



УДК 517.518

## Условия $L_{p,\lambda}$ -ограниченности потенциала Рисса, порожденного дифференциальным оператором Гегенбауэра

В. С. Гулиев, Э. Дж. Ибрагимов

В этой статье полученные результаты уточняют и дополняют теорему типа Харди–Литтлвуда–Соболева об ограниченности потенциала Рисса, порожденного дифференциальным оператором Гегенбауэра в пространствах  $L_{p,\lambda}$ , доказанную в ранней работе второго автора.

Библиография: 9 названий.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор Гегенбауэра, потенциал Гегенбауэра, оператор обобщенного сдвига.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11708>

**1. Введение и основной результат.** В данной статье доказана теорема типа Харди–Литтлвуда–Соболева об ограниченности потенциала Гегенбауэра. Полученный результат является аналогом соответствующих теорем, полученных для потенциалов Рисса в [1] и Бесселя–Рисса в [2], [3].

Рассмотрим потенциал Рисса (см. [1])

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y) dy}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n.$$

Классический результат Харди–Литтлвуда–Соболева состоит в том, что если  $1 < p < q < \infty$ , то  $I_\alpha$  ограниченно действует из  $L_p(\mathbb{R}^n)$  в  $L_q(\mathbb{R}^n)$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = n/p - n/q$  и  $p = 1 < q < \infty$ ;  $I_\alpha$  ограниченно действует из  $L_1(\mathbb{R}^n)$  в  $WL_q(\mathbb{R}^n)$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = n - n/q$ . Адамс в [1] изучал ограниченность потенциала Рисса в пространстве Морри и доказал следующую теорему.

**ТЕОРЕМА А.** Пусть  $0 < \alpha < n$  и  $0 \leq \lambda < n$ ,  $1 \leq p < (n - \lambda)/\alpha$ .

(1) Если  $1 < p < (n - \lambda)/\alpha$ , то условие

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n - \lambda}$$

необходимо и достаточно для ограниченности  $I_\alpha$  из  $M_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  в  $M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке первого Азербайджано–Российского международного грантового конкурса (грант № EIF-BGM-RFTF-1/2017-21/01/1). Работа В. С. Гулиева частично поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (грант № 02.а03.21.0008).

(2) Если  $p = 1$ , то условие

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n - \lambda}$$

необходимо и достаточно для ограниченности  $I_\alpha$  из  $M_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  в  $WM_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ .

В работе [2], [3] для  $(B - R)$ -потенциала

$$I_B^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} T^y |x|^{\alpha-n-|\gamma|} f(y) y^\gamma dy, \quad 0 < \alpha < n + |\gamma|,$$

где  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ ,  $B = (B_1, \dots, B_n)$

$$B_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ,  $\gamma_1 > 0, \dots, \gamma_n > 0$ ,  $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ ,  $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ , а

$$T^y f(x) = \pi^{-n/2} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{(\gamma_i + 1)}{2}\right) \Gamma^{-1}(\gamma_i) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i \times f\left(\sqrt{x_1^2 - 2x_1y_1 \cos \alpha_1 + y_1^2}, \dots, \sqrt{x_n^2 - 2x_ny_n \cos \alpha_n + y_n^2}\right) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

– обобщенный сдвиг Бесселя, получен аналог теоремы Харди–Литтлвуда–Соболева в следующем виде. Пусть  $0 < \alpha < n + |\gamma|$ ,  $1 < p < (n + |\gamma|)/\alpha$ . Тогда оператор  $I_B^\alpha$  является отображением “сильного типа” –  $(p, q)$ , тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha + |\gamma|}{n}$$

и “слабого типа” –  $(1, q)$ , тогда и только тогда, когда

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n + |\gamma|}.$$

Отметим, что при доказательстве необходимости авторы существенно использовали тот факт, что операторы  $I_\alpha$  и  $I_B^\alpha$  обладают свойством однородности. Рассматриваемый нами потенциал Гегенбауэра ( $(G - R)$ -потенциал) этим свойством не обладает. В работе [4] нами найдены лишь достаточные условия теоремы Харди–Литтлвуда–Соболева для потенциала Гегенбауэра.

Желая получить полный аналог теорем Харди–Литтлвуда–Соболева для потенциала Гегенбауэра, нам пришлось ввести соответствующий оператор растяжения.

В основе наших исследований лежит дифференциальный оператор Гегенбауэра [5]

$$G \equiv G_\lambda = (x^2 - 1)^{1/2-\lambda} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{\lambda+1/2} \frac{d}{dx}, \quad x \in (1, \infty), \quad \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Оператор обобщенного сдвига, ассоциированный с оператором  $G$ , имеет вид [4]

$$A_{\text{ch } t}^\lambda f(\text{ch } x) = \frac{\Gamma(\lambda + 1/2)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1/2)} \int_0^\pi f(\text{ch } x \text{ ch } t - \text{sh } x \text{ sh } t \cos \varphi) (\sin \varphi)^{2\lambda-1} d\varphi.$$

Этот оператор обладает свойствами аналогичными свойствам ООС из работ Левитана [6] и [7].

