П. Г. Зограф, Л. А. Тахтаджян, Потенциал метрики Вейля–Петерсона на пространстве Торелли, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 160, 110–120

П.Г.Зограф, Л.А.Тахтаджян

ПОТЕНЦИАЛ МЕТРИКИ ВЕЙЛЯ – ПЕТЕРСОНА НА ПРОСТРАНСТВЕ ТОРЕЛЛИ

I. В работе [I] Квиллен рассмотрел семейство операторов Коши – Римана $\mathcal{D}$ в эрмитовом векторном расслоении E над компактной римановой поверхностью и описал соответствующее детерминантное расслоение над пространством параметров этого семейства – аффинным пространством $\mathcal{A}$ голоморфных структур в расслоении E. Основной результат [I] можно интерпретировать как явную конструкцию потенциала естественной кэлеровой метрики на пространстве $\mathcal{A}$ в терминах детерминанта оператора Лапласа $\mathcal{D}^*\mathcal{D}$. Дальнейшее развитие идеи Квиллена получили в работах [2 – 4]. В частности, в [4] рассмотрен случай семейства $\bar\partial$-операторов на римановых поверхностях рода $g>1$, когда роль пространства параметров играет пространство Тейхмюллера T_g.

Для естественной кэлеровой метрики на T_g (метрики Вейля – – Петерсона) в [5] был построен потенциал в терминах плотности метрики Пуанкаре на римановых поверхностях. Этот потенциал определен на пространстве Шоттки – факторпространстве пространства Тейхмюллера T_g. В настоящей статье мы в духе оригинальной работы Квиллена [I] опишем потенциал метрики Вейля – Петерсона и на другом факторпространстве пространства T_g – пространстве Торелли $\mathfrak{T}_g$ (что дает положительный ответ на вопрос, поставленный в [6]). Именно, мы покажем, что в качестве такого потенциала можно взять функцию $12\pi\log(Z'(1)/\det\operatorname{Im}\tau)$, где $Z(s)$ – дзета-функция Сельберга, а τ – матрица периодов отмеченной римановой поверхности. В справедливости этого утверждения нас убедила работа [7], посвященная теории струны в квантовой теории поля. Ниже мы дадим его подробное доказательство в рамках геометрии пространства Тейхмюллера и теории абелевых дифференциалов.

2. Вначале приведем необходимые сведения из спектральной теории оператора Лапласа на римановых поверхностях; детали можно найти, например, в [8,9]. Пусть X – компактная риманова поверхность рода $g>1$, снабженная метрикой Пуанкаре, т.е. метрикой постоянной отрицательной кривизны, согласованной с комплексной структурой. Будем считать, что поверхность X реализована как факторпространство H/Γ верхней полуплоскости $H=\{z=x+\sqrt{-1}\,y\in\mathbb{C}\mid y>0\}$ по действию строгого гиперболической фуксовой группы Γ; метрика Пуанкаре на H имеет

вид $\rho(z)|dz|^2 = y^{-2}(dx^2+dy^2)$. Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство функций на X со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_X f_1 \bar{f}_2 \rho = \int_{H/\Gamma} f_1(z)\overline{f_2(z)}\frac{dx\,dy}{y^2},\ f_1, f_2 \in \mathcal{H},$$

индуцированным метрикой Пуанкаре. Соответствующий оператор Лапласа $\Delta = -4y^2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z} = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ самосопряжен в пространстве $\mathcal{H}$, неотрицателен и имеет чисто дискретный спектр. Обозначим через G_s ядро резольвенты $(\Delta + s(s-1))^{-1}$ оператора Δ на поверхности X . При $\mathrm{Re}\, s>1$ и $z \neq \gamma z'$, $\gamma\in\Gamma$, оно задается абсолютно сходящимся рядом

$$G_s(z, z') = \sum_{\gamma\in\Gamma} Q_s(z, \gamma z'),$$

где $Q_s(z,z')$ – ядро резольвенты оператора Δ на верхней полуплоскости H . Ядро $Q_s(z,z')$ при $z \neq z'$ голоморфно по s на всей комплексной плоскости и обладает свойством $Q_s(\gamma z, \gamma z') = Q_s(z,z')$, $\gamma\in\Gamma$; $Q_1(z,z') = -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{z-z'}{\bar z - z'}\right|$. В свою очередь, ядро $G_s(z,z')$ при $z\neq\gamma z'$, $\gamma\in\Gamma$, допускает мероморфное продолжение на всю комплексную s - плоскость; в окрестности точки $s=1$ справедливо разложение

$$G_s(z,z') = \frac{1}{4\pi(g-1)}\cdot\frac{1}{s(s-1)} + G_1^{\circ}(z,z') + \underset{s\to 1}{O}(s-1).$$

