В. В. Батырев, Ограниченность степени многомерных торических многообразий Фано, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, номер 1, 22–27

Доказательство. Поскольку $<a^2>=A$, то a представимо в виде $\alpha_1 a^{(1)}+\ldots+\alpha_n a^{(n)}$, где $a^{(1)},\ldots,a^{(n)}$ — линейно независимые над $\mathcal{K}$ степени элемента a^2. Применив φ, получим:

$$\lambda a=\Sigma\alpha_i\lambda^{2t_i}a^{(i)},\text{ то есть } a=\Sigma a_i\lambda^{2t_i-1}a^{(i)}.$$

Если λ не является корнем из единицы, то равенство $\Sigma\alpha_i(\lambda^{2t_i-1}-1)a^{(i)}=0$ невозможно. Если λ является корнем степени m из 1, то $a^m=b\neq 0$ и $\varphi(b)=b$ (степень a^m берем с любой расстановкой скобок). Поскольку $A=<b>$, то $\varphi=1$.

Заметим, что группа $\operatorname{Aut}A_n(\mathcal{K})$ естественным образом вложена в группу $G=\operatorname{Aut}A_n(\overline{\mathcal{K}})$, где $\overline{\mathcal{K}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathcal{K}$. Поэтому достаточно доказать, что $G=\{1\}$.

Сначала заметим, что G конечна. Действительно, G — алгебраическая группа, причем нульмерная, поскольку ее алгебра Ли содержится в алгебре дифференцирований $\operatorname{Der}A_n(\overline{\mathcal{K}})=0$ (см. [5], с. 180, 193—194).

Пусть $\varphi\in G$. Ввиду конечности G имеем $\varphi^m=1$ для некоторого m. Отсюда все собственные значения линейного преобразования φ лежат в $\overline{\mathcal{K}}$ и, в частности, в $\overline{\mathcal{K}(x_{ijk}|i,j,k=1,\ldots,n)}$. Поэтому φ имеет собственный вектор. Из леммы и теоремы 2 следует, что $\varphi=1$. Итак, $G=\{1\}$. Теорема доказана.

I. V. L'vov, V. D. Martirosyan

SOME PROPERTIES OF A GENERAL n-DIMENSIONAL ALGEBRA

We deal with the general linear n-dimensional non-associative algebra over an arbitrary field. It is shown that this algebra has no zero divizors, proper subalgebras, non-zero derivations and nontrivial automorphisms.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмин Е. Н. О некоторых классах алгебр с делением.— Алгебра и логика, 1966, 5, вып. 2, с. 57—102.
2. Artamonov V. A. On finite algebras of prime dimension without proper subalgebras.— J. Algebra, 1976, 42, N 1, p. 247—260.
3. Артамонов В. А. Об алгебрах без собственных подалгебр.— Матем. сб., 1977, 104, № 3, с. 428—459.
4. Ленг С. Алгебра. М., 1968.
5. Шевалле К. Теория групп Ли. II. М., 1958.

Поступила в редакцию
11.03.81

УДК 513.015.7

В. В. Батырев

ОГРАНИЧЕННОСТЬ СТЕПЕНИ МНОГОМЕРНЫХ ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО

1. Пусть V — гладкое n-мерное проективное алгебраическое многообразие над полем $\mathbf{C}$ с обильным антиканоническим пучком (n-мерное многообразие Фано). В работе [1] в качестве одной из проблем поставлен вопрос об ограниченности степени антиканонических моделей таких многообразий константой, зависящей только от размерности n.

Для трехмерных многообразий Фано В. А. Исковских [1] сформулировал теорему об ограниченности степени константой 64, являющейся степенью антиканонической модели P^3.

Отметим, что в размерностях $n \leqslant 3$ максимум степени достигается на P^n. Однако для $n \geqslant 4$ это уже не так: проективизации $\mathbf{P}_{P^{n-1}}(O \oplus \oplus O(n-1))$ являются многообразиями Фано, и при $n \geqslant 4$ их степень больше, чем у антиканонических моделей P^n.

Цель настоящей заметки — получить константу, оценивающую степень многомерных многообразий Фано, принадлежащих классу торических многообразий. Напомним, что n-мерное многообразие V называется торическим, если на нем определено действие тора $(\mathbf{C}^*)^n$, который эквариантно вкладывается в V открытым плотным подмножеством [2]. Возможно, что общую проблему ограниченности степени можно будет решить, доказав, что многообразия Фано «достаточно» большой степени являются торическими.

