A. V. Dyachenko, Rigidity of the Hamburger and Stieltjes moment sequences, *Keldysh Institute preprints*, 2018, 079

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 79 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Дьяченко А.В.

Жёсткость последовательностей моментов Гамбургера и Стилтьеса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Дьяченко А.В. Жёсткость последовательностей моментов Гамбургера и Стилтьеса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 79. 31 с. doi:**10.20948/prepr-2018-79**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-79**

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

А.В. Дьяченко

Жёсткость последовательностей моментов Гамбургера и Стилтьеса

Москва – 2018

УДК 517.521.1

А.В. Дьяченко

Жёсткость последовательностей моментов Гамбургера и Стилтьеса.

Цель данной заметки — найти условия на последовательность моментов Гамбургера или Стилтьеса, при которых изменение не более чем конечного числа её членов даёт последовательность того же типа. Оказывается, что последовательность позволяет все малые возмущения этого вида, если и только если отвечающая ей проблема моментов неопределённа. В определённом же случае последовательность имеет конечный индекс определённости тогда и только тогда, когда соответствующее конечное число её членов может быть каким-либо образом изменено.

Ключевые слова: проблемы моментов, индекс определённости.

Alexander Dyachenko

Rigidity of the Hamburger and Stieltjes moment sequences.

This paper aims at finding conditions on a Hamburger or Stieltjes moment sequence, under which the change of at most a finite number of its entries produces another sequence of the same type. It turns out that a moment sequence allows all small enough variations of this kind precisely when it is indeterminate. We also show that a determinate moment sequence has the finite index of determinacy if and only if the corresponding finite number of its entries can be changed in a certain way.

Key words: moment problems, index of determinacy.

1 Краткое введение

Классические проблемы моментов Стилтьеса и Гамбургера играют важную роль во многих математических задачах. Они состоят в нахождении распределения масс (положительной меры) исходя из последовательности действительных чисел, которые называются моментами. Последовательности моментов могут быть охарактеризованы через положительность отвечающих им квадратичных форм, и индуцированная взаимосвязь между членами последовательностей достаточно сильна. Действительно, хотя и можно всегда увеличить начальный (нулевой момент), другие изменения конечного числа моментов для многих последовательностей оказываются невозможными: здесь мы называем такие последовательности «жёсткими». В то же время «нежёсткие» последовательности моментов могут допускать больше или меньше свободы по отношению к своим членам, и критерий для этой свободы, кажется, отсутствует в литературе.

Мы используем так называемый *индекс определённости* (index of determinacy) для выражения строгости условий, возникающих из положительности ганкелевых форм. Наша первая задача — описать его связь с жёсткостью соответствующих последовательностей моментов. Мы, в частности, показываем, что этот индекс определяет минимальное количество начальных моментов, допускающих изменения.

Вторая наша задача — выяснить, при каких условиях эти изменения могут быть произвольными. Оказывается, что неопределённые последовательности (т.е. соответствующие неопределённым проблемам моментов) допускают произвольные достаточно малые возмущения конечного числа своих членов. В то же время определённые[1] последовательности (т.е. соответствующие определённым проблемам моментов) позволяют только специфические возмущения: в частности, один из моментов позволяет всевозможные малые возмущения, если и только если соответствующая проблема моментов неопределённа.

Более того, можно записать условия на начальные моменты в более или менее явном виде. Для последовательности c_0, c_1, $\dots$, состоящей из моментов Гамбургера или Стилтьеса, с фиксированными членами c_n, c_{n+1}, $\dots$, значения моментов c_0, c_1, $\dots$, c_{n-1} могут быть любыми в строго выпуклой области с границей, задаваемой многочленом степени n. Внутренние точки этой области отвечают случаю неопределённости, а граничные точки — случаю определённости соответствующих проблем

[1]Условимся в данной работе *не* применять слово «определённый» в смысле «некоторый».

моментов.

Автор весьма признателен Алану Сокалу и Кристиану Бергу за их замечания, а также и за предложенную задачу.

2 Определения и базовые факты

Чтобы дать точные формулировки и доказательства, требуются некоторые базовые факты и определения, большинство которых может быть найдено в классических книгах [1, 10].