Ядро G_1° называется функцией Грина оператора Лапласа Δ на римановой поверхности X .

Дзета-функция Сельберга $Z(s)$ римановой поверхности X при $\mathrm{Re}\, s>1$ задается абсолютно сходящимся произведением

$$Z(s) = \prod_{\sigma}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-e^{-(s+k)\ell(\sigma)}\right),$$

где σ пробегает множество всех простых замкнутых геодезических (в метрике Пуанкаре)на поверхности X , а $\ell(\sigma)$ – длина геодезической σ (см. [10,8]). Функция $Z(s)$ допускает голоморфное продолжение по s на всю комплексную плоскость и имеет в точке $s=1$ простой нуль. Величина $\mathrm{const}\cdot Z'(1)$ совпадает с детерминантом оператора Лапласа Δ на поверхности X , определенным через его дзета-функцию (см. [11]). Для логарифмической производной дзета-функции Сельберга $Z(s)$ справедлива формула (см. [9]):

$$\frac{1}{2s-1}\frac{d}{ds}\log Z(s) = \int\limits_X (G_s - Q_s)\Big|_D \rho \,, \qquad \text{(I)}$$

где $(G_s - Q_s)\big|_D (z) = (G_s(z,z') - Q_s(z,z'))\big|_{z'=z}$ – гладкая функция на поверхности X.

3. Поверхность X называется отмеченной, если в фундаментальной группе $\pi_1(X, x_0)$, $x_0 \in X$, выбран канонический базис $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$, удовлетворяющий соотношению $\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\alpha_g\beta_g = 1$. Две отмеченные римановы поверхности X и X' называются эквивалентными, если существует биголоморфное отображение $h: X \to X'$, такое, что базисы $h_*(\alpha_1)$, $h_*(\beta_1), \dots, h_*(\alpha_g)$, $h_*(\beta_g)$ в $\pi_1(X', h(x_0))$ и $\alpha_1', \beta_1', \dots, \alpha_g', \beta_g'$ в $\pi_1(X', x_0')$ связаны переносом вдоль некоторого пути, соединяющего $h(x_0)$ с x_0' в X'. Множество классов эквивалентности отмеченных римановых поверхностей рода g, снабженное естественной топологией, называется пространством Тейхмюллера и обозначается через T_g. На пространстве T_g дискретно действует модулярная группа Тейхмюллера $\mathrm{Mod}_g \cong \mathrm{Aut}\,\pi_1 / \mathrm{Inn}\,\pi_1$, где $\mathrm{Inn}\,\pi_1$ – группа внутренних, а $\mathrm{Aut}\,\pi_1$ – группа всех автоморфизмов фундаментальной группы $\pi_1 \cong \pi_1(X, x_0)$ поверхности X. Факторпространство $\mathcal{M}_g = T_g / \mathrm{Mod}_g$ называется пространством модулей римановых поверхностей рода g.

Риманова поверхность X называется отмеченной в смысле Торелли, если в группе гомологий $H_1 = H_1(X; \mathbb{Z})$ выбран канонический (симплектический) базис $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$. Поскольку $H_1 = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$, где $[\pi_1, \pi_1]$ – коммутант фундаментальной группы π_1, всякая отмеченная поверхность является отмеченной и в смысле Торелли. Обозначим через $\mathcal{G}_g$ нормальную подгруппу в Mod_g, состоящую из элементов, тождественно действующих в H_1. Группа $\mathcal{G}_g$ действует на T_g без неподвижных точек; факторпространство $\mathcal{T}_g = T_g / \mathcal{G}_g$ называется пространством Торелли (подробности см. в [I2]).

