V. N. Remeslennikov, N. S. Romanovskii, Quasivarieties and q-Compact Classes of Abelian Groups, *Algebra Logika*, 2001, Volume 40, Number 6, 675–684

Алгебра и логика, 40, N 6 (2001), 675–684

УДК 512.5

КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ И q-КОМПАКТНЫЕ КЛАССЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП*)

В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ, Н. С. РОМАНОВСКИЙ

Введение

Интерес к классам групп, указанным в заголовке статьи, мотивирован задачами алгебраической геометрии над группами, в частности, теми связями между алгебраической геометрией и универсальной алгеброй, которые детально исследованы в [1]. Напомним некоторые из них применительно к классу абелевых групп.

Пусть фиксирована абелева группа A. Для целей алгебраической геометрии необходимо рассмотреть категорию абелевых A-групп, т. е. таких абелевых групп, которые содержат в качестве подгруппы отмеченную копию группы A. В этой категории естественным образом вводятся понятия A-подгруппы, A-гомоморфизма, A-свободной группы, A-декартовой суммы. В последней конструкции отмеченная копия A является диагональю в декартовой сумме A-групп. Стандартный язык первой ступени теории абелевых групп, который обозначим символом L, состоит из символа сложения $+$, символа противоположного элемента $-$, и символа нулевого элемента A.

Категория A-групп рассматривается в языке L_A, который получается из L добавлением новых констант для всех ненулевых элементов из A.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 99-01-00567 и 99-01-01097, а также научной программы Министерства образования РФ "Фундаментальные исследования высшей школы. Университеты России".

В языке L_A естественным способом определяются понятия A-тождества, A-квазитождества, A-многообразия, A-квазимногообразия и доказываются обычные теоремы о характеризации этих классов групп (детали см. в [1—3]). Кроме того, если $\mathcal{K}$ — класс абелевых A-групп, то определим A-предмногообразие, порожденное классом $\mathcal{K}$, как наименьший класс групп, содержащий $\mathcal{K}$ и замкнутый относительно A-декартовых сумм и A-подгрупп (обозначим его через $A\text{-pvar}\,(\mathcal{K})$). Напомним (см. [4]), что A-квазимногообразия абелевых групп характеризуются как классы абелевых A-групп, замкнутые относительно подгрупп, A-декартовых сумм и A-ультрапроизведений. Через $A\text{-qvar}\,(K)$ обозначается A-квазимногообразие, порожденное классом $\mathcal{K}$. Следующий результат устанавливает связь между алгебраической геометрией и универсальной алгеброй.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А [1]. *Для данной A-группы B координатные группы алгебраических множеств над B — это в точности конечно-порожденные группы предмногообразия* $A\text{-pvar}\,(B)$.

К сожалению, в общем случае класс $A\text{-pvar}\,(B)$ не аксиоматизируем, а потому вычисление радикала системы уравнений над B (определение см. в [1]) относительно $A\text{-pvar}\,(B)$ является задачей, неформализуемой в логике первой ступени. Ситуация значительно упрощается, если верно равенство $A\text{-pvar}\,(B) = A\text{-qvar}\,(B)$, ибо последний класс, по определению, аксиоматизируем. Полное решение проблемы, когда $A\text{-pvar}\,(B) = A\text{-qvar}\,(B)$, получил В. А. Горбунов [4]. Следуя ему, скажем, что класс $\mathcal{K}$ A-групп является q-компактным, если для произвольных множества букв X и системы уравнений $S(X) = 1$ с коэффициентами из A любое ее следствие $f(x) = 1$ над $\mathcal{K}$ будет следствием некоторой конечной подсистемы. В. А. Горбунов доказал, что для класса $\mathcal{K}$ имеет место равенство $A\text{-pvar}\,(\mathcal{K}) = A\text{-qvar}\,(\mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ является q-компактным классом. Поэтому, очень важно получить описание q-компактных классов систем внутри заданного класса алгебраических систем. В § 1 настоящей статьи эта проблема решается для классов абелевых групп (без констант), а затем в § 2 — для случая, когда класс A-групп состоит из самой группы A.

Второй вопрос, рассматриваемый в этой статье, связан с проблемой описания радикала для данной системы уравнений над A-группой B. Это требует удовлетворительного описания системы аксиом для A-$\mathrm{qvar}\,(B)$ (подробнее см. в [1]). Данная задача решена в § 3. Отметим, что случай, когда $B = A$, рассмотрен в [1].