Обозначим  $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G) \equiv L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, \text{sh}^{2\lambda} x dx)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , пространство измеримых функций на  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)} = \left( \int_0^\infty |f(\text{ch } x)|^p \text{sh}^{2\lambda} x dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{\infty,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)} = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(\text{ch } x)|.$$

А через  $WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$  обозначим слабое  $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$  пространство локально интегрируемых функций  $f(\text{ch } x)$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ , с конечной нормой

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)} = \sup_{r>0} r |\{x \in \mathbb{R}_+ : |f(\text{ch } x)| > r\}|_\lambda^{1/p}$$

$$= \sup_{r>0} r \left( \int_{\{x \in \mathbb{R}_+ : |f(\text{ch } x)| > r\}} \text{sh}^{2\lambda} x dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Пусть  $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Тогда для любого  $t \in \mathbb{R}_+$  справедливо неравенство (см. [4; § 1, лемма 2])

$$\|A_{\text{ch } t}^\lambda f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)} \leq \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)}. \quad (1.1)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Оператор обобщенного сдвига  $A_{\text{ch } t}^\lambda$  на полупрямой с весом  $\text{sh}^{2\lambda} x$ ,  $0 < \lambda < 1/2$ , является частным случаем операторов обобщенного сдвига на полупрямой с весом  $\text{sh}^{2\alpha+1} x \text{ch}^{2\beta+1} x$ ,  $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ , построенных в [8], где для них также доказано неравенство (1.1).

В дальнейшем символ  $A \lesssim B$  будет означать, что существует постоянная  $c$  такая, что  $0 < A \leq cB$ , причем  $c$  может зависеть от некоторых несущественных параметров. Если  $A \lesssim B$  и  $B \lesssim A$ , то пишем  $A \approx B$ .

Максимальный оператор, порожденный  $G$ , имеет вид [9]

$$M_G f(\text{ch } x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|H(0, r)|_\lambda} \int_0^r A_{\text{ch } t}^\lambda |f(\text{ch } x)| \text{sh}^{2\lambda} t dt,$$

где

$$|H(0, r)|_\lambda = \int_0^r \text{sh}^{2\lambda} t dt,$$

причем (см. [9; § 1, лемма 1.1])

$$|H(0, r)|_\lambda \approx \begin{cases} \left(\text{sh} \frac{r}{2}\right)^{2\lambda+1}, & 0 < r < 2, \\ \left(\text{ch} \frac{r}{2}\right)^{4\lambda}, & 2 \leq r < \infty, \end{cases}$$

и поскольку  $\text{sh } x \leq \text{ch } x \leq 2 \text{sh } x$  при  $x \geq 1$ , то

$$|H(0, r)|_\lambda \approx \begin{cases} \left(\text{sh} \frac{r}{2}\right)^{2\lambda+1}, & 0 < r < 2, \\ \left(\text{sh} \frac{r}{2}\right)^{4\lambda}, & 2 \leq r < \infty. \end{cases} \quad (1.2)$$

Для максимальной функции, порожденной оператором  $G$ , справедлива следующая теорема [9; § 2, теорема 2.2].

**ТЕОРЕМА 1.** (а) Если  $f \in L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$ , то для любого  $\alpha > 0$  и  $0 < \lambda < 1/2$  справедливо неравенство

$$|\{x : M_G f(\text{ch } x) > \alpha\}|_\lambda \leq \frac{c_\lambda}{\alpha} \|f\|_{L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)},$$

где  $c_\lambda > 0$  и зависит только от  $\lambda$ .

(б) Если  $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$ ,  $1 < p \leq \infty$ , то

$$M_G f(\text{ch } x) \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G) \quad \text{и} \quad \|M_G f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)} \leq c_{p,\lambda} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)},$$

где  $c_{p,\lambda} > 0$  и зависит от  $p$  и  $\lambda$ .

Рассмотрим потенциал Гегенбауэра [9]

$$I_G^\alpha f(\text{ch } x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty r^{\alpha/2-1} h_r(\text{ch } t) dr \right) A_{\text{ch } t}^\lambda f(\text{ch } x) \text{sh}^{2\lambda} t dt,$$

где

$$h_r(\text{ch } t) = \int_1^\infty e^{-\gamma(\gamma+2\lambda)r} P_\gamma^\lambda(\text{ch } t) (\gamma^2 - 1)^{\lambda-1/2} d\gamma, \quad 0 < \alpha < 2\lambda + 1, \quad (1.3)$$

а

$$P_\gamma^\lambda(\text{ch } t) = \frac{\Gamma(\gamma + 2\lambda) \cos \pi\lambda}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda + 1)} (2 \text{ch } t)^{-\gamma-2\lambda} {}_2F_1\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda, \frac{\gamma}{2} + \lambda + \frac{1}{2}, \gamma + \lambda + 1, (\text{ch } t)^{-2}\right)$$

есть функция Гегенбауэра (см. [9; (2.3)]).