2. Пусть $\varphi(m, n)$ — функция от двух натуральных аргументов m, n, которая строится по индукции следующим образом: $\varphi(m, 1) = 2m$;

$$\varphi(m, n) = \frac{(n+1)\, m\, (m+1)^{n-1}\, \varphi([(n+1)\, m]!\, m,\ n-1)}{n\, ([(n+1)\, m]!)^{n-1}}.$$

Доказано следующее.

Теорема 1. *Пусть V — n-мерное торическое многообразие Фано, тогда степень его антиканонической модели не превосходит $n!\,\varphi(n, n)$.*

Замечание. Эта оценка довольно грубая, ее качество стремительно ухудшается с ростом n.

3. Пусть V — n-мерное полное торическое многообразие; D — дополнение к $(\mathbf{C}^*)^n$ в V, которое распадается в объединение неприводимых дивизоров $D = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$. Рассмотрим $H = \sum_{i=1}^{k} m_i D_i$, где $m_i > 0$, и пусть $\mathcal{L}(H)$ — обратимый пучок ассоциированный с H. Так как для гладкого многообразия V антиканонический класс $(-K_V) = \sum_{i=1}^{k} D_i$ (см. [2], с. 102), то утверждение теоремы 1 вытекает из следующего более общего факта о торических многообразиях.

Теорема 2. *Если $\mathcal{L}(H)$ порождается глобальными сечениями, то степень $\mathcal{L}(H)$ не превосходит $n!\,\varphi(nm, n)$, где $m = \max\{m_i\}$ (в этой теореме под степенью $\mathcal{L}(H)$ подразумевается число, определяемое старшим коэффициентом многочлена Гильберта $P(t) = H^0(V, \mathcal{L}(tH))$).*

Доказательство теоремы 2 основано на переводе ее утверждения на язык целочисленных многогранников, натянутых на характеры тора $(\mathbf{C}^*)^n$, а именно согласно [2, с. 103] из порождаемости $\mathcal{L}(H)$ глобальными сечениями и того, что $m_i > 0$, вытекает, что глобальные сечения $\mathcal{L}(H)$ имеют носитель в некотором целочисленном многограннике Δ, содержащем нуль решетки характеров строго внутри себя. Степень же $\mathcal{L}(H)$ равна $n!$ (объем Δ). Поэтому достаточно доказать следующее.

Теорема 3. *Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ дана решетка $\mathbf{Z}^n$ и целочисленный многогранник Δ, являющийся пересечением полупространств, заданных неравенствами $l_i(x) \leqslant m_i \leqslant m$, где $l_i(x)$ — целочисленные линейные формы на $\mathbf{Z}^n$. Тогда объем Δ относительно решетки ограничен сверху числом $\varphi(nm, n)$.*

Для доказательства теоремы 3 понадобятся леммы.

Лемма 1. *Пусть S_n — n-мерный симплекс в пространстве $\mathbf{R}^n$, содержащий некоторое множество целых точек $z_1, \ldots, z_h$, выпуклая оболочка Δ которых содержит точку $O = (0, 0, \ldots, 0)$ строго внутри себя. Пусть каждая грань S_n задана уравнением $f_i(x) = m$ $(m \in \mathbf{N}$, $f_i(x)$ —*

целочисленная линейная форма на $\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$). Тогда объем S_n относительно $\mathbf{Z}^n$ ограничен сверху числом $\varphi(m, n)$.

Доказательство. Пусть Γ_i — грань S_n, заданная уравнением $f_i(x) = m$, а B_i — вершина S_n, не принадлежащая Γ_i. Рассмотрим $a_{ij} = f_i(B_j)$, из условия вытекает, что $a_{ij} = m$ при $i \neq j$, а $a_{ii} < 0$.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Хотя бы для одного i $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ $|a_{ii}| \leqslant nm$.*

Доказательство. Заметим, что матрица (a_{ij}) вырожденная, так как векторы, определяющие вершины B_i, линейно зависимые. С другой стороны,

$$\det(a_{ij}) = m \prod_{s+1}^{n+1} (a_{ss} - m) \left(\frac{1}{m} + \sum_{s=1}^{n+1} \frac{1}{a_{ss} - m} \right).$$

Поэтому если бы для всех i $a_{ii} < -nm$, то $\det(a_{ij}) \neq 0$ — противоречие. Лемма 2 доказана.