§ 1. q-компактные классы абелевых групп

В этом параграфе для произвольного класса $\mathcal{K}$ абелевых групп будут найдены необходимые и достаточные условия, при которых класс $\mathcal{K}$ является q-компактным, т. е. $\mathrm{pvar}\,\mathcal{K} = \mathrm{qvar}\,\mathcal{K}$.

Введем следующие обозначения:

$e(\mathcal{K})$ — период класса $\mathcal{K}$;

$C(\mathcal{K})$ — циклическая группа порядка $e(\mathcal{K})$, если $e(\mathcal{K}) < \infty$, или Q, если $e(\mathcal{K}) = \infty$;

$e_p(\mathcal{K})$ — период p-примарных компонент групп из класса $\mathcal{K}$, где p — простое число;

$C_p(\mathcal{K})$ — циклическая группа порядка $e_p(\mathcal{K})$, если $e_p(\mathcal{K}) < \infty$, или $C(p^\infty)$, если $e_p(\mathcal{K}) = \infty$;

$M = \mathrm{pvar}\,\mathcal{K}$, $M' = \mathrm{qvar}\,\mathcal{K}$.

ЛЕММА 1. 1) *Если группа Q содержится в некоторой декартовой сумме групп, то одно из слагаемых содержит делимую группу (т. е. Q или $C(p^\infty)$).*

2) *Если группа $C(p^\infty)$ содержится в некоторой декартовой сумме групп, то одно из слагаемых содержит $C(p^\infty)$.*

ТЕОРЕМА 1. *Класс $\mathcal{K}$ является q-компактным тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) $e(\mathcal{K}) < \infty$ (*тогда* $M = M' = \mathrm{pvar}\,C(\mathcal{K})$);

(2) $e(\mathcal{K}) = \infty$, *одна из групп класса $\mathcal{K}$ содержит делимую подгруппу, и для всякого простого p либо $e_p(\mathcal{K}) < \infty$, либо одна из групп класса $\mathcal{K}$ содержит $C(p^\infty)$ (тогда предмногообразие $M = M'$ порождается группой Q и всеми группами $C_p(\mathcal{K})$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e(\mathcal{K}) < \infty$. Тогда M, как и M', состоит из абелевых групп, период которых делит $e(\mathcal{K})$, а такие группы являются подгруппами прямых сумм копий группы $C(\mathcal{K})$.

Пусть выполняется условие (2). Тогда в одной из групп класса $\mathcal{K}$ содержится либо группа Q, либо группа $C(p^\infty)$. Поскольку Q вкладывается в декартову сумму копий группы $C(p^\infty)$, в любом случае $Q \in M$. Рассмотрим произвольную группу $B \in M'$ и разложим ее периодическую часть T в прямую сумму p-примарных компонент T_p. Пусть $T_{p'}$ обозначает сумму примарных компонент, отличных от T_p. Имеем $T/T_{p'} \cong T_p$. Если $e_p(\mathcal{K}) = \infty$, то можно вложить группу $B/T_{p'}$ в полную группу, которая является прямой суммой групп, изоморфных Q и $C(p^\infty)$. Если $e_p(\mathcal{K}) < \infty$, то $T/T_{p'}$ является сервантной подгруппой ограниченного периода в группе $B/T_{p'}$, поэтому она выделяется прямым слагаемым. Тогда группа $B/T_{p'}$ вкладывается в прямую сумму групп, изоморфных Q и $C_p(\mathcal{K})$. В свою очередь, группа B вкладывается в декартову сумму групп $B/T_{p'}$ по всем простым p. Следовательно, $B \in M$ и предмногообразие $M = M'$ порождается группой Q и всеми группами $C_p(\mathcal{K})$.

Осталось доказать, что условие (2) выполняется, если $e(\mathcal{K}) = \infty$ и $M = M'$. Имеем $Z \in M'$, а поскольку Q вкладывается в ультрастепень группы Z, то $Q \in M'$. Из леммы 1 следует, что одна из групп класса $\mathcal{K}$ содержит делимую подгруппу. Пусть $e_p(\mathcal{K}) = \infty$ для данного простого p. Тогда M' содержит ультрапроизведение циклических групп порядков p^n $(n \in N)$, а значит, и группу $C(p^\infty)$, которая вкладывается в это ультрапроизведение. Опять же по лемме 1 одна из групп класса $\mathcal{K}$ содержит в качестве подгруппы $C(p^\infty)$. Теорема доказана.