В [9; § 4] показано, что при  $\alpha \geq 2\lambda + 1$  для  $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$   $I_G^\alpha f$  не существует.

Имеет место следующая теорема типа Харди–Литтлвуда–Соболева для потенциала Гегенбауэра  $I_G^\alpha f$ , см. [9; § 4, теорема 4.1].

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $0 < \lambda < 1/2$ ,  $1 - 2\lambda < \alpha < 1 + 2\lambda$ ,  $1 \leq p < (2\lambda + 1)/\alpha$  и  $1/p - 1/q = \alpha/(2\lambda + 1)$

(а) Если  $1 < p < (2\lambda + 1)/\alpha$ ,  $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$ , то  $I_G^\alpha f \in L_{q,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$  и

$$\|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)} \lesssim \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)}.$$

(б) Если  $f \in L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$ ,  $1/q = 1 - \alpha/(2\lambda + 1)$ , то

$$\|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)} \lesssim \|f\|_{L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)}.$$

Этот результат уточняется и дополняется следующим образом.

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $0 < \lambda < 1/2$ ,  $0 < \alpha < 2\lambda + 1$  и  $1 \leq p < (2\lambda + 1)/\alpha$ .

(а) Если  $1 < p < (2\lambda + 1)/\alpha$ , то условие

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2\lambda + 1}$$

является необходимым и достаточным для ограниченности  $I_G^\alpha$  из  $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$  в  $L_{q,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$ .

(б) Если  $p = 1$ , то условие

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2\lambda + 1}$$

является необходимым и достаточным для ограниченности  $I_G^\alpha$  из  $L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$  в  $WL_{q,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$ .

**2. Доказательство теоремы 3.** (а) *Достаточность.* Пусть  $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$ . Тогда из (1.3) имеем

$$\begin{aligned} I_G^\alpha f(\operatorname{ch} x) &= \left( \int_0^r + \int_r^\infty \right) \left( \int_0^\infty r^{\alpha/2-1} h_r(\operatorname{ch} t) dr \right) A_{\operatorname{ch} t}^\lambda f(\operatorname{ch} x) \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt \\ &= A_1(x, r) + A_2(x, r). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим  $A_1(x, r)$ . Пусть  $0 < r < 2$ . Тогда имеем (см. [9; следствие 3.1])

$$\begin{aligned} |A_1(x, r)| &\leq \int_0^r A_{\operatorname{ch} t}^\lambda |f(\operatorname{ch} x)| (\operatorname{sh} t)^{2\lambda} (\operatorname{sh} t)^{\alpha-2\lambda-1} dt \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty \int_{r/2^{k+1}}^{r/2^k} \frac{A_{\operatorname{ch} t}^\lambda |f(\operatorname{ch} x)| \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt}{(\operatorname{sh} t)^{2\lambda+1-\alpha}} \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty \left( \operatorname{sh} \frac{r}{2^{k+1}} \right)^\alpha \left( \operatorname{sh} \frac{r}{2^{k+1}} \right)^{-2\lambda-1} \int_0^{r/2^k} A_{\operatorname{ch} t} |f(\operatorname{ch} x)| \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt \\ &\lesssim M_G f(\operatorname{ch} x) \sum_{k=0}^\infty \left( \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{sh} r \right)^\alpha \lesssim (\operatorname{sh} r)^\alpha M_G f(\operatorname{ch} x) \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^{(k+1)\alpha}} \\ &\lesssim (\operatorname{sh} r)^\alpha M_G f(\operatorname{ch} x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

так как  $\operatorname{sh}(t/a) \leq (1/a) \operatorname{sh} t$  при  $a \geq 1$ .

Теперь пусть  $2 \leq r < \infty$  и  $0 < \alpha < 4\lambda$ . Тогда (см. в [9; док-во следствия 3.1])

$$\begin{aligned} |A_1(x, r)| &\leq \int_0^r \frac{A_{\operatorname{ch} t}^\lambda |f(\operatorname{ch} x)| \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt}{(\operatorname{ch} t)^{2\lambda+1-\alpha}} \leq \int_0^r \frac{A_{\operatorname{ch} t}^\lambda |f(\operatorname{ch} x)| \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt}{(\operatorname{ch} t)^{4\lambda-\alpha}} \\ &\leq \int_0^r \frac{A_{\operatorname{ch} t}^\lambda |f(\operatorname{ch} x)| \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt}{(\operatorname{sh} t)^{4\lambda-\alpha}} \leq \sum_{k=0}^\infty \int_{r/2^{k+1}}^{r/2^k} \frac{A_{\operatorname{ch} t}^\lambda |f(\operatorname{ch} x)| \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt}{(\operatorname{sh} t)^{4\lambda-\alpha}} \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty \left( \operatorname{sh} \frac{r}{2^{k+1}} \right)^\alpha \left( \operatorname{sh} \frac{r}{2^{k+1}} \right)^{-4\lambda} \int_0^{r/2^k} A_{\operatorname{ch} t}^\lambda |f(\operatorname{ch} x)| \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt \\ &\lesssim M_G f(\operatorname{ch} x) \sum_{k=0}^\infty \left( \operatorname{sh} \frac{r}{2^{k+1}} \right)^\alpha \lesssim (\operatorname{sh} r)^\alpha M_G f(\operatorname{ch} x), \quad 0 < \alpha < 4\lambda. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Теперь, пусть  $4\lambda \leq \alpha < 2\lambda + 1$ . Из доказательства следствия 3.1 из [9] следует, что  $\int_0^\infty r^{\alpha/2-1} h_r f(\operatorname{ch} r) dr \lesssim 1$ . Тогда из (1.3) имеем