Будем доказывать лемму 1 индукцией по n. При $n = 1$, очевидно, в качестве оценки годится $\varphi(m, 1) = 2m$. Пусть утверждение доказано при $n = q - 1$. Рассмотрим S_q. Выберем на S_q вершину B_i так, чтобы $0 > f_i(B_i) \geqslant -qm$ (согласно лемме 2). Можно считать, что $B_i = B_1$. Пусть S_{q-1} — пересечение S_q с подпространством W, заданным уравнением $f_1(x) = 0$. Имеем решетку $\mathbf{Z}^{q-1} = \mathbf{Z}^q \cap W$ в W. Можно считать, что $f_1(x)$ нельзя представить в виде $f_1(x) = rf'_1(x)$, где f_1 — тоже целочисленная линейная функция на решетке и $r \in \mathbf{N}$, $r > 1$ (в противном случае неравенства $f'_1(x) \leqslant m$, $f_2(x) \leqslant m$... задают некоторый симплекс S'_q, содержащий S_q; значит, найдя оценку для объема S'_q, мы получим оценку и для S_q). Поэтому имеем, что $\mu_q(S_q)$ — объем симплекса S_q относительно $\mathbf{Z}^q$ — равен $\mu_{q-1}(\Gamma_1)$ — объему грани Γ_1 относительно решетки $\mathbf{Z}^{q-1} \subset W$, который умножен на $1/q$ высоты, равной разности наибольшего и наименьшего значений функции $f_1(x)$ на S_q; $\max\limits_{S_q} f_1(x) = m$, $\min\limits_{S_q} f_1(x) = a_{11}$. Из подобия симплекса S_q и симплекса с основанием S_{q-1} и вершиной B_1 следует, что отношение $\mu_{q-1}(\Gamma_1)/\mu_{q-1}(S_{q-1})$ равно $(q-1)$-й степени отношения высот симплекса S_q и (S_{q-1}, B_1), то есть

$$\mu_{q-1}(\Gamma_1) = \mu_{q-1}(S_{q-1}) \left(\frac{m - a_{11}}{|a_{11}|} \right)^{q-1}.$$

Пусть $\Delta' = \Delta \cap W$; Δ' натянут на целые точки, лежащие в W, из набора $\{z_i\}$ и на рациональные точки W, являющиеся пересечением отрезков $[z_i, z_j]$ (соединяющих пары вершин Δ) с подпространством W.

Пусть отрезок $[z_i, z_j]$ пересекается с W. Можно считать, что $f_1(z_i) = x_i \geqslant 0$, а $f_1(z_j) = -x_j \leqslant 0$ $(x_i, x_j \in \mathbf{Z})$. Так как $z_i, z_j \in S_q$, то

$$0 \leqslant x_j \leqslant -\min_{S_q} f_1(x) = -\alpha_{11}, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant \max_{S_q} f_1(x) = m.$$

Если $z_{ij} = [z_i z_j] \cap W$, то очевидно, что

$$\overrightarrow{Oz_{ij}} = \overrightarrow{Oz_i} + \frac{x_i}{x_i + x_j} \overrightarrow{z_i z_j}.$$

Значит, знаменатель координат z_{ij} относительно базиса решетки $\mathbf{Z}^{q-1}$ не превосходит $(m - a_{11}) \leqslant m(1+q)$. Поэтому, если $\delta_{q,m}$ — растяжение пространства W в $[(q+1)m]!$ раз, многогранник $\delta_{q,m}(\Delta')$ уже целочислен и содержится в симплексе $\delta_{q,m}(S_{q-1})$, который находится в условиях леммы 1. По предположению индукции

$$\mu_{q-1}(\delta_{q,m}(S_{q-1})) \leqslant \varphi([(q+1)m]!\, m,\, q-1).$$

Так как

$$\mu_{q-1}(\delta_{q,m}(S_{q-1})) = ([(q+1)m]!)^{q-1}\mu_{q-1}(S_{q-1}),$$

имеем оценку

$$\mu_{q-1}(S_{q-1}) \leqslant \frac{\varphi([(q+1)m]!\, m,\, q-1)}{([(q+1)m]!)^{q-1}}.$$

Значит,

$$\mu_{q-1}(\Gamma_1) \leqslant \left(\frac{m-a_{11}}{|a_{11}|}\right)^{q-1} \frac{\varphi([(q+1)m]!\, m,\, q-1)}{([(q+1)m]!)^{q-1}}.$$

Поэтому

$$\mu_q(S_q) \leqslant \frac{(m-a_{11})}{q}\left(\frac{m-a_{11}}{|a_{11}|}\right)^{q-1} \frac{\varphi([(q+1)m]!\, m,\, q-1)}{([(q+1)m]!)^{q-1}}.$$