§ 2. A-предмногообразие и A-квазимногообразие, порожденные абелевой группой A

Зафиксируем абелеву группу A и рассмотрим категорию абелевых A-групп. В этом параграфе опишем группы из предмногообразия M_A (соответственно квазимногообразия M'_A), порождённого в рассматриваемой категории группой A, а затем выясним, когда имеет место q-компактность, т. е. $M_A = M'_A$.

Обозначим через M (соответственно M') предмногообразие (соответственно квазимногообразие), порожденное в категории абстрактных групп группой A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *A-предмногообразие M_A состоит в точности из всех групп вида $A \oplus B$, где $B \in M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Способ построения групп из M_A (декартовы A-суммы копий группы A и их A-подгруппы) позволяет утверждать, что любая группа $B \in M$ является абстрактной подгруппой некоторой A-группы $G \in M_A$. Рассмотрим A-прямую сумму групп A и G, в нее A вкладывается диагональным образом и выделяется прямым слагаемым с дополнением G. Поэтому $A \oplus G \in M_A$, откуда $A \oplus B \in M_A$.

Наоборот, пуст задан набор A-групп G_i $(i \in I)$ таких, что $G_i = A \oplus \oplus B_i$, где $B_i \in M$. Тогда для декартовой суммы $G = \sum_{i \in I} G_i$, в которую A вкладывается в виде диагональной подгруппы, имеем разложение $G = A \oplus B$, где B является декартовой суммой всех групп B_i и всех копий группы A, за исключением одной. Значит, класс A-групп вида $G = = A \oplus B$, где $B \in M$, замкнут относительно декартовых A-сумм. Он замкнут также относительно A-подгрупп, поэтому составляет предмногообразие, содержащее M_A. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *A-квазимногообразие M'_A состоит в точности из тех A-групп, которые как абстрактные группы принадлежат M' и в которые группа A вложена как сервантная подгруппа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — сервантная подгруппа A-группы G, где $G \in M'$. Покажем, что если квазитождество с константами из A выполняется на A, то оно выполняется и на G. При помощи элементарных преобразований уравнений и обратимых линейных замен переменных над Z квазитождество, посылка которого не является тождественно ложной, можно привести к следующему виду:

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m(\alpha_1 x_1 = a_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n x_n = a_n$$
$$\to \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n + \gamma_1 y_1 + \ldots + \gamma_m y_m = a), \quad (1)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in N$; $\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in Z$; $a_1, \ldots, a_n, a \in A$. Если посылка всегда ложна на группе A, то, учитывая, что A сервантна, посылка ложна и на G. Пусть посылка истинна при $x_1 = a'_1, \ldots, x_n = a'_n \in A$. Очевидно, что квазитождество (1) не выполняется на A, если период группы A не делит одно из чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Поскольку периоды групп G и A равны, то можно предполагать, что в (1) отсутствуют $y_1, \ldots, y_m$, т. е. квазитождество имеет вид

$$\forall x_1, \ldots, x_n(\alpha_1 x_1 = a_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n x_n = a_n \to \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n = a). \quad (2)$$

Тогда должно выполняться равенство $\beta_1 a'_1 + \ldots + \beta_n a'_n = a$. Пусть $b_1, \ldots, b_n \in G$ и $\alpha_1 b_1 = a_1, \ldots, \alpha_n b_n = a_n$. Пусть порядок элемента $a'_1 - b_1$ равен m. Тогда m делит α_1. В группе A существует элемент c порядка m. Так как $\alpha_1(a'_1 + c) = a_1$, то $\beta_1(a'_1 + c) + \beta_2 a'_2 + \ldots + \beta_n a'_n = a$, т. е. $\beta_1 c = 0$. Значит, m делит β_1. Следовательно, $\beta_1 a'_1 = \beta_1 b_1$. Тогда $\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_n b_n = a$. Значит, из выполнимости квазитождества на A следует его выполнимость на G.

Обратно, пусть все квазитождества вида $\forall x(\alpha x = a \to x = a')$, где $\alpha \in Z$; $a, a' \in A$, выполнимые на A, выполняются и на A-группе G. Покажем, что подгруппа A сервантна в G. Действительно, пусть $\alpha g = a$, где $0 \neq \alpha \in Z$, $a \in A$, $g \in G$. Если в A нет решений уравнения $\alpha x = a$, то $a \neq 0$ и на A выполняется квазитождество $\forall x(\alpha x = a \to x = 0)$, которое не выполняется на группе G. Предложение доказано.