Дадим краткое описание комплексной структуры на пространстве Тейхмюллера T_g (детальное изложение можно найти в [I3]). Обозначим через $\mathcal{B} = \mathcal{H}^{0,1}(X, TX)$ пространство гармонических дифференциалов Бельтрами, т.е. гармонических $(0,1)$-форм на

X со значениями в голоморфном касательном расслоении TX над X ; $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B} = 3g-3$. Пространство $\mathcal{B}$ отождествляется с касательным пространством $T_{[X]}$ к T_g в точке $[X] \in T_g$, отвечающей (отмеченной) римановой поверхности X . Двойственное по Серру к $\mathcal{B}$ пространство $Q = \mathcal{H}^{1,0}(X, T^*X)$ квадратичных дифференциалов (голоморфных сечений линейного расслоения $(T^*X)^2 \to X$) отождествляется с кокасательным пространством $T^*_{[X]}$ к T_g в той же точке $[X] \in T_g$. Если $\mu \in \mathcal{B}$ и $\|\mu\|_\infty = \sup_{z \in H} |\mu(z)| < 1$, то существует единственный гомеоморфизм $f^\mu : H \to H$, фиксирующий точки $0, 1$ и ∞ и удовлетворяющий уравнению Бельтрами $\frac{\partial f^\mu}{\partial \bar z} = \mu \frac{\partial f^\mu}{\partial z}$. Положим $\Gamma^\mu = f^\mu \Gamma (f^\mu)^{-1}$ и $X^\mu = H/\Gamma^\mu$. Соответствие $\mu \mapsto [X^\mu]$ позволяет ввести комплексные координаты на T_g в окрестности произвольной точки $[X] \in T_g$; эти координаты и задают на T_g структуру комплексного многообразия размерности $3g-3$. Группа Mod_g действует на T_g биголоморфными гомеоморфизмами, поэтому пространство Торелли $\mathcal{T}_g$ также является комплексным многообразием.

На пространстве Тейхмюллера T_g существует естественная Mod_g - инвариантная эрмитова метрика, которая называется метрикой Вейля - Петерсона. Она определяется в слое $T_{[X]} \cong \mathcal{B}(X)$ голоморфного касательного расслоения TT_g над точкой $[X] \in T_g$ по формуле

$$\langle \mu, \nu \rangle = \int_X \mu \bar\nu \rho = \int_{H/\Gamma} \mu(z) \overline{\nu(z)} \frac{dx\,dy}{y^2}, \quad \mu, \nu \in \mathcal{B}(X).$$

Эта метрика кэлерова (см. [14]). Ее симплектическую форму мы будем обозначать через ω_{WP} ; $\omega_{WP}(\mu, \bar\nu) = \frac{\sqrt{-1}}{2} \langle \mu, \nu \rangle$, где $\mu, \nu \in \mathcal{B}(X) \cong T_{[X]}$.

В дальнейшем нам понадобятся две вспомогательных формулы. Одна из них принадлежит Альфорсу [14] и утверждает, что первая вариация плотности метрики Пуанкаре ρ по координатам в T_g обращается в 0; точнее, для любого $\mu \in \mathcal{B}$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \left(\rho \circ f^{\varepsilon\mu} \left| \frac{\partial f^{\varepsilon\mu}}{\partial z} \right|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \bar\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \left(\rho \circ f^{\varepsilon\mu} \left| \frac{\partial f^{\varepsilon\mu}}{\partial z} \right|^2 \right) = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Другая формула стандартна и выражает первую вариацию оператора Лапласа:

$$\dot{\Delta} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \Delta^{\varepsilon\mu} = 4y^2 \frac{\partial}{\partial z}\, \mu(z) \frac{\partial}{\partial \bar z}\ , \tag{3}$$

где $\Delta^{\varepsilon\mu}$ означает оператор Лапласа в метрике Пуанкаре на римановой поверхности $X^{\varepsilon\mu}$.