Так как многогранник Δ в S_q содержит $\mathcal{O}$ строго внутри себя, то существует внутри такая целая точка z_d, что $f_1(z_d)<0$, но $a_{11} \leqslant f_1(z_d)$, $a_{11} \leqslant -1$, так как $f_1(z_d) \in \mathbf{Z}$. Значит,

$$\left(\frac{m-a_{11}}{|a_{11}|}\right)^{q-1} \leqslant (m+1)^{q-1}, \quad (m-a_{11}) \leqslant m(q+1).$$

Итак,

$$\mu_q(S_q) \leqslant \frac{m(q+1)}{q}(m+1)^{q-1} \frac{\varphi([(q+1)m]!\, m,\, q-1)}{([(q+1)m]!)^{q-1}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — векторы в пространстве $\mathbf{R}^n$, которые не содержатся ни в каком полупространстве, ограниченном гиперплоскостью, проходящей через $\mathcal{O}$. Рассмотрим векторы $w_{i_1 \ldots i_n} = v_{i_1} + \ldots + v_{i_n}$ (некоторые индексы i_s могут совпадать); тогда среди множества всех $w_{i_1 \ldots i_n}$ существует ровно $n+1$ векторов, таких, что симплекс, натянутый на их концы строго внутри себя содержит $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Рассмотрим выпуклый многогранник Δ', натянутый на концы v_i. Он содержит строго внутри себя точку $\mathcal{O}$ (в противном случае все v_i лежали бы в некотором полупространстве); Δ' можно триангулировать на симплексы, натянутые на некоторые из $n+1$ вершин Δ'. Тогда $\mathcal{O}$ принадлежит одному из триангулирующих симплексов σ. Если $\mathcal{O}$ лежит строго внутри σ, то все доказано, так как среди $w_{i_1 \ldots i_n}$ находятся увеличенные в n раз векторы, определяющие симплекс σ. Предположим противное. Тогда существует симплекс σ' положительной размерности p, являющийся гранью σ, который содержит $\mathcal{O}$ строго внутри себя. Можно считать, что σ' натянут на $v_1, \ldots, v_{p+1}$, которые порождают подпространство $\mathbf{R}^p \subset \mathbf{R}^n$. Пусть $\bar{v}_i$ — образы v_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ в фактор-пространстве $\mathbf{R}^{n-p}$. Ясно, что $\bar{v}_i$ удовлетворяет условию леммы в $\mathbf{R}^{n-p}$. Поэтому, рассуждая по индукции, приходим к тому, что среди всевозможных сумм $\bar{w}_{i_1 \ldots i_{n-p}} = \bar{v}_{i_1} + \ldots \bar{v}_{i_{n-p}}$ можно выбрать $n-p+1$, на которые натягивается $(n-p)$-мерный симплекс, строго внутри себя содержащий $\mathcal{O}$. Пусть выбранными векторами в $\mathbf{R}^{n-p}$ являются $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{n-p+1}$, а $w_1, \ldots, w_{n-p+1}$ — соответствующие им в $\mathbf{R}^{n-p}$ векторы $w_{i_1 \ldots i_{n-p}} = v_{i_1} + \ldots + v_{i_{n-p}}$. Нетрудно увидеть, что если на концы векторов $x_1, \ldots, x_{s+1}$ в $\mathbf{R}^s$ натягивается симплекс, строго содержащий $\mathcal{O}$, то $x_1, \ldots, x_{s+1}$ порождают $\mathbf{R}^s$ и в линейной зависимости $\sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i x_i = 0$ все λ_i не равны 0 и одного знака. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i v_i = 0, \text{ где } \alpha_i > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-p+1} \beta_i w_i = w, \text{ где } w \in \mathbf{R}^p \text{ и } \beta_i > 0.$$

Заметим, что все $\mathbf{R}^p$ есть объединение $p+1$ конусов, натянутых на всевозможные $p+1$ базисов $\mathbf{R}^p$, образованных из $v_1, \ldots, v_{p+1}$ (если $x_1, \ldots, x_s$ — базис $\mathbf{R}^s$, то конусом, натянутым на этот базис, называется множество векторов x вида $x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$). В частности, вектор $(-w)$ лежит в одном из $p+1$ таких конусов. Можно считать, что этот конус натянут на базис $v_1, \ldots, v_p$, то есть

$$-w = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i, \text{ где } \gamma_i > 0.$$

Рассмотрим набор из $n+1$ векторов вида $w_{i_1 \ldots i_n}$ в $\mathbf{R}^n$:

$$w_1 + pv_{p+1},\ w_2 + pv_{p+1}, \ldots, w_{n-p+1} + pv_{p+1};\ nv_1, nv_2, \ldots, nv_p.$$

