В. Д. Лукьянов, О решении краевой задачи Римана для системы N пар функций,
Докл. АН СССР, 1983, том 271, номер 2, 291–293

https://www.mathnet.ru/dan10028

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* – Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ, 1977, т. 14, с. 5–58. 2. *Бойматов К.Х.* – ДАН, 1978, т. 243, № 6, с. 1369–1372. 3. *Туловский В.Н., Шубин М.А.* – Матем. сб., 1973, т. 92, № 4, с. 571–588. 4. *Фейгин В.И.* – Там же, 1976, т. 99, № 4, с. 594–613. 5. *Фейгин В.И.* – ДАН, 1977, т. 232, № 6, с. 1269–1272. 6. *Левендорский С.З.* – Изв. АН СССР, 1982, т. 46, № 4, с. 820–862. 7. *Левендорский С.З.* – ДАН, 1982, т. 266, № 2, с. 276–280. 8. *Асланян А.Г., Лидский В.Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1974. 156 с. 9. *Асланян А.Г.* – Функц. анализ и его прилож., 1979, т. 13, № 4, с. 59–61. 10. *Асланян А.Г., Васильев Д.Г., Лидский В.Б.* – Там же, 1981, т. 15, № 3, с. 1–9. 11. *Boutet de Monvel* – Acta math., 1971, 126, № 1–2, p. 11–51. 12. *Hörmander L.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1979, vol. 32, p. 359–443. 13. *Hörmander L.* – Ark. Mat., 1979, vol. 17, № 2, p. 297–313. 14. *Grubb G.* – C.R., 1978, Sér. A, vol. 287, p. 1017–1020. 15. *Козлов В.А.* – Функц. анализ и его прил., 1983, т. 17, № 2.

УДК 517.94 МАТЕМАТИКА

В.Д. ЛУКЬЯНОВ

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ N-ПАР ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 21 XI 1981)

Пусть $G(t)$ – квадратная неособенная матрица, определенная на контуре L и удовлетворяющая условию Гёльдера. Простой замкнутый контур L разделяет плоскость комплексной переменной z на две области Ω^+ (вне L) и Ω^- (внутри L).

В [1–3] исследовался вопрос о решении однородной задачи Римана для матриц второго порядка

$$X^+(t) = G(t)X^-(t), \qquad t \in L, \tag{1}$$

при дополнительном условии коммутативности квадратных матриц $X^+(t)$ и $X^-(t)$. Эти матрицы являются предельными значениями искомой кусочно-аналитической матрицы $X(z)$ при $z \to t$ из областей соответственно Ω^+ и Ω^-. $X(z)$ – кусочно-аналитическая матрица вместе со своей обратной в областях Ω^+ и Ω^-.

В настоящей работе получено обобщение результатов [2, 3] для матриц порядка N. Решение задачи (1) для матрицы порядка N позволяет решить неоднородную задачу Римана с матрицей $G(t)$ для системы N-пар функций.

Пусть $I_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots, s$, – попарно коммутирующие матрицы порядка N, элементы которых – полиномы такие, что $I_m^2(t) = \mu_m(t)I_0$, где I_0 – единичная матрица порядка N, $\mu_m(t) = p_{1m}(t)p_{2m}(t)$, $p_{1m}(t)$ – полином, кратность корней которого нечетна, а $p_{2m}(t)$ – полином, кратность корней которого четна.

Введем в рассмотрение коммутативное кольцо матриц $P_m(N, t)$, элементы которого задаются рекуррентным соотношением

$$P_1(N, t) = \{G_1^{(k)}(t):\quad G_1^{(k)}(t) = \varphi_k(t)I_0 + \psi_k(t)I_1(t)\},$$

$\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ – произвольные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера,

$$P_m(N, t) = P_{m-1}(N, t)I_0 + P_{m-1}(N, t)\, I_m(t), \quad m = 2, 3, \ldots, s.$$

Предположим, что при вычислении в дальнейшем аналитической функции f от матрицы $G_m(t) \in P_m(N, t)$ выполнено $f(G_m(t)) \in P_m(N, t)$.