Пусть дана последовательность моментов Гамбургера $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty} = (c_0, c_1, c_2, \dots)$, то есть пусть существует некоторая (положительная) мера[2] $d\mu(x)$ на действительной оси, такая что

$$c_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i \, d\mu(x) \quad \text{для всех} \quad i = 0, 1, \dots \tag{1}$$

В работе [6] Гамбургер установил, что $\mathfrak{h}$ — это последовательность моментов Гамбургера, если и только если все квадратичные формы

$$\sum_{i,j=0}^{p} c_{i+j} x_i x_j, \quad p = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

являются неотрицательно определёнными. Для данной последовательности $\mathfrak{h}$ моментов Гамбургера мы пишем $\mathfrak{h} \in \mathrm{Det}_H$, если она определённа, т.е. если мера $d\mu(x)$ определена однозначно условиями (1), или $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$ в противном случае.

Стоит отметить, что укороченная последовательность моментов $(c_i)_{i=2n}^{\infty}$ для каждого $n = 1, 2, \dots$ соответствует мере $x^{2n} d\mu(x)$. Если $(c_i)_{i=2n}^{\infty}$ определяет единственную меру $x^{2n} d\mu(x)$, тогда $d\mu(x)$ также определена для всех действительных $x \neq 0$ единственным образом, в то время как атом в начале координат фиксируется начальным моментом c_0. То есть добавление в начало последовательности моментов пары новых членов означает добавление дополнительных условий, что не может сделать последовательность «менее определённой». Подробнее возникающая взаимосвязь разбирается в Лемме 5.1, пока же мы делаем только следующий вывод:

Лемма 2.1. *Если $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_H$, то $(c_i)_{i=2n}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_H$ для $n = 1, 2, \dots$ Соответственно, если $(c_i)_{i=2n}^{\infty} \in \mathrm{Det}_H$ для некоторого положительного целого n, тогда $\mathfrak{h} \in \mathrm{Det}_H$.*

[2] Мы несколько злоупотребляем обозначениями, записывая меру как дифференциал $d\mu(x)$ от соответствующей неубывающей функции распределения $\mu(x)$.

Эта лемма позволяет ввести *индекс определённости* (index of determinacy, см. [2])

$$\mathrm{ind}_0(\mathfrak{h}) := \sup\left\{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : (c_i)_{i=2n}^{\infty} \in \mathrm{Det}_H\right\}$$

определённой последовательности (моментов) Гамбургера $\mathfrak{h}$. Другими словами, $\mathrm{ind}_0(\mathfrak{h})$ является минимальным целым числом, таким что мера $x^{2n}d\mu(x)$ для целых n единственным образом определена своими моментами при $0 \leqslant n \leqslant \mathrm{ind}_0(\mathfrak{h})$ и неединственным образом при $n > \mathrm{ind}_0(\mathfrak{h})$. В статье [2] вводится индекс определённости через меру, что позволяет сосчитать его не только в начале координат, но и в остальных точках действительной оси. Оба определения совпадают в нуле, однако наше подходит для текущих целей лучше. Оказывается, что при $\mathrm{ind}_0(\mathfrak{h}) < \infty$ соответствующая мера может быть только дискретной. Также в работе [2] установлено, что индексы в различных точках действительной оси могут отличаться не более, чем на единицу.

Каждое распределение масс $d\mu(z)$, удовлетворяющее (1), задаёт единственное[3] отображение верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ в себя по формуле [1, стр. 121, Теор. 3.2.1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x)}{x - z},$$

где интеграл имеет асимптотическое разложение

$$-\frac{c_0}{z^1} - \frac{c_1}{z^2} - \frac{c_2}{z^3} - \cdots \quad \text{при} \quad z \to +\infty \cdot i. \tag{3}$$

Из этого факта вытекает характеристическое свойство определённых последовательностей моментов Гамбургера: отвечающий такой последовательности асимптотический ряд (3) задаёт лишь одно отображение верхней полуплоскости в себя.

Замечание 2.2. *Кронекер доказал [9], что конечность ранга $r_{\mathfrak{h}}$ ганкелевой матрицы, соответствующей* (2), *эквивалентна тому, что ряд* (3) *в окрестности бесконечности сходится к рациональной функции с $r_{\mathfrak{h}}$ полюсами. Кроме того, размер максимального ненулевого углового минора этой матрицы также равен $r_{\mathfrak{h}}$.*

Как следствие, если все формы (2) неотрицательно определенны, *то вырождение любой из них эквивалентно ограниченности максимального*

[3]Единственность следует из формулы обращения Стилтьеса–Перрона [1, стр. 155–158].