Напомним [5], что абелева группа A называется алгебраически компактной, если она выделяется прямым слагаемым в любой абелевой группе, содержащей A в качестве сервантной подгруппы, это эквивалентно следующему свойству: если всякая конечная подсистема системы уравнений над A имеет решение в группе A, то и вся система разрешима в A.

ТЕОРЕМА 2. *Абелева группа A в категории A-групп является q-компактной (т. е. $M_A = M'_A$) тогда и только тогда, когда она q-ком-*

пактна в категории абстрактных групп (т. е. $M = M'$) и алгебраически компактна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M_A = M'_A$. В силу предложения 1, M исчерпывается абстрактными подгруппами групп из M_A, а в силу предложения 2, M' исчерпывается абстрактными подгруппами групп из M'_A. Поэтому $M = M'$. Допустим, что группа A не алгебраически компактна. Тогда существует бесконечная система уравнений $\bigwedge\limits_{i\in I}(s_i = a_i)$ с коэффициентами из A, неразрешимая над A и такая, что всякая ее конечная подсистема разрешима над A. Выберем некоторое уравнение $s_{i_0} = a_{i_0}$ из этой системы и запишем бесконечную импликацию $\bigwedge\limits_{i\in I}(s_i = a_i) \to s_{i_0} = a_{i_0} + a$, где $0 \neq a \in A$. Эта импликация истинна на A. Тогда, согласно упомянутой во введении теореме В. А. Горбунова, в I существует конечное подмножество индексов J такое, что на A истинно квазитождество $\bigwedge\limits_{j\in J}(s_j = a_j) \to s_{i_0} = a_{i_0} + a$. Можно предполагать, что $i_0 \in J$. Так как уравнения $s_{i_0} = a_{i_0}$ и $s_{i_0} = a_{i_0} + a$ противоречивы, то посылка $\bigwedge\limits_{j\in J}(s_j = a_j)$ тождественно ложна на A, что противоречит разрешимости над A этой системы уравнений.

Пусть $M = M'$ и группа A алгебраически компактна. Чтобы доказать равенство $M_A = M'_A$, необходимо заметить, что подгруппа A в любой группе из M'_A выделяется прямым слагаемым. Это следует из описания групп квазимногообразия M'_A, которое получено в предложении 2, и из определения алгебраической компактности. Теорема доказана.

§ 3. A-предмногообразие и A-квазимногообразие, порожденные абелевой A-группой B

Зафиксируем произвольную абелеву A-группу B и обозначим:

$M(B)$ — абстрактное предмногообразие, порожденное группой B;

$M'(B)$ — абстрактное квазимногообразие, порожденное группой B;

$M_A(B)$ — A-предмногообразие, порожденное A-группой B;

$M'_A(B)$ — A-квазимногообразие, порожденное A-группой B.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *A-предмногообразие $M_A(B)$ состоит в точности из A-подгрупп групп вида $B \oplus C$, где $C \in M(B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольная группа $C \in M(B)$ вкладывается, как абстрактная подгруппа, в A-группу G, которая является декартовой A-суммой копий группы B и в которую B вложена диагональным образом. Рассмотрим прямую A-сумму групп B и G, вкладываем в нее группу B диагональным образом, а абстрактную подгруппу C естественным образом во второе слагаемое. Тогда $\langle B, C\rangle = B \oplus C$. Отсюда $B \oplus C \in M_A(B)$.

Наоборот, любая группа из $M_A(B)$ является A-подгруппой декартовой A-суммы копий группы B, в которой группа B, вложенная диагональным образом, выделяется прямым слагаемым с дополнением $C \in M(B)$. Предложение доказано.

Непосредственно из предложения 3 следует

ЛЕММА 2. *Пусть абелева A-группа C разлагается в прямую сумму $C_0 \oplus D$, где C_0 — A-подгруппа из C, $D \in M(B)$. Если $C_0 \in M_A(B)$, то и $C \in M_A(B)$.*

Абелеву A-группу C назовем *B-сервантной*, если из разрешимости в C уравнения вида $p^k x = a$, где p — простое число, $k \in N$, $a \in A$, следует его разрешимость в B.