4. Пусть X – отмеченная (в смысле Торелли) риманова поверхность. Абелевы дифференциалы $\omega_1, \ldots, \omega_g$ на X образуют нормализованный базис, если их A – периоды удовлетворяют условию

$$\int_{A_i} \omega_k = \delta_{ik}\ , \quad i, k = 1, \ldots, g,$$

где δ_{ik} – символ Кронекера. Соответствующие B -периоды

$$\int_{B_i} \omega_k = \tau_{ik}$$

составляют матрицу периодов $\tau = (\tau_{ik})$ римановой поверхности X. Мнимая часть $\mathrm{Im}\,\tau$ матрицы периодов τ симметрична и положительно определена; кроме того,

$$\mathrm{Im}\,\tau_{ik} = \int_X \omega_i \bar\omega_k = \int_{H/\Gamma} \omega_i(z)\, \overline{\omega_k(z)}\, dx\, dy\ .$$

Нормализованные абелевы дифференциалы "голоморфны по координатам в T_g " (см. [I5]). Под этим понимается, что функции $(\omega_i^{\varepsilon\mu} \circ f^{\varepsilon\mu}) \dfrac{\partial f^{\varepsilon\mu}}{\partial z}$ на $H\ (i = 1, \ldots, g)$ голоморфны по параметру $\varepsilon \in \mathbb{C}$ в точке $\varepsilon = 0$ при любом $\mu \in \mathcal{B}(X)$, где $\omega_1^{\varepsilon\mu}, \ldots, \omega_g^{\varepsilon\mu}$ – нормализованный базис абелевых дифференциалов на отмеченной поверхности $X^{\varepsilon\mu}$.

Первые вариации матрицы периодов τ на T_g вычисляются по формулам Рауха [I2] :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \tau_{ik}^{\varepsilon\mu} = -2\sqrt{-1} \int_X \omega_i\, \omega_k\, \mu, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \tau_{ik}^{\varepsilon\mu} = 0\ ,$$

$$i, k = 1, \ldots, g.$$

С их помощью выводится следующая формула для первой вариации функции $\log\det \mathrm{Im}\,\tau$ на T_g :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \log\det \mathrm{Im}\,\tau^{\varepsilon\mu} = tr\Big((\mathrm{Im}\,\tau)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathrm{Im}\,\tau^{\varepsilon\mu}\ \Big) =$$

$$= -\int\limits_X \sum_{i,k=1}^{g} (\operatorname{Im}\tau)^{-1}_{ik}\, \omega_i \omega_k\, \mu .$$

Другими словами, $(1,0)$ – форме $\partial \log \det \operatorname{Im}\tau$ на T_g при отождествлении $T^*_{[X]} \cong Q(X)$ соответствует поле квадратичных дифференциалов $-\sum_{i,k=1}^{g} (\operatorname{Im}\tau)^{-1}_{ik}\, \omega_i \omega_k$; здесь ∂ означает $(1,0)$ – компоненту оператора внешнего дифференцирования на T_g.

Напомним теперь, что симметрическим бидифференциалом второго рода на $X \times X$ с бивычетом I называется ядро $B(w,w')$, где w – локальный параметр на X , со следующими свойствами:

I) при любом фиксированном $w' \in X$ ядро $B(w,w')$ представляет собой абелев дифференциал второго рода с единственным полюсом второго порядка при $w = w'$;

2) $B(w,w') = B(w',w)$;

3) $$B(w,w')\,dw\,dw' = \frac{dw\,dw'}{(w-w')^2} + \frac{1}{6} H_B(w,w')\,dw\,dw',$$

где H_B регулярно в окрестности диагонали в $X \times X$. Величина $R_B(w) = H_B(w,w)$ представляет собой проективную связность на X , т.е. при замене координаты $w \mapsto h(w)$ она преобразуется по правилу

$$R_B \mapsto (R_B \circ h)\, h'^2 + S(h),$$

где $S(h) = \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2$ – производная Шварца функции h . Если поверхность X реализована как факторпространство H/Γ (т.е. на X выбрана плоская фуксова координата z), то $R_B(z) = 6 \lim\limits_{z' \to z} \left(B(z,z') - \frac{1}{(z-z')^2} \right)$ – голоморфный квадратичный дифференциал на H/Γ. В инвариантных терминах на X этот дифференциал записывается в виде $R_B - R_F \in Q(X)$, где R_F – проективная связность, отвечающая фуксовой униформизации римановой поверхности X ($F(z,z') = \frac{1}{(z-z')^2}$ и $R_F(z) \equiv 0$ в координате $z \in H$). Подробнее обо всем этом см. в [16].