ранга этих форм, а значит, и числа точек носителя соответствующей меры $d\mu(x)$. Поскольку носитель комактен, соответствующий индекс определённости всегда бесконечен: тейлоровское разложение (3) *представляет только одну функцию. Теорема 3.1 и Следствие 3.2 показывают, что последовательности моментов таких мер являются жёсткими. В Разделах 4, 5 и большей части Раздела 6 рассматриваются только нежёсткие последовательности, так что соответствующие формы* (2) *оказываются положительно определёнными.*[4]

Последовательность $\mathfrak{s} = (s_i)_{i=0}^{\infty}$ называется последовательностью моментов Стилтьеса при условии, что существует мера $d\sigma(x)$ на неотрицательной полуоси такая, что

$$s_i = \int_0^{\infty} x^i \, d\sigma(x) \quad \text{для всех} \quad i = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

Множество последовательностей моментов Стилтьеса таким образом вложено во множество последовательностей моментов Гамбургера. Более того, последовательность $\mathfrak{s}$ является последовательностью Стилтьеса в том и только том случае, если обе последовательности $\mathfrak{s}$ и $(s_i)_{i=1}^{\infty}$ оказываются последовательностями моментов Гамбургера. Мы пишем $\mathfrak{s} \in \mathrm{Det}_S$, когда $\mathfrak{s}$ определённа, т.е. когда мера $d\sigma(x)$ определяется единственным образом условием (4), или $\mathfrak{s} \in \mathrm{Indet}_S$ в противном случае. Хотя Indet_S содержит только те последовательности Стилтьеса, которые принадлежат Indet_H, Гамбургер показал [7], что множество $\mathrm{Det}_S \cap \mathrm{Indet}_H$ непусто, и дал его описание. Кроме того, вложение $\mathfrak{s} \in \mathrm{Det}_S \cap \mathrm{Indet}_H$ влечёт за собой тот факт, что соответствующая единственным образом определённая мера Стилтьеса имеет атом в начале координат, см. [3]. По аналогии с Леммой 2.1, справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.3. *Если $\mathfrak{s} \in \mathrm{Indet}_S$, то $(s_i)_{i=n}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_S \subset \mathrm{Indet}_H$ для $n = 1, 2, \ldots$. Если же $(s_i)_{i=n}^{\infty} \in \mathrm{Det}_S$ для некоторого положительного целого n, то $\mathfrak{s} \in \mathrm{Det}_S$.*

Индекс определённости определённой последовательности моментов Стилтьеса определяется (см. [3]) как

$$\mathrm{ind}(\mathfrak{s}) := \sup\left\{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : (s_i)_{i=n}^{\infty} \in \mathrm{Det}_S\right\}.$$

[4]Согласно введённому определению понятия жёсткости, изменения конечного числа моментов не может повлиять на жёсткость последовательности моментов.

Соответственно, $x^n d\sigma(x)$ — это единственная мера, соответствующая $(s_i)_{i=n}^{\infty}$ при $0 \leqslant n \leqslant \operatorname{ind}(\mathfrak{s})$, и существует бесконечно много мер, соответствующих $(s_i)_{i=n}^{\infty}$ при $n > \operatorname{ind}(\mathfrak{s})$.

Последовательность моментов Гамбургера $\mathfrak{h}$ называется симметричной, если все нечётные моменты c_{2n+1}, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, обращаются в ноль. Соответствующая мера $d\mu(x)$ не обязательно симметрична (т.е. чётна), но нечётная часть её функции распределения $\frac{1}{2}(\mu(x) - \mu(-x))$ даёт симметричную меру, соответствующую симметричной последовательности моментов $\mathfrak{h}$. В частности, мера $d\mu(x)$ обязательно оказывается симметричной, если $\mathfrak{h} \in \mathrm{Det}_H$; однако существует бесконечно много симметричных решений проблемы моментов (1), если $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$. Каждая последовательность моментов Стилтьеса $\mathfrak{s} = (s_i)_{i=0}^{\infty}$ соответствует симметричной последовательности Гамбургера $\widetilde{\mathfrak{s}} := (s_0, 0, s_1, 0, s_2, 0, \dots)$, и наоборот: если $\widetilde{\mathfrak{s}}$ является симметричной последовательностью моментов Гамбургера, то $\mathfrak{s}$ является последовательностью моментов Стилтьеса. Стоит ещё отметить, что условия $\mathfrak{s} \in \mathrm{Indet}_S$ и $\widetilde{\mathfrak{s}} \in \mathrm{Indet}_H$ эквивалентны, см. [4].

3 «Жёсткость» последовательностей моментов

Теорема 3.1. *Пусть даны положительное число n и две последовательности моментов Гамбургера*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