Считаем, что матрица $G(t)$ удовлетворяет соотношению:

$$\exists m:\quad G(t) \equiv G_m(t) \in P_m(N, t), \qquad t \in L.$$

Пусть $\mu_m(t) \neq 0$, $t \in L$. Матрица $G_m(t) = G^{(1)}_{m-1}(t) I_0 + G^{(2)}_{m-1}(t) I_m(t)$ допускает экспоненциальное представление в виде

$$G_m(t) = G^{(3)}_{m-1}(t) \exp(\mu_m^{-1/2}(t) G^{(4)}_{m-1}(t) I_m(t)),$$

где

$$G^{(3)}_{m-1}(t) = ((G^{(1)}_{m-1}(t))^2 - \mu_m(t)(G^{(2)}_{m-1}(t))^2)^{1/2},$$

$$\exp G^{(4)}_{m-1} = (G^{(1)}_{m-1}(t) - \mu_m^{1/2}(t) G^{(2)}_{m-1}(t))^{-1/2} (G^{(1)}_{m-1}(t) + \mu_m^{1/2}(t) G^{(2)}_{m-1}(t))^{1/2}.$$

Искомое решение задачи (1) для матрицы $G(t) \equiv G_m(t)$ дается рекуррентными соотношениями

$$X^{\pm}_m(t) = \{X^{\pm}_{m-1}(t) \exp(\mu_m^{-1/2}(t) p_{1m}^{1/2}(t) Y^{\pm}_{m-1}(t) I_m(t))\},$$

где $X^{\pm}_{m-1}(t) \in P_{m-1}(N, t)$ – решение однородной задачи Римана для матрицы

$$G^{(3)}_{m-1}(t) \in P_{m-1}(N, t): \quad X^{+}_{m-1}(t) = G^{(3)}_{m-1}(t) X^{-}_{m-1}(t),$$

а $Y^{\pm}_{m-1}(t) \in P_{m-1}(N, t)$ – аддитивное разложение матрицы

$$G^{(4)}_{m-1}(N, t) \in P_{m-1}(N, t): \quad G^{(4)}_{m-1}(t) = p_{1m}^{1/2}(t)(Y^{+}_{m-1}(t) - Y^{-}_{m-1}(t)).$$

Решение задачи (1) для матриц из $P_1(N, t)$ дается формулами

$$X^{\pm}_1(t) = \Delta^{\pm}(t) \exp(\mu_1^{-1/2}(t) p_{11}^{1/2}(t) \epsilon^{\pm}(t) I_1(t)),$$

где

$$(2) \qquad e^{\epsilon(t)} = \left(\frac{\varphi_k(t) + \mu_1^{1/2}(t) \psi_k(t)}{\varphi_k(t) - \mu_1^{1/2}(t) \psi_k(t)} \right)^{1/2} = \exp\{(\epsilon^{+}(t) - \epsilon^{-}(t)) p_{11}^{1/2}(t)\};$$

$$(3) \qquad \Delta^{+}(t) = \Delta(t) \Delta^{-}(t), \qquad \Delta(t) = (\varphi_k^2(t) - \mu_1(t) \psi_k^2(t))^{1/2}.$$

Формулы (2), (3) получаются известными методами [4, 5].

Для построения решения (1), имеющего целый ограниченный порядок на бесконечности, достаточно, чтобы индекс собственных чисел матрицы $G^{(4)}_{m-1}(t)$ был равен нулю и степень полиномов $p_{1m}(t)$ была не выше двух, в противном случае следует потребовать выполнения дополнительных условий [3, 4].

Если $\mu_m(t) \equiv 0$, то $I_m^2(t)$ есть нулевая матрица порядка N.

