по следствию 3.9 существует $*$-автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$, такой, что состояния $\rho(x)$ и $\omega(x) = \omega_\lambda(\varphi(x))$ удовлетворяют условию $\|\omega | M_i^c - \rho | M_i^c\| \to 0$ при $i \to \infty$. Следовательно, существует целое число r, такое, что

$$\|\omega | M_r^c - \rho | M_r^c\| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Пусть $\{e_{ij}^{(r)},\ i,\ j=1,2;\ r=1,2,\ldots\}$ — набор взаимно коммутирующих семейств матричных единиц из определения 4.2.

Как следует из определения, состояние ω_λ удовлетворяет соотношению

$$\omega_\lambda(x)=\frac{(1-\lambda)\,\omega_\lambda\left(e_{22}^{(r)}\,x\,e_{22}^{(r)}\right)+\lambda\omega_\lambda\left(e_{21}^{(r)}\,x\,e_{12}^{(r)}\right)}{\omega_\lambda\left(e_{22}^{(r)}\right)}$$

для всех $x\in\mathfrak{A}$ и всех $r=1,2,\ldots$.

Положим $\varphi\left(f_{ij}^{(r)}\right)=\left(e_{ij}^{(r)}\right)$. Состояние $\omega(x)=\omega_\lambda(\varphi(x))$ удовлетворяет соотношению

$$\omega(x)=\frac{(1-\lambda)\,\omega\left(f_{22}^{(r)}\,x\,f_{22}^{(r)}\right)+\lambda\omega\left(f_{21}^{(r)}\,x\,f_{12}^{(r)}\right)}{\omega\left(f_{22}^{(r)}\right)} \tag{a}$$

для всех $x\in\mathfrak{A}$ и всех $r=1,2,\ldots$.

Пусть $\delta=\min\left(\frac{1}{4},\ \varepsilon/48\right)$. Поскольку $\{\varepsilon_{ij}^{(r)},\ i,\ j=1,2\}$ — взаимно коммутирующие семейства матричных единиц, порождающих $\mathfrak{A}$, и поскольку φ есть $*$-автоморфизм $\mathfrak{A}$, то $\{f_{ij}^{(r)},\ i,\ j=1,2\}$ — набор взаимно коммутирующих семейств матричных единиц, порождающих $\mathfrak{A}$. По лемме 4.6 существуют целые m и s и семейство матричных единиц $\{e_{ij},\ i,\ j=1,2\}$, такие, что $e_{ij}\in M_s\cap M_r^c=N$ и $\|e_{ij}-f_{ij}^{(m)}\|<\delta=\min\left(\frac{1}{4},\ \frac{\varepsilon}{48}\right)$.

Определим состояние ρ_1 фактора N соотношением

$$\rho_1(x)=\frac{(1-\lambda)\,\omega\,(e_{22}\,x\,e_{22})+\lambda\omega\,(e_{21}\,x\,e_{12})}{\omega\,(e_{22})}. \tag{b}$$

Если $\omega(e_{22})>0$, то это выражение определяет состояние фактора N. Так как

$$\|e_{22}-f_{22}^{(m)}\|<\delta\leqslant\frac{1}{4} \tag{c}$$

и $\omega\left(f_{22}^{(m)}\right)=1-\lambda\geqslant\frac{1}{2}$, то

$$|\omega(e_{22})-\omega\left(f_{22}^{(m)}\right)|<\delta\leqslant\frac{1}{4}$$

и

$$\omega(e_{22})>\frac{1}{4}. \tag{d}$$

Мы имеем теперь оценки

$$\left(|\omega(e_{2i}\,x\,e_{i2})-\omega\left(f_{2i}^{(m)}\,x\,f_{i2}^{(m)}\right)|\leqslant\|e_{2i}\,x\,e_{i2}-f_{2i}^{(m)}\,x\,f_{i2}^{(m)}\|\leqslant\right.$$
$$\leqslant\|e_{2i}\,x\,(e_{i2}-f_{i2}^{(m)})\|+\|(e_{2i}-f_{2i}^{(m)})\,x\,f_{i2}^{(m)}\|\leqslant 2\delta\|x\| \tag{e}$$

для всех $x\in\mathfrak{A}$ и $i=1,2$.