$$\begin{aligned} |A_1(x, r)| &\lesssim \int_0^r A_{\operatorname{ch} t}^\lambda |f(\operatorname{ch} x)| \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt = \frac{(\operatorname{sh} r/2)^{4\lambda}}{(\operatorname{sh} r/2)^{4\lambda}} \int_0^r A_{\operatorname{ch} t}^\lambda |f(\operatorname{ch} x)| \operatorname{sh}^{2\lambda} t dt \\ &\lesssim \left( \operatorname{sh} \frac{r}{2} \right)^{4\lambda} M_G f(\operatorname{ch} x) \leq (\operatorname{sh} r)^\alpha M_G f(\operatorname{ch} x), \quad 4\lambda \leq \alpha < 2\lambda + 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, из (2.2)–(2.4) следует, что при любом  $0 < r < \infty$  и  $0 < \alpha < 2\lambda + 1$  имеет место оценка (2.2).

Рассмотрим  $A_2(x, r)$ . Из (1.3) по неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}
 |A_2(x, r)| &\leq \left( \int_r^\infty |A_{\text{ch } t}^\lambda f(\text{ch } x)|^p \text{sh}^{2\lambda} t \, dt \right)^{1/p} \left( \int_r^\infty (\text{sh } t)^{(\alpha-2\lambda-1)q} \text{sh}^{2\lambda} t \, dt \right)^{1/q} \\
 &\leq \|A_{\text{ch } t}^\lambda f\|_{L_{p,\lambda}} \left( \int_{r/2}^\infty (\text{sh } t)^{(\alpha-2\lambda-1)q+2\lambda} \text{ch } t \, dt \right)^{1/q} \\
 &\leq \|f\|_{L_{p,\lambda}} \left( \frac{(\text{sh } r)^{(\alpha-2\lambda-1)q+2\lambda+1}}{(2\lambda+1-\alpha)q-2\lambda-1} \right)^{1/q} \\
 &\lesssim (\text{sh } r)^{\alpha-2\lambda-1+(2\lambda+1)/q} \|f\|_{L_{p,\lambda}} = (\text{sh } r)^{\alpha-2\lambda-1+(2\lambda+1)(1/p-\alpha/(2\lambda+1))} \|f\|_{L_{p,\lambda}} \\
 &= (\text{sh } r)^{(2\lambda+1)(1/p-1)} \|f\|_{L_{p,\lambda}} = (\text{sh } r)^{-(2\lambda+1)/q} \|f\|_{L_{p,\lambda}}. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Из (2.2) и (2.5) имеем

$$|I_G^\alpha f(\text{ch } x)| \lesssim (\text{sh } r)^\alpha M_G f(\text{ch } x) + (\text{sh } r)^{-(2\lambda+1)/q} \|f\|_{L_{p,\lambda}}. \tag{2.6}$$

Минимум правой части (2.6) достигается при

$$\text{sh } r = \left( \frac{2\lambda+1}{\alpha q} \cdot \frac{\|f\|_{L_{p,\lambda}}}{M_G f(\text{ch } x)} \right)^{p/(2\lambda+1)}.$$

Тогда из (2.6) имеем

$$\begin{aligned}
 |I_G^\alpha f(\text{ch } x)| &\lesssim \left( \frac{\|f\|_{L_{p,\lambda}}}{M_G f(\text{ch } x)} \right)^{\alpha p/(2\lambda+1)} M_G f(\text{ch } x) + \left( \frac{\|f\|_{L_{p,\lambda}}}{M_G f(\text{ch } x)} \right)^{-p/q} \|f\|_{L_{p,\lambda}} \\
 &= (M_G f(\text{ch } x))^{p/q} \|f\|_{L_{p,\lambda}}^{1-p/q},
 \end{aligned}$$

так как из условия  $1/p - 1/q = \alpha/(2\lambda + 1)$  следует  $1 - p/q = \alpha p/(2\lambda + 1)$ .