Преобразуем $G_m(t)$ к виду

$$G_m(t) = G^{(1)}_{m-1}(t)(I_0 + (G^{(1)}_{m-1}(t))^{-1} G^{(2)}_{m-1}(t) I_m(t)).$$

Решение задачи (1) дается формулами

$$X^{\pm}_m(t) = X^{\pm}_{m-1}(t) I_0 + Y^{\pm}_{m-1}(t) I_m(t),$$

где $X^{\pm}_{m-1}(t) \in P_{m-1}(N, t)$ – решение задачи Римана для $G^{(1)}_{m-1}(t)$:

$$X^{+}_{m-1}(t) = G^{(1)}_{m-1}(t) X^{+}_{m-1}(t),$$

а $Y^{\pm}_{m-1}(t) \in P_{m-1}(N, t)$ определяется из соотношения

$$(G^{(1)}_{m-1}(t))^{-1} G^{(2)}_{m-1}(t) = (X^{+}_{m-1}(t))^{-1} Y^{+}_{m-1}(t) - (X^{-}_{m-1}(t))^{-1} Y^{-}_{m-1}(t).$$

Решение задачи (1) для матриц из $P_1(N, t)$ в случае, если $\mu_1(t) \equiv 0$, проводится согласно формулам

$$X^{\pm}_1(t) = \alpha^{\pm}(t) I_0 + \beta^{\pm}(t) I_1(t),$$

$$\varphi_k(t) = \alpha^{+}(t) \alpha^{-}(t),$$

$$\frac{\psi_k(t)}{\varphi_k(t)} = \frac{\beta^{+}(t)}{\alpha^{+}(t)} - \frac{\beta^{-}(t)}{\alpha^{-}(t)}.$$

Как пример матрицы $G_m(t) \in P_m(N, t)$ приведем матрицу четвертого порядка $(m = 2)$:

$$G(t) = G_2(t) = (\varphi_1(t)I_0 + \psi_1(t)I_1(t))I_0 + (\varphi_2(t)I_0 + \psi_2(t)I_1(t))I_2(t),$$

возникшую при решении матричной задачи Римана в [6]. Здесь

$$\varphi_1(t) = \operatorname{sh} d/\zeta(t), \quad \psi_1(t) = -\operatorname{sh}(2\gamma(t)H)/(\gamma(t)\zeta(t)),$$

$$\varphi_2(t) = \operatorname{sh}\frac{d}{2}\operatorname{ch}\frac{\gamma(t)H}{\zeta(t)}, \quad \psi_2(t) = -\operatorname{ch}\frac{d}{2}\operatorname{sh}\frac{\gamma(t)H}{\gamma(t)\zeta(t)},$$

$$\zeta(t) = \operatorname{ch}(2\gamma(t)H) - \operatorname{ch} d,$$

$$I_1(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma^2(t) & 0 \end{Vmatrix}, \quad I_2(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & e^{-d/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-d/2} \\ e^{d/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{d/2} & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\gamma^2(t) = t^2 - a^2$; a, H, d — константы.

Ленинградское высшее военное
инженерное строительное училище
им. А.Н. Комаровского

Поступило
15 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф.Д.* — УМН, 1952, т. 7, № 4, с. 3. 2. *Чеботарев Г.Н.* Уч. зап. Казанского ун-та, 1956, т. 11, кн. 4, с. 31. 3. *Храпков А.А.* — ПММ, 1977, т. 35, № 4, с. 677. 4. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1973. 5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 6. *Лукьянов В.Д.* — ДАН, 1980, т. 255, № 1, с. 78.

УДК 517.9:532 МАТЕМАТИКА

М.Б. ОРАЗОВ

К ЗАДАЧЕ О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 20 X 1982)

1°. Как и в [1], [2], гл. VI, будем считать, что вязкая несжимаемая жидкость частично заполняет замкнутый сосуд и при этом свободная поверхность Γ жидкости не имеет общих точек со стенкой Σ сосуда и обе поверхности — класса C^∞. Рассмотрим задачу о малых свободных колебаниях жидкости в неподвижном сосуде. Линеаризованные уравнения движения запишем в системе координат $x = (x_1, x_2, x_3)$, неподвижно связанной с сосудом, а граничные условия на Γ — в соответствующей криволинейной системе (ξ^1, ξ^2, ξ^3), выбранной таким образом, что точка $(\xi^1, \xi^2, 0)$ лежит на Γ, а ξ^3 — направление внешней нормали n и Γ (т.е. изнутри жидкости), причем коэффициент Ламе $h_3 = 1$. Тогда, если искать скорость и давление в виде $u(x, t) = e^{-\lambda\nu t}u(x)$ и $p(x, t) = e^{-\lambda\nu t}p(x)$, то задача на собственные значения (с.з.)