Сопоставляя неравенства (a) — (e) и выражение для $\partial=\min\left(\frac{1}{4},\ \frac{\varepsilon}{48}\right)$, получаем

$$\|\rho_1(x)-\omega(x)\|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon\|x\|\qquad\text{для всех } x\in N.$$

Следовательно, $\|\rho_1-\omega\,|\,N\|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon$. Так как $N=M_s\cap M_r^c\subset M_r^c$ и $\|\rho\,|\,M_r^c-\omega\,|\,M_r^c\|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon$, то

$$\|\rho_1-\rho\,|\,N\|\leqslant\|\rho_1-\omega\,|\,N\|+\|\omega\,|\,N-\rho\,|\,N\|<\varepsilon.$$

Пусть N_1 — фактор, порожденный матричными единицами e_{ij}, $i, j = 1,2$, и $N_2 = N_1^c \cap N$. Так как $e_{ij} \in N$, то $\{N_1, N_2\}$ есть факторизация N. Из соотношения (b) следует, что $\rho_1 = \rho_1 | N_1 \otimes \rho_1 | N_2$. Собственные значения состояния $\rho_1 | N_1$ суть $\{1-\lambda, \lambda\}$ по построению. Лемма доказана.

Теорема 4.8. *Состояния ω_λ и $\omega_{\lambda'}$, построенные в определении* 4.2, *алгебраически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda'$. Следовательно, существует несчетное множество попарно неизоморфных гиперфинитных факторов типа* III.

Доказательство. Пусть состояния ω_λ и $\omega_{\lambda'}$, $\lambda' \geqslant \lambda$, алгебраически эквивалентны. Рассмотрим две возможности: $\lambda' = \frac{1}{2}$ и $\lambda' < \frac{1}{2}$. Если $\lambda' = \frac{1}{2}$, то состояние $\omega_{\lambda'}$ индуцирует факторпредставление типа II алгебры $\mathfrak{A}$. Обратно, состояние ω_λ индуцирует факторпредставление типа II алгебры $\mathfrak{A}$ лишь при $\lambda = \frac{1}{2}$ (см. замечания после определения 4.2). Так как тип фактора есть инвариант $*$-изоморфизма, то $\lambda' = \lambda$ в случае, когда $\lambda' = \frac{1}{2}$.

Мы должны рассмотреть только случай, когда $\frac{1}{2} > \lambda' \geqslant \lambda \geqslant 0$. Пусть $\{N_i, i = 1,2,\ldots\}$ — последовательность взаимно коммутирующих факторов типа I_2 из определения 4.2 и P_r — фактор, порожденный факторами $\{N_i, i = 1,\ldots, r\}$. Так как $\{N_i\}$ порождают $\mathfrak{A}$, то возрастающая последовательность факторов $\{P_r, r = 1,2,\ldots\}$ порождает $\mathfrak{A}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\omega_{\lambda'}$ и ω_λ алгебраически эквивалентны, то по лемме 4.7 существует фактор $M = P_S \cap P_r^c$, его факторизация $\{M_1, M_2\}$ на факторы типов I_2 и I_n соответственно и такое состояние ρ фактора M, что

$$\|\rho - \omega_\lambda | M\| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\rho = \rho | M_1 \otimes \rho | M_2$$

и $\rho | M_1$ имеет собственные числа $\{1-\lambda', \lambda'\}$. Ясно, что $\{N_i, i = r+1,\ldots, s\}$ — факторизация для M. Из определения ω_λ следует, что $\omega_\lambda | M = \omega_\lambda | N_{r+1} \otimes \ldots \otimes \omega_\lambda | N_s$ и $\omega_\lambda | N_i$ имеет собственные значения $\{1-\lambda, \lambda\}$ для каждого $i = s+1,\ldots, r$. Так как $\lambda' \geqslant \lambda$, то по лемме 4.3

$$\frac{1}{2}\min\left\{|\lambda' - \lambda|, \left|\lambda' - \frac{1}{2}\right|\right\} \leqslant \|\rho - \omega_\lambda | M\| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Следовательно, для каждого ε либо $|\lambda' - \lambda| < \varepsilon$, либо $\left|\lambda' - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Так как $\lambda' < \frac{1}{2}$, то $\lambda' = \lambda$.