Отсюда имеем

$$\int_0^\infty |I_G^\alpha f(\text{ch } t)|^q \text{sh}^{2\lambda} t \, dt \leq \|M_G f\|_{L_{p,\lambda}}^p \cdot \|f\|_{L_{p,\lambda}}^{q-p} \leq \|f\|_{L_{p,\lambda}}^p \|f\|_{L_{p,\lambda}}^{q-p} = \|f\|_{L_{p,\lambda}}^q,$$

откуда следует, что

$$\|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} \lesssim \|f\|_{L_{p,\lambda}},$$

т.е., отображение  $f \rightarrow I_G^\alpha$  является отображением сильного типа  $(p, q)$ .

(b) *Достаточность.* Пусть  $f \in L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+, G)$ . Из (2.1) имеем

$$\begin{aligned}
 &|\{x \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\text{ch } x)| > 2\beta\}|_\lambda \\
 &\leq |\{x \in \mathbb{R}_+ : |A_1(x, r)| > \beta\}|_\lambda + |\{x \in \mathbb{R}_+ : |A_2(x, r)| > \beta\}|_\lambda.
 \end{aligned}$$

Из неравенства (2.2) и теоремы 2 получаем, что

$$\begin{aligned}
 &\beta |\{x \in \mathbb{R}_+ : |A_1(x, r)| > \beta\}|_\lambda \\
 &= \beta \int_{\{x \in \mathbb{R}_+ : |A_1(x, r)| > \beta\}} \text{sh}^{2\lambda} x \, dx \leq \beta \int_{\{x \in \mathbb{R}_+ : M_G f(\text{ch } x) > \beta/c_\lambda(\text{sh } r)^\alpha\}} \text{sh}^{2\lambda} x \, dx \\
 &= \beta \left| \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : M_G f(\text{ch } x) > \frac{\beta}{c_\lambda(\text{sh } r)^\alpha} \right\} \right|_\lambda \\
 &\lesssim \beta \frac{(\text{sh } r)^\alpha}{\beta} \int_0^\infty |f(\text{ch } x)| \text{sh}^{2\lambda} x \, dx = (\text{sh } r)^\alpha \|f\|_{L_{1,\lambda}},
 \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} |A_2(x, r)| &\leq \int_r^\infty |A_{\text{ch } t}^\lambda f(\text{ch } x)| (\text{sh } t)^{\alpha-2\lambda-1} \text{sh}^{2\lambda} t \, dt \\ &\leq (\text{sh } r)^{\alpha-2\lambda-1} \int_r^\infty |A_{\text{ch } t}^\lambda f(\text{ch } x)| \text{sh}^{2\lambda} t \, dt \leq (\text{sh } r)^{-(2\lambda+1)/q} \|f\|_{L_{1,\lambda}}. \end{aligned}$$

Положив  $(\text{sh } r)^{-(2\lambda+1)/q} \|f\|_{L_{1,\lambda}} = \beta$ , мы получим  $|A_2(x, r)| \leq \beta$  и, следовательно,

$$|\{x \in \mathbb{R}_+ : |A_2(x, r)| > \beta\}|_\lambda = 0.$$

Наконец, имеем

$$\begin{aligned} &|\{x \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\text{ch } x)| > 2\beta\}|_\lambda \\ &\lesssim \frac{1}{\beta} (\text{sh } r)^\alpha \|f\|_{L_{1,\lambda}} \lesssim (\text{sh } r)^{\alpha+(2\lambda+1)/q} = (\text{sh } r)^{2\lambda+1} = \left(\frac{1}{\beta} \|f\|_{L_{1,\lambda}}\right)^q. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} \lesssim \|f\|_{L_{1,\lambda}}.$$

Таким образом, отображение  $f \rightarrow I_G^\alpha f$  является отображением слабого типа  $(1, q)$ .

(а) *Необходимость.* Пусть  $1 < p < (2\lambda+1)/\alpha$ ,  $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$  и  $I_G^\alpha$  ограничено действует из  $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$  в  $L_{q,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ , т.е.

$$\|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} \lesssim \|f\|_{L_{p,\lambda}}. \quad (2.7)$$

В дальнейшем функцию  $f$  предполагаем положительной и монотонно возрастающей. Функцию растяжения  $f_t(\text{ch } x)$  определим следующим образом:

$$\begin{cases} f(\text{ch}(\text{th } t)x) \leq f_t(\text{ch } x) \leq f(\text{ch}(\text{cth } t)x), & 0 < t < 1, \\ f(\text{ch}(\text{th } t)x) \leq f_t(\text{ch } x) \leq f(\text{ch}(\text{sh } t)x), & 1 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (2.8)$$