Рассмотрим совокупность всех уравнений $p^k x = a$ (p — простое число, $k \in N$, $a \in A$), неразрешимых над B. Сопоставим каждому такому уравнению квазитождество $\forall x(p^k x = a \to x = 0)$. Обозначим через Σ_1 множество полученных квазитождеств. Можно утверждать, что квазитождества Σ_1 выполняются на всех B-сервантных A-группах. Верно и обратное: если все квазитождества из Σ_1 выполняются на A-группе C, то она B-сервантна. Таким образом, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Класс B-сервантных A-групп составляет квазимногообразие, которое определяется множеством квазитождеств Σ_1.*

Пусть Σ_2 обозначает совокупность всех квазитождеств вида $\forall x(p^k x = a \to p^{k-1}x = a')$, где p — простое число, $k \in N$, $a, a' \in A$, выполнимых на группе B.

ТЕОРЕМА 3. *A-квазимногообразие $M'_A(B)$ совпадает с классом L*

B-сервантных A-групп, которые как абстрактные группы принадлежат $M'(B)$ и удовлетворяют квазитождествам Σ_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 4 следует, что L является A-квазимногообразием. Поскольку $B \in L$, то $M'_A(B) \subseteq L$. Докажем обратное включение. Достаточно рассмотреть конечно-порожденную A-группу $C \in L$ и показать, что $C \in M'_A(B)$. Более того, будет доказано, что C принадлежит предмногообразию $M_A(B)$.

Рассмотрим фактор-группу C/A. Как абелева конечно порожденная группа она разлагается в прямую сумму конечной группы и свободной абелевой группы конечного ранга n. Тогда вся группа представима в виде $C_0 \oplus D$, где C_0 — полный прообраз конечной части группы C/A, D — свободная абелева группа ранга n. Так как $D \in M(B)$ и в силу леммы 2, включение $C \in M_A(B)$ будет следовать из включения $C_0 \in M_A(B)$. Это сводит задачу к случаю, когда группа C/A конечна. Представим эту группу в виде прямой суммы примарной циклической группы $\langle \bar{c} \rangle$ порядка p^k, где p — простое число, $k \in N$, и конечной абелевой группы $\overline{D}$. Пусть c — некоторый прообраз элемента $\bar{c}$ в C, D — полный прообраз группы $\overline{D}$ в C. Используя индукцию (по порядку группы C/A), можно предполагать, что $D \in M_A(B)$. Из предложения 4 следует, что D является A-подгруппой некоторой группы $G \in M_A(B)$, содержащей B в качестве A-подгруппы. Пусть $p^k c = a \in A$. По условию $p^{k-1}c \notin A$. Выберем элемент $b \in B$ такой, что $p^k b = a$. Если $p^{k-1}b \notin A$, то A-группы C и $\langle b \rangle + D$ изоморфны, а тогда $C \in M_A(B)$.

Пусть $p^{k-1}b = a' \in A$. Предположим сначала, что $e_p(B) \leqslant p^{k-1}$. Если $b_1 \in B$ и $p^k b_1 = a$, то $p^k(b - b_1) = 0$, а потому $p^{k-1}(b - b_1) = 0$ и $p^{k-1}b_1 = a'$. Таким образом на группе B выполняется квазитождество $\forall x(p^k x = a \to \to p^{k-1}x = a')$ из Σ_2. Однако это квазитождество не выполняется на C.

Итак, будем предполагать, что $e_p(B) \geqslant p^k$. Пусть b_0 — элемент порядка p^k из B. Возьмем прямую A-сумму двух копий группы G и вложим группу D диагональным образом в эту сумму. Полагаем $h = (b + b_0, b)$. Имеем $p^k h = a$, $p^{k-1}h \notin A$. Тогда A-группы C и $\langle h \rangle + D$ изоморфны, откуда $C \in M_A(B)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Myasnikov, V. N. Remeslennikov*, Algebraic geometry over groups, II, logical foundations, J. Algebra, **234**, N 1 (2000), 225–276.
2. *М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников*, G-тождества и G-многообразия, Алгебра и логика, **39**, N 3 (2000), 249–272.
3. *G. Baumslag, A. Myasnikov, V. N. Remeslennikov*, Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory, J. Algebra, **219**, N 1 (1999), 16–79.
4. *В. А. Горбунов*, Алгебраическая теория квазимногообразий (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга, 1999.
5. *Л. Фукс*, Бесконечные абелевы группы, т. 1, М., Мир, 1974.

Поступило 20 июля 2000 г.

Адреса авторов:

РЕМЕСЛЕННИКОВ
Владимир Никанорович,
РОССИЯ,
644099, г. Омск,
ул. Орджоникидзе, 13, кв. 202.
e-mail: remesl@iitam.omsk.net.ru

РОМАНОВСКИЙ
Николай Семенович,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
пр. Ак. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН.
e-mail: rmnvski@math.nsc.ru