Ввиду того что состояния ω_λ индуцируют факторпредставления типа III при $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ и возникающие таким образом гиперфинитные факторы M_λ и $M_{\lambda'}$ неизоморфны при $\lambda \neq \lambda'$, мы доказали существование несчетного множества попарно неизоморфных гиперфинитных факторов типа III. Теорема доказана.

Приложение. Состояния факторов типа I_n

Здесь мы изложим некоторые результаты, касающиеся состояний факторов типа I_n. Многие из этих результатов хорошо известны.

Пусть M — фактор типа I_n, ω — состояние фактора M и $\{e_{ij},\ i,\ j = 1,\ldots,\ n\}$ — семейство матричных единиц, порождающих M. По состоянию ω построим матрицу Ω с матричными элементами

$$\Omega_{ij} = \omega(e_{ij}). \tag{1}$$

Каждому элементу $x \in M$ соответствует матрица X с элементами X_{ij}, такими, что

$$x = \sum_{i,j} X_{ij} e_{ij}. \tag{2}$$

Математическое ожидание элемента x в состоянии ω вычисляется по формуле

$$\omega(x) = \sum_{i,j} X_{ij}\omega(e_{ij}) = \sum_{i,j} X_{ij}\Omega_{ij} = \mathrm{tr}(X\Omega), \tag{3}$$

где $\mathrm{tr}(A)$ — след матрицы A.

Так как состояние ω эрмитово (т. е. $\omega(x) = \overline{\omega(x^*)}$), положительно (т. е. $\omega(x^*x) \geqslant 0$) и нормы 1, то матрица Ω эрмитова, положительна и имеет единичный след. Обратно, каждая положительная матрица порядка n со следом, равным единице, определяет состояние ω по формуле (3).

Матрица Ω, определенная равенством (1), зависит от состояния ω и от выбора матричных единиц $\{e_{ij},\ i,\ j = 1,\ldots,\ n\}$. Пусть $\{f_{ij},\ i,\ j = 1,\ldots,\ n\}$ — другое семейство матричных единиц, порождающих фактор M. По лемме 3.3 существует унитарный элемент $u \in M$, такой, что $ue_{ij}u^{-1} = f_{ij}$. Так как $u,\ u^{-1} \in M$, то существуют такие матрицы u_{ij} и u_{ij}^{-1}, что $u = \sum_{i,j} u_{ij}e_{ij}$ и $u^{-1} = \sum_{i,j} u_{ij}^{-1}e_{ij}$. Отсюда следует, что матрицы Ω и Ω', определенные равенствами $\Omega_{ij} = \omega(e_{ij})$, $\Omega'_{ij} = \omega(f_{ij})$, связаны соотношением $\Omega' = {}^t u^{-1}\Omega {}^t u$, где ${}^t u$ — матрица, транспонированная к u. Следовательно, собственные значения матрицы Ω зависят только от состояния ω, но не от выбора матричных единиц $\{e_{ij}\}$.

Как известно, положительная матрица Ω может быть представлена в виде

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i,\quad \lambda_i \geqslant 0,$$

причем $\mathrm{tr}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$; здесь $\{E_i,\ i = 1,\ldots,\ n\}$ — семейство взаимно ортогональных одномерных проекционных операторов. Ясно, что λ_i суть собственные значения матрицы Ω. С разложением матрицы Ω связано разложение состояния $\omega(x) = \mathrm{tr}(x\Omega)$ на взаимно ортогональные чистые состояния фактора M. Легко видеть, что если $\{E_i,\ i = 1,\ldots,\ n\}$ — семейство взаимно ортогональных одномерных проекторов, то состояния $\omega_i(x) = \mathrm{tr}(xE_i)$ суть *взаимно ортогональные* чистые состояния фактора M. Обратно, если $\{\omega_i,\ i = 1,\ldots,\ n\}$ — семейство взаимно ортогональных чистых состояний *на* M, то матрицы $e_{ij}^{(r)} = \omega_r(e_{ij})$ суть взаимно ортогональные одномерные проекторы. Итак, разложение матрицы $\Omega_{ij} = \omega(e_{ij})$ на взаимно ортогональные одномерные проекторы есть точный эквивалент разложения состояния ω на взаимно ортогональные чистые состояния. Таким образом, собственные значения состояния ω суть собственные значения матрицы Ω. Мы суммируем это в виде следующей леммы.