Из (2.8) при  $0 < t < 1$  имеем

$$\begin{aligned} \|f_t\|_{L_{p,\lambda}} &= \left( \int_0^\infty |f_t(\text{ch } x)|^p \text{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_0^\infty |f(\text{ch}(\text{cth } t)x)|^p \text{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/p} \\ &= \int_{(\text{cth } t)x=u, \text{sh } t u = \text{ch } x}^{\text{ch } x = u, \text{th } t u = \text{ch } x} (\text{th } t)^{1/p} \left( \int_0^\infty |f(\text{ch } u)|^p \text{sh}^{2\lambda} (\text{th } t)u \, du \right)^{1/p} \\ &\leq (\text{th } t)^{(2\lambda+1)/p} \left( \int_0^\infty |f(\text{ch } u)|^p \text{sh}^{2\lambda} u \, du \right)^{1/p} \\ &= (\text{th } t)^{(2\lambda+1)/p} \|f\|_{L_{p,\lambda}} = \left( \frac{\text{sh } t}{\text{ch } t} \right)^{(2\lambda+1)/p} \|f\|_{L_{p,\lambda}} \\ &\lesssim \frac{1}{(\text{ch } t)^{(2\lambda+1)/p-\alpha}} \|f\|_{L_{p,\lambda}} \leq (\text{sh } t)^{\alpha-(2\lambda+1)/p} \|f\|_{L_{p,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|f_t\|_{L_{p,\lambda}} &= \left( \int_0^\infty |f_t(\operatorname{ch} x)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/p} \geq \left( \int_0^\infty |f(\operatorname{ch}(\operatorname{th} t)x)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/p} \\ &\stackrel{[(\operatorname{th} t)x=u, \operatorname{d}x=(\operatorname{cth} t) \operatorname{d}u]}{=} (\operatorname{cth} t)^{1/p} \left( \int_0^\infty |f(\operatorname{ch} u)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda}(\operatorname{cth} t)u \, du \right)^{1/p} \\ &\geq (\operatorname{cth} t)^{(2\lambda+1)/p} \left( \int_0^\infty |f(\operatorname{ch} u)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda} u \, du \right)^{1/p} = (\operatorname{cth} t)^{(2\lambda+1)/p} \|f\|_{L_{p,\lambda}} \\ &\geq (\operatorname{cth} t)^{(2\lambda+1)/p-\alpha} \|f\|_{L_{p,\lambda}} \geq (\operatorname{sh} t)^{\alpha-(2\lambda+1)/p} \|f\|_{L_{p,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пусть, теперь  $1 \leq t < \infty$ . Тогда из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \|f_t\|_{L_{p,\lambda}} &= \left( \int_0^\infty |f_t(\operatorname{ch} x)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/p} \geq \left( \int_0^\infty |f(\operatorname{ch}(\operatorname{th} t)x)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/p} \\ &\stackrel{[(\operatorname{th} t)x=u, \operatorname{d}x=(\operatorname{cth} t) \operatorname{d}u]}{=} (\operatorname{cth} t)^{1/p} \left( \int_0^\infty |f(\operatorname{ch} u)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda}(\operatorname{cth} t)u \, du \right)^{1/p} \\ &\geq (\operatorname{cth} t)^{(2\lambda+1)/p} \left( \int_0^\infty |f(\operatorname{ch} u)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda} u \, du \right)^{1/p} \\ &\geq (\operatorname{cth} t)^{(2\lambda+1)/p-\alpha} \|f\|_{L_{p,\lambda}} \geq (\operatorname{sh} t)^{\alpha-(2\lambda+1)/p} \|f\|_{L_{p,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|f_t\|_{L_{p,\lambda}} &\leq \left( \int_0^\infty |f(\operatorname{ch}(\operatorname{sh} t)x)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/p} \\ &\stackrel{[(\operatorname{sh} t)x=u, \operatorname{d}x=du/\operatorname{sh} t]}{=} (\operatorname{sh} t)^{-1/p} \left( \int_0^\infty |f(\operatorname{ch} u)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda} \frac{u}{\operatorname{sh} t} \, du \right)^{1/p} \\ &\leq (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/p} \left( \int_0^\infty |f(\operatorname{ch} u)|^p \operatorname{sh}^{2\lambda} u \, du \right)^{1/p} \\ &\leq (\operatorname{sh} t)^{\alpha-(2\lambda+1)/p} \|f\|_{L_{p,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Объединяя (2.9)–(2.12), получаем, что

$$\|f_t\|_{L_{p,\lambda}} \approx (\operatorname{sh} t)^{\alpha-(2\lambda+1)/p} \|f\|_{L_{p,\lambda}}, \quad 0 < t < \infty. \quad (2.13)$$