Для отмеченной (в смысле Торелли) римановой поверхности X в дальнейшем через B будем обозначать (однозначно определенный) симметрический бидифференциал второго рода на $X \times X$ с бивычетом I и нулевыми A-периодами. Его B – периоды удовлетворяют соотношению

$$\int_{B_i} B(z,\cdot)\,dz = 2\pi\sqrt{-1}\;\omega_i\,, \quad i=1,\dots,g.$$

Бидифференциал B и, следовательно, отвечающая ему проективная связность R_B голоморфны по координатам в T_g (см. [15]). Для поля квадратичных дифференциалов $R_B - R_F$ при любых $\mu, \nu \in \mathcal{B}(X)$ справедлива формула (см. [5], замечание 5 к теореме 2):

$$\int_X \frac{\partial}{\partial\bar\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Big((R_B^{\varepsilon\nu} - R_F^{\varepsilon\nu})\circ f^{\varepsilon\nu}\Big(\frac{\partial f^{\varepsilon\nu}}{\partial z}\Big)^2\Big)\mu = \frac{1}{2}\langle\mu,\nu\rangle\,. \tag{4}$$

Ядро Шиффера Ω определяется как симметрический бидифференциал второго рода на $X\times X$ с бивычетом I и свойством

$$\text{v.p.}\int_{H/\Gamma} \Omega(z,z')\,\overline{\omega(z')}\,dx'dy' = 0 \tag{5}$$

для любого абелевого дифференциала ω на X (интеграл понимается в смысле главного значения). Ядро Ω не зависит от выбора канонического базиса $A_1, B_1,\dots, A_g, B_g$ в $H_1(X)$ и

$$\Omega(z,z') = B(z,z') - \pi\sum_{i,k=1}^{g}(\operatorname{Im}\tau)^{-1}_{ik}\,\omega_i(z)\,\omega_k(z')\,. \tag{6}$$

Из формулы (5) также нетрудно вывести, что

$$\Omega(z,z') = -4\pi\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z'}\,\overset{\circ}{G}_1(z,z') = -4\pi\lim_{s\to 1}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z'}\,G_s(z,z')\,. \tag{7}$$

Отвечающую ядру Шиффера Ω проективную связность будем обозначать через R_Ω.

5. Обозначим через $Z^{\varepsilon\mu}(s)$ дзета-функцию Сельберга римановой поверхности $X^{\varepsilon\mu} = H/\Gamma^{\varepsilon\mu}$, где $\mu\in\mathcal{B}(X)$, а $\varepsilon\in\mathbb{C}$ – достаточно мало. В следующей теореме вычисляется производная функции $\log\big(\frac{d}{ds}\big|_{s=1} Z^{\varepsilon\mu}(s)\big)$ по параметру ε в точке $\varepsilon=0$ (дифференцируемость $Z(1)$ как функции на пространстве Тейхмюллера T_g легко доказывается стандартными методами теории квазиконформных отображений; см, например, [9]).

ТЕОРЕМА I. Справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\log\Big(\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} Z^{\varepsilon\mu}(s)\Big) = \frac{1}{6\pi}\int_X (R_\Omega - R_F)\mu\,. \tag{8}$$

Другими словами, $(1,0)$ – форме $\partial\log Z'(1)$ на T_g отвечает при отождествлении $T^*_{[X]} \cong Q(X)$ поле квадратичных дифференциалов $\frac{1}{6\pi}(R_{\Omega}-R_{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что поскольку функция $Z^{\varepsilon\mu}(s)$ имеет простой нуль при $s=1$,

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\log\Big(\frac{d}{ds}\Big|_{s=1}Z^{\varepsilon\mu}(s)\Big)=\lim_{s\to1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\log Z^{\varepsilon\mu}(s).$$

Дифференцируя по ε обе части формулы (I) с учетом (2) получаем, что

$$\frac{1}{2s-1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Big(\frac{d}{ds}\log Z^{\varepsilon\mu}(s)\Big)=\int_X(\dot G_s-\dot Q_s)\Big|_{\mathcal{D}}\rho, \tag{9}$$