Лемма 5.1. *Пусть M — фактор типа I_n, $\{e_{ij},\ i,\ j=1,\dots,\ n\}$ — семейство матричных единиц в M, ω — состояние на M. Тогда матрица Ω с элементами $\Omega_{ij}=\omega(e_{ij})$ есть положительная матрица со следом единица. Собственные значения матрицы Ω совпадают с собственными значениями ω на M. Собственные значения матрицы Ω не зависят от выбора матричных единиц и, следовательно, собственные значения состояния ω на M однозначно определены самим состоянием.*

Следующая цепочка лемм приведет к доказательству того факта, что если два состояния на M аппроксимируют друг друга по норме, то наборы их собственных чисел также аппроксимируют друг друга. В следующей лемме мы показываем, что если ω_1 и ω_2 — состояния M, описываемые матрицами $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$, то

$$\|\omega_1-\omega_2\|=\|\Omega^{(1)}-\Omega^{(2)}\|_{\mathrm{tr}},$$

где $\Omega^{(k)}_{ij}=\omega_k(e_{rj})$, $r,\ j=1,\dots,\ n$, $k=1,2$, и следовая норма $\|A\|_{\mathrm{tr}}$ оператора A определена равенством

$$\|A\|_{\mathrm{tr}}=\sup_{\|X\|\leqslant 1}|\operatorname{tr}(XA)|=\operatorname{tr}(\sqrt{A^*A}).$$

Лемма 5.2. *Пусть M — фактор типа I_n, ω_1 и ω_2 — состояния на M, $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ — матрицы, построенные по состояниям ω_1 и ω_2 соответственно и по фиксированному семейству матричных единиц $\{e_{ij}\}$ из M. Тогда*

$$\|\omega_1-\omega_2\|=\|\Omega^{(1)}-\Omega^{(2)}\|_{\mathrm{tr}}.$$

Доказательство. Каждый $x\in M$ может быть однозначно представлен в виде

$$x=\sum_{i,j}x_{ij}e_{ij}.$$

Ясно, что отображение M на полную матричную алгебру, определенное последним соотношением, есть точное $*$-представление M, и поэтому оно сохраняет норму. Следовательно,

$$\|\omega_1-\omega_2\|=\sup_{\|X\|\leqslant 1}|\omega_1(x)-\omega_2(x)|=$$
$$=\sup_{\|X\|\leqslant 1}|\operatorname{tr}(X\Omega_1-X\Omega_2)|=\|\Omega_1-\Omega_r\|_{\mathrm{tr}}.$$

Лемма доказана.

Определение 5.3. Пусть A — вполне непрерывный положительный оператор в гильбертовом пространстве H и $\{\lambda_i,\ i=1,2,\dots\}$ — убывающая последовательность собственных значений оператора A, причем каждое собственное значение встречается столько раз, какова его кратность. Спектральная функция размерности $f_A(\lambda)$ оператора A есть целочисленная функция на полуоси $0<\lambda<\infty$, определенная соотношением

$$f_A(\lambda)=\sup\{i;\ \lambda_i>\lambda\}.$$

Пусть $\{E_\lambda,\ 0\leqslant\lambda<\infty\}$ — спектральное семейство оператора A, т. е.

$$A=\int\lambda\,dE_\lambda.$$

Тогда $f_A(\lambda)=\dim\operatorname{Ker}E_r$. Легко видеть, что

$$\operatorname{tr}A=\int_0^\infty f_A(\lambda)\,d\lambda;$$

обе части этого равенства конечны или бесконечны одновременно. Если A и B — положительные вполне непрерывные операторы, имеющие наборы собственных значений $\{\lambda_i,\ i=1,2,\ldots\}$ и $\{\lambda'_i,\ i=1,2,\ldots\}$ соответственно, то прямой подсчет показывает, что

$$\sum_i |\lambda_i - \lambda'_i| = \int_0^\infty |f_A(\lambda) - f_B(\lambda)|\, d\lambda,$$

причем обе части этого равенства конечны или бесконечны одновременно.