Далее, из (1.3) при  $0 < t < 1$  и из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \|I_G^\alpha f_t\|_{L_{q,\lambda}} &= \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f_t(\operatorname{ch} x)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/q} \leq \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch}(\operatorname{cth} t)x)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/q} \\ &\stackrel{[(\operatorname{cth} t)x=u, x=(\operatorname{th} t) \operatorname{d}u]}{=} (\operatorname{th} t)^{1/q} \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda}(\operatorname{th} t)u \, du \right)^{1/q} \\ &\leq (\operatorname{th} t)^{(2\lambda+1)/q} \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda} u \, du \right)^{1/q} \\ &= (\operatorname{th} t)^{(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} \\ &\leq \left( \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} \right)^{(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} \lesssim (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 \|I_G^\alpha f_t\|_{L_{q,\lambda}} &\geq \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch}(\operatorname{th} t)x)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/q} \\
 &\stackrel{[(\operatorname{th} t)x=u, dx=(\operatorname{cth} t) du]}{\geq} (\operatorname{cth} t)^{1/q} \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda}(\operatorname{cth} t)u \, du \right)^{1/q} \\
 &\geq (\operatorname{cth} t)^{(2\lambda+1)/q} \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda} u \, du \right)^{1/q} \\
 &= \left( \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} \right)^{(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} \geq (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}}. \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Теперь, пусть  $1 \leq t < \infty$ . Тогда из (2.8) имеем

$$\begin{aligned}
 \|I_G^\alpha f_t\|_{L_{q,\lambda}} &\geq \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch}(\operatorname{th} t)x)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/q} \\
 &\stackrel{[(\operatorname{th} t)x=u, dx=(\operatorname{cth} t) du]}{\geq} (\operatorname{cth} t)^{1/q} \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda}(\operatorname{cth} t)u \, du \right)^{1/q} \\
 &\geq (\operatorname{cth} t)^{(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} \geq (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}}. \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 \|I_G^\alpha f_t\|_{L_{q,\lambda}} &\leq \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch}(\operatorname{sh} t)x)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/q} \\
 &\stackrel{[(\operatorname{sh} t)x=u, dx=du/\operatorname{sh} t]}{\leq} (\operatorname{sh} t)^{-1/q} \left( \int_0^\infty |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)|^q \operatorname{sh}^{2\lambda} \frac{u}{\operatorname{sh} t} \, du \right)^{1/q} \\
 &\leq (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}}. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Объединяя (2.14)–(2.17), получаем, что

$$\|I_G^\alpha f_t\|_{L_{q,\lambda}} \approx (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}}, \quad 0 < t < \infty. \tag{2.18}$$

Учитывая неравенство (2.7), а также (2.18) и (2.13), получим

$$\begin{aligned}
 \|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} &\approx (\operatorname{sh} t)^{(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f_t\|_{L_{q,\lambda}} \lesssim (\operatorname{sh} t)^{(2\lambda+1)/q} \|f_t\|_{L_{p,\lambda}} \\
 &\lesssim (\operatorname{sh} t)^{\alpha-(2\lambda+1)/p+(2\lambda+1)/q} \|f\|_{L_{p,\lambda}} = (\operatorname{sh} t)^{\alpha+(2\lambda+1)(1/q-1/p)} \|f\|_{L_{p,\lambda}}.
 \end{aligned}$$

Если  $1/p - 1/q < \alpha/(2\lambda + 1)$ , то при  $t \rightarrow 0$  имеем

$$\|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} = 0 \quad \text{для всех } f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G).$$

Если  $1/p - 1/q > \alpha/(2\lambda + 1)$ , то при  $t \rightarrow \infty$  имеем

$$\|I_G^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}} = 0 \quad \text{для всех } f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+, G),$$

что невозможно.

Следовательно,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2\lambda + 1}.$$

(b) *Необходимость.* Предварительно найдем оценки для  $\|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}}$ . Из (2.8) при  $0 < t < 1$  имеем

$$\begin{aligned} \|I_G^\alpha f_t\|_{WL_{q,\lambda}} &\geq \sup_{r>0} r \left( \int_{\{x \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\operatorname{ch}(th)t)x| > r\}} \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/q} \\ &\stackrel{[(th)t)x=u, dx=(cth)t \, du]}{=} \sup_{r>0} r (cth t)^{1/q} \left( \int_{\{u \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)| > r\}} \operatorname{sh}^{2\lambda} (cth t)u \, du \right)^{1/q} \\ &\geq \sup_{r>0} (cth t)^{(2\lambda+1)/q} \left( \int_{\{u \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)| > r\}} \operatorname{sh}^{2\lambda} u \, du \right)^{1/q} \\ &= (th t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} \geq (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