где $\dot G_s$ и $\dot Q_s$ означают производные $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}G_s^{\varepsilon\mu}(f^{\varepsilon\mu}(z),f^{\varepsilon\mu}(z'))$ и $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}Q_s(f^{\varepsilon\mu}(z),f^{\varepsilon\mu}(z'))$ соответственно (дифференцирование под знаком интеграла оправдано, поскольку $G_s^{\varepsilon\mu}-Q_s$ – гладкая функция на диагонали $\mathcal{D}$ в $X\times X$, вещественно-аналитически зависящая от $\varepsilon\in\mathbb{C}$). Как следует из определения ядер Q_s и G_s (см. п.2),

$$\dot Q_s(z,z')=-\mathrm{v.p.}\int_H Q_s(z,z'')\dot\Delta_{z''}Q_s(z'',z')\frac{dx''dy''}{y''^2}=$$

$$=4\int_H\mu(z'')\frac{\partial}{\partial z''}Q_s(z,z'')\frac{\partial}{\partial z''}Q_s(z'',z')\,dx''dy'',\quad z\neq z',$$

$$\dot G_s(z,z')=-\mathrm{v.p.}\int_{H/\Gamma}G_s(z,z'')\dot\Delta_{z''}G_s(z'',z')\frac{dx''dy''}{y''^2}=$$

$$=4\int_{H/\Gamma}\mu(z'')\frac{\partial}{\partial z''}G_s(z,z'')\frac{\partial}{\partial z''}G_s(z'',z')\,dx''dy'',\quad z\neq\gamma z',\ \gamma\in\Gamma,$$

где мы учли формулу (3) для $\dot\Delta_{z''}$. Подставляя полученные выражения для $\dot Q_s$ и $\dot G_s$ в формулу (9) и меняя порядок интегрирования, нетрудно вывести, что

$$\frac{1}{2s-1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Big(\frac{d}{ds}\log Z^{\varepsilon\mu}(s)\Big)=$$

$$=4\int_{H/\Gamma}\mu(z)\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z'}\Big(\int_{H/\Gamma}G_s(z,z'')G_s(z'',z')\frac{dx''dy''}{y''^2}-$$

$$-\int_H Q_s(z,z'')Q_s(z'',z')\frac{dx''dy''}{y''^2}\Big)\Big|_{z'=z}dxdy=$$

$$= 4\int\limits_{H/\Gamma} \mu(z)\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z'}\left(\frac{1}{1-2s}\,\frac{d}{ds}\left(G_s(z,z') - Q_s(z,z')\right)\right)\Big|_{z'=z}\, dx\,dy =$$

$$= \frac{4}{1-2s}\,\frac{d}{ds}\int\limits_{H/\Gamma}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z'}\left(G_s(z,z') - Q_s(z,z')\right)\Big|_{z'=z}\,\mu(z)\,dx\,dy.$$

Интегрируя эту формулу по s на отрезке $[a,b]$, мы видим, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left(\log Z^{\varepsilon\mu}(s)\right)\Big|_{s=a}^{s=b} =$$

$$= -4\int\limits_{H/\Gamma}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z'}\left(G_s(z,z') - Q_s(z,z')\right)\Big|_{z'=z}\,\mu(z)\,dx\,dy\,\Big|_{s=a}^{s=b}.$$

Переходя к пределу при $a \to 1$ и $b \to +\infty$ получим, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\log\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=1} Z^{\varepsilon\mu}(s)\right) = -4\int\limits_{H/\Gamma}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z'}\left(G_1^{\circ}(z,z') - Q_1(z,z')\right)\Big|_{z'=z}\,\mu(z)\,dx\,dy,$$

поскольку $\lim\limits_{s\to+\infty} Z(s) = 1$ и $(G_s - Q_s)\big|_{\mathcal{D}} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$ равномерно на X . Используя равенство $\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z'}Q_1(z,z') = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{(z-z')^2}$, формулу (7) и сказанное в п.4, приходим к утверждению теоремы.