Лемма 5.4. *Пусть A, B — вполне непрерывные положительные операторы в гильбертовом пространстве H и $A \geqslant B$ (т. е. $A-B$ — положительный оператор). Тогда $f_A(\lambda) \geqslant f_B(\lambda)$ для всех $0<\lambda<\infty$.*

Доказательство. Пусть $f_A(\lambda_0) < f_B(\lambda_0)$; положим $n = f_B(\lambda_0)$. По определению функции размерности существуют n ортогональных векторов $\{f_i,\ i=1,\ldots,n\}$, такие, что $Bf_i = \lambda_i f_i$ при $\lambda_i > \lambda_0$. Пусть M — линейная оболочка векторов f и E — ортогональный проектор на M. Так как $\lambda_i > \lambda_0$ при $i=1,\ldots,n$, то существует число $c>0$, такое, что

$$(f,\ Bf) \geqslant (\lambda_0 + c)(f,\ f), \quad f \in M.$$

Пусть $\{\lambda'_i,\ i=1,2,\ldots\}$ — последовательность собственных значений оператора A и $\{g_i,\ i=1,2,\ldots\}$ — соответствующая ортонормированная последовательность собственных векторов. Так как $f_A(\lambda_0) < f_B(\lambda_0) = n$, то $\lambda'_i \leqslant \lambda_0$ при $i \geqslant n$. Ясно, что линейная оболочка N векторов Eg_i, $i=1,\ldots,n-1$, содержится в M и $N \neq M$, так как $\dim N < \dim M$. Выберем ненулевой вектор $f \in N^\perp \cap M$ и оценим $(f,\ A_f)$ следующим образом:

$$(f,\ Af) = (Ef,\ AEf) = \sum_{i=1}^\infty \lambda'_i (Ef,\ g_i)(g_i,\ Ef) =$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \lambda'_i (f,\ Eg_i)(Eg_i,\ f),$$

и так как $f \in N^\perp$, то

$$(f,\ Af) = \sum_{i=n}^\infty \lambda'_i (f,\ Eg_i)(Eg_i,\ f).$$

Так как $\lambda'_i \leqslant \lambda_0$ при $i \geqslant n$, то $(f,\ Af) \leqslant \lambda_0 (f,\ f)$. Кроме того, $f \in M$ и, следовательно,

$$(f,\ Bf) \geqslant (\lambda_0 + c)(f,\ f).$$

Окончательно имеем

$$(f,\ (A-B)f) \leqslant -c(f,\ f) < 0,$$

что противоречит предположению $A \geqslant B$. Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Пусть A и B — положительные операторы с конечным следом в гильбертовом пространстве H. Тогда*

$$\|A-B\|_{\mathrm{tr}} + \mathrm{tr}\,(A+B) = 2 \inf\{\mathrm{tr}\, C;\ C \geqslant A,\ C \geqslant B\}.$$

Более того, существует оператор $C_0 \geqslant A, B$, *такой, что* $\|A - B\|_{tr} = \mathrm{tr}\,(2C_0 - A - B)$.