С другой стороны, из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \|I_G^\alpha f_t\|_{WL_{q,\lambda}} &\leq \sup_{r>0} r \left( \int_{\{x \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\operatorname{ch}(cth)t)x| > r\}} \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/q} \\ &\stackrel{[(cth)t)x=u, dx=(th)t \, du]}{=} (th t)^{1/q} \sup_{r>0} r \left( \int_{\{u \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)| > r\}} \operatorname{sh}^{2\lambda} (th t)u \, du \right)^{1/q} \\ &\leq (th t)^{(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} = \left( \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \right)^{(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} \\ &\lesssim \frac{1}{(\operatorname{ch} t)^{(2\lambda+1)/q}} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} \leq (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Рассмотрим случай, когда  $1 \leq t < \infty$ . Из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \|I_G^\alpha f_t\|_{WL_{q,\lambda}} &\geq \sup_{r>0} r \left( \int_{\{x \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\operatorname{ch}(th)t)x| > r\}} \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/q} \\ &\stackrel{[(th)t)x=u, dx=(cth)t \, du]}{=} (cth t)^{1/q} \sup_{r>0} r \left( \int_{\{u \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)| > r\}} \operatorname{sh}^{2\lambda} (cth t)u \, du \right)^{1/q} \\ &\geq (cth t)^{(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} \geq (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|I_G^\alpha f_t\|_{WL_{q,\lambda}} &\leq \sup_{r>0} r \left( \int_{\{x \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\operatorname{ch}(\operatorname{sh} t)x)| > r\}} \operatorname{sh}^{2\lambda} x \, dx \right)^{1/q} \\ &\stackrel{[(\operatorname{sh} t)x=u, dx=du/\operatorname{sh} t]}{=} (\operatorname{sh} t)^{-1/q} \sup_{r>0} r \left( \int_{\{u \in \mathbb{R}_+ : |I_G^\alpha f(\operatorname{ch} u)| > r\}} \operatorname{sh}^{2\lambda} \left( \frac{u}{\operatorname{sh} t} \right) du \right)^{1/q} \\ &\leq (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из (2.19)–(2.22) имеем при  $0 < t < \infty$

$$\|I_G^\alpha f_t\|_{WL_{q,\lambda}} \approx (\operatorname{sh} t)^{-(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}}. \quad (2.23)$$

Пусть  $I_G^\alpha$  ограниченно действует из  $L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+)$  в  $WL_{q,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ , т.е.

$$\|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} \lesssim \|f\|_{L_{1,\lambda}}.$$

Тогда из (2.13)–(2.23) имеем

$$\begin{aligned} \|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} &\approx (\operatorname{sh} t)^{(2\lambda+1)/q} \|I_G^\alpha f_t\|_{WL_{q,\lambda}} \\ &\lesssim (\operatorname{sh} t)^{(2\lambda+1)/q} \|f_t\|_{L_{1,\lambda}} \lesssim (\operatorname{sh} t)^{(2\lambda+1)/q} (\operatorname{sh} t)^{\alpha-2\lambda-1} \|f\|_{L_{1,\lambda}} \\ &= (\operatorname{sh} t)^{\alpha-(2\lambda+1)(1-1/q)} \|f\|_{L_{1,\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Если  $1 - 1/q < \alpha/(2\lambda + 1)$ , то при  $t \rightarrow 0$

$$\|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} = 0 \quad \text{для всех } f \in L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+, G).$$

Если  $1 - 1/q > \alpha/(2\lambda + 1)$ , то при  $t \rightarrow \infty$

$$\|I_G^\alpha f\|_{WL_{q,\lambda}} = 0 \quad \text{для всех } f \in L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+, G),$$

что невозможно.

Следовательно,

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2\lambda + 1}.$$

Авторы благодарны рецензенту за полезные советы и ценные замечания.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. R. Adams, “A note on Riesz potential”, *Duke Math. J.*, **42**:4 (1975), 765–778.
- [2] V. S. Guliyev, “On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator”, *Math. Inequal. Appl.*, **6**:2 (2003), 317–330.
- [3] V. S. Guliyev, J. Hasanov, “Necessary and sufficient conditions for the boundedness of  $B$ -Riesz potential in the  $B$ -Morrey spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **347**:1 (2008), 113–122.
- [4] V. S. Guliyev, E. J. Ibrahimov, S. Ar. Jafarova, “Gegenbauer harmonic analysis and approximation of functions on the half line”, *Adv. in Anal.*, **2**:3 (2017), 167–195.
- [5] L. Durant, P. M. Fisbane, L. M. Simmons, “Expansion formulas and addition theorems for Gegenbauer functions”, *J. Math. Phys.*, **17**:11 (1976), 1933–1948.
- [6] Б. М. Левитан, “Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье”, *УМН*, **6**:2(42) (1951), 102–143.
- [7] Б. М. Левитан, *Теория операторов обобщенного сдвига*, Наука, М., 1973.
- [8] M. Flensted-Jensen, T. H. Koornwinder, “The convolution structure for Jacobi function expansions”, *Ark. Mat.*, **11** (1973), 245–262.
- [9] E. J. Ibrahimov, A. Akbulut, “The Hardy–Littlewood–Sobolev theorem for Riesz potential generated by Gegenbauer operator”, *Trans. A. Razmadze Math. Inst.*, **170**:2 (2016), 166–199.

**В. С. Гулиев**

Институт математики и механики НАН  
Азербайджана;  
Математический институт имени С.М. Никольского,  
Российский университет дружбы народов  
E-mail: [vagif@guliyev.com](mailto:vagif@guliyev.com)

Поступило

30.05.2017

После переработки

24.07.2018

Принято к публикации

12.09.2018

**Э. Дж. Ибрагимов**

Институт математики и механики НАН  
Азербайджана  
E-mail: [elmanibrahimov@yahoo.com](mailto:elmanibrahimov@yahoo.com)