6. В следующей теореме содержится основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2. На пространстве Торелли $\mathfrak{T}_g$ справедлива формула

$$\partial\bar\partial\log\frac{Z'(1)}{\det \operatorname{Im}\tau} = -\frac{\sqrt{-1}}{6\pi}\,\omega_{WP}\,, \qquad (10)$$

где ∂ и $\bar\partial$ – соответственно (I,0) – и (0,I) – компоненты оператора внешнего дифференцирования на $\mathfrak{T}_g$. Другими словами, функция $12\pi\log\frac{Z'(1)}{\det \operatorname{Im}\tau}$ является потенциалом метрики Вейля – Петерсона на $\mathfrak{T}_g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сказанного в п.4 и формулы (6) следует, что $(1,0)$ – форме $\partial\log\det\operatorname{Im}\tau$ на пространстве Тейхмюллера T_g при отождествлении $T^*_{[X]} \cong Q(X)$ сопоставляется поле квадратичных дифференциалов $\frac{1}{6\pi}(R_\Omega - R_B)$. Таким образом, по теореме I форма $\partial\log\frac{Z'(1)}{\det\operatorname{Im}\tau}$ на T_g реализуется как поле квадратичных дифференциалов $\frac{1}{6\pi}(R_B - R_F)$, и для доказательства формулы (I0) на пространстве T_g достаточно воспользоваться формулой (4). Так как функция $Z'(1)$ на T_g инвариантна относительно модулярной группы Тейхмюллера Mod_g, а функция $\det \operatorname{Im} \tau$ — относительно подгруппы $\mathcal{G}_g$ в Mod_g, то потенциал $\log \frac{Z'(1)}{\det \operatorname{Im} \tau}$ определен на пространстве Торелли $\mathfrak{T}_g = T_g / \mathcal{G}_g$, что и завершает доказательство теоремы.

Литература

1. К в и л л е н Д. Детерминанты операторов Коши-Римана на римановых поверхностях. - Функц.анализ и его прилож., 1985, т. 19, № 1, с.37-41.
2. B i s m u t J.-M., F r e e d D.S. The analysis of elliptic families. I. Metrics and connections on determinant bundles. - Comm.Math.Phys., 1986, vol.106, p.159-176.
3. G i l l e t H., S o u l é C. Direct images of hermitian vector bundles. - Bull.AMS, 1986, vol.15, N 2, p.209-212.
4. З о г р а ф П.Г., Т а х т а д ж я н Л.А. Локальная теорема об индексе для семейств $\bar\partial$-операторов на римановых поверхностях. - Успехи мат.наук, 1987, т.42, № 5,.
5. З о г р а ф П.Г., Т а х т а д ж я н Л.А. - Об униформизации римановых поверхностей и метрике Вейля-Петерсона на пространствах Тейхмюллера и Шоттки. - Мат.сб., 1987, т.132, № 3, с.304-321.
6. И в а н о в Н.В. - Проективные структуры, плоские расслоения и кэлеровы метрики на пространствах модулей. - Мат.сб., 1987, т.132, № 4.
7. Б е л а в и н А., К н и ж н и к В.Г. Комплексная геометрия и теория квантовых струн. - ЖЭТФ, 1986, т.91, № 2, с.364-390.
8. H e j h a l D. The Selberg trace formula for PSL(2,$\mathbb{R}$). I. - Lect.Notes Math., 1976, vol.548.
9. F a y J. Perturbation of the spectrum of a compact Riemann surface. - Preprint. Brunswick, Bowdoin College, 1975.
10. S e l b e r g A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. - J.Indian Math.Soc., 1956, vol.20, N 1-3, p.47-87.
11. D ' H o k e r E., P h o n g D.H. On determinants of Laplacians on Riemann surfaces. - Comm.Math.Phys., 1986, vol.104, N 4, p.537-546.
12. R a u c h H. A transcendental view of the space of algebraic Riemann surfaces. - Bull.Amer.Math.Soc., 1965,vol.71, N 1, p. 1-39.

13. А л ь ф о р с Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М., 1969.
14. A h l f o r s L. Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces. - Ann.Math., 1961, vol.74, p.171-191.
15. B e r s L. Holomorphic differentials as functions of moduli. - Bull.Amer.Math.Soc., 1961, vol.67, p.206-210.
16. Т ю р и н А.Н. О периодах квадратичных дифференциалов. - Успехи мат.наук, 1978, т.33, № 6, с.149-195.