Доказательство. Так как $\|X\|_{tr} = \mathrm{tr}\,(X)$ для $X \geqslant 0$, то при $C \geqslant A$ и $C \geqslant B$ справедливо неравенство

$$\|A - B\|_{tr} \leqslant \|C - A\|_{tr} + \|C - B\|_{tr} = 2\,\mathrm{tr}\,(C) - \mathrm{tr}\,(A + B).$$

Следовательно,

$$\|A - B\|_{tr} + \mathrm{tr}\,(A + B) \leqslant 2 \inf\{\mathrm{tr}\,(C);\ C \geqslant A,\ C \geqslant B\}.$$

Докажем существование оператора $C_0 \geqslant A$, B, удовлетворяющего второму утверждению леммы. Для этого эрмитов оператор $A - B$ запишем в виде $A - B = C_1 - C_2$, где $C_1 \geqslant 0$, $C_2 \geqslant 0$ и $C_1 C_2 = C_2 C_1 = 0$. Тогда

$$\|A - B\|_{tr} = \|((A - B)^2)^{\frac{1}{2}}\|_{tr} = \|(C_1^2 + C_2^2)^{1/2}\| =$$
$$= \|C_1 - C_2\|_{tr} = \mathrm{tr}\,(C_1) + \mathrm{tr}\,(C_2).$$

Положим $C_0 = A + C_2$. Тогда $C_0 \geqslant A$ и $C_0 \geqslant B$, так как $C_0 - A = C_2 \geqslant 0$ и $C_0 - B = C_1 \geqslant 0$. Кроме того,

$$\mathrm{tr}\,(2C_0 - A - B) = \mathrm{tr}\,(C_1 - C_2) = \|A - B\|_{tr}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5.6. *Пусть* M — *фактор типа* I_n, ω_1, ω_2 — *состояния на* M *и* $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda'_i\}$ — *наборы собственных значений состояний* ω_1 *и* ω_2 *соответственно. Тогда*

$$\|\omega_1 - \omega_2\| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda'_i|.$$

Доказательство. Пусть $\{e_{ij}\}$ — семейство матричных единиц, порождающих фактор M, и A, B — положительные матрицы с элементами $\omega_1(e_{ij})$ и $\omega_2(e_{ij})$. Из леммы 5.2 следует, что $\|\omega_1 - \omega_2\| = \|A - B\|_{tr}$. Из леммы 5.4 следует, что существует матрица $C_0 \geqslant A$, B, такая, что

$$\|\omega_1 - \omega_2\| = \|A - B\|_{tr} = \mathrm{tr}\,(2C - A - B) =$$
$$= \int_0^\infty (2f_C(\lambda) - f_A(\lambda) - f_B(\lambda))\,d\lambda.$$

Наконец, из леммы 5.4 следует, что

$$f_C(\lambda) \geqslant f_A(\lambda) \quad \text{и} \quad f_C(\lambda) \geqslant f_B(\lambda)$$

для всех $0 < \lambda < \infty$. Следовательно,

$$|f_A(\lambda) - f_B(\lambda)| \leqslant 2f_C(\lambda) - f_A(\lambda) - f_B(\lambda)$$

при всех $0 < \lambda$ с ∞, и поэтому

$$\|\omega_1 - \omega_2\| \geqslant \int_0^\infty |f_A(\lambda) - f_B(\lambda)|\,d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i - \lambda'_i|.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.
2. Dixmier J., Les algèbres d'operators dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
3. Dixmier J., Les C^*-algebres et leurs répresentation, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
4. Glimm J., On a certain class of operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 318—340.
5. Glimm J., Type I C^*-algebras, *Ann. of Math.*, **73** (1961), 572—612.
6. Glimm J., Kadison R., Unitary operators in C^*-algebras, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 547—556.
7. Kaplansky I., A theorem on rings of operators, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 227—232.
8. Mackey G., Induced representations of locally compact groups II. The Frobenius reciprocity theorem, *Ann. of Math.*, **58** (1953), 193—221.
9. Murray F., von Neumann J., On rings of operations I, *Ann. of Math.*, **37** (1936), 116—229.
10. Murray F., von Neumann I., On rings of operators IV, *Ann. of Math.*, **44** (1943), 716—808.
11. Pukánszky L., Some examples of Factors, Publicationes Mathematicae, **4** (1956), 135—156.
12. Segal I., Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 73—88.
13. von Neumann J., On rings of operators, Reduction theory, *Ann. of Math.*, **50** (1949), 401—485.
14*. Наймарк М. А., Нормированные кольца, Наука, М., 1968.

*) Добавлено переводчиком.