Так как образы первых $n-p+1$ векторов порождают $\mathbf{R}^{n-p}$, а последние p векторов порождают $\mathbf{R}^p$, то весь набор из $n+1$ векторов порождает $\mathbf{R}^n$. Более того, существует линейная зависимость

$$\sum_{i=1}^{n-p+1} A_i (w_i + pv_{p+1}) + \sum_{i=1}^{p} B_i n v_i = 0,$$

где $A_i = \beta_i$, а

$$B_i = \frac{1}{n} \left(\gamma_i \alpha_{p+1} + \alpha_i p \left(\sum_{j=1}^{n-p+1} \beta_j \right) \right).$$

Из условий на α_i, β_i, γ_i вытекает, что A_i и B_i положительны. Получили искомый симплекс, натянутый на векторы требуемого вида. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть x_i — векторы в двойственной решетке $(\mathbf{Z}^*)^n$, которые соответствуют линейным функциям $l_i(x)$ на $\mathbf{Z}^n$. Так как неравенства $l_i(x) \leqslant m_i$ ограничивают в $\mathbf{R}^n$ конечную область Δ, то векторы x_i не лежат ни в каком полупространстве, ограниченном гиперплоскостью, проходящей через $\mathcal{O}$. Поэтому согласно лемме 3 среди всевозможных сумм $y_{i_1 \ldots i_n} = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$ существует $n+1$ векторов, таких, что симплекс, натянутый на их концы, строго внутри себя содержит $\mathcal{O}$. Значит, если $y_1, \ldots, y_{n+1}$ — выбранные векторы, то неравенства $y_i(x) \leqslant mn$ дают симплекс в $\mathbf{R}^n$, содержащий Δ. Теперь, применив к полученному симплексу оценку леммы 1, получим, что (объем Δ) $\leqslant \varphi(nm, n)$. Теорема доказана.

V. V. Batyrev

BOUNDEDNESS OF THE DEGREE OF HIGH DIMENSIONAL TORICAL FANO VARIETIES

Let V be a nonsingular projective torical variety with ample anti-canonical sheaf, i. e. a torical Fano variety. It is proved that the degree of this variety is less then a constant depending only on the dimension of V. There is a simple method for the computation of this constant.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исковских В. А. Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 12. (Итоги науки). ВИНИТИ, 1979, с. 59—157.
2. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий.— Успехи матем. наук, 1978, 33, вып. 2, с. 97—155.

Поступила в редакцию
18.05.81

УДК 512.8

С. Ю. Максимов

CW-ГРУППЫ

В настоящей работе рассматриваются так называемые CW-группы, являющиеся обобщением групп Уорфилда [1]; находятся достаточные условия того, что прямое слагаемое прямой суммы CW-групп есть прямая сумма CW-групп.

На протяжении всей работы Σ и $\oplus$ обозначают прямые суммы, под термином «группа» понимается абелева группа, под «счетностью» — не более чем счетность. Используемое в тексте определение подгрупп, в основном содержащихся одна в другой, а также в основном связанных подгрупп дано в [1, 2].

Определение 1. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольный класс групп. Группу G будем называть CW-группой относительно класса* $\mathfrak{A}$ *или, короче, CW-группой, если для любых групп $A_i \in \mathfrak{A}$ и любого гомоморфизма $\varphi: G \to \sum_{i \in I} A_i$ существуют счетное подмножество $J \subseteq I$ и разложение $G = G_1 \oplus G_2$, такие, что G_2 — счетная прямая сумма ограниченных групп, а любой ненулевой элемент из G_1 имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме φ лежит в $\sum_{i \in I} A_i$.*

Лемма 1. *Класс CW-групп замкнут относительно счетных прямых сумм.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1 из [1].

Лемма 2. *Класс CW-групп со счетными ульмовскими инвариантами замкнут относительно прямых слагаемых.*

Доказательство. Пусть $A = B \oplus C$ — CW-группа со счетными ульмовскими инвариантами, $\varphi: B \to \sum_{i \in I} A_i$ — гомоморфизм, $A_i \in \mathfrak{A}$. Продолжим φ до гомоморфизма $\psi: B \oplus C \to \sum_{i \in I} A_i$, положив $\psi|_B = \varphi$, $\psi|_C = 0$. По условию существуют разложение $B \oplus C = G_1 \oplus G_2$ и счетное подмножество $J_1 \subseteq I$, такие, что G_2 — счетная прямая сумма ограниченных групп, а любой ненулевой элемент из G_1 имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме ψ лежит в $\sum_{i \in J_1} A_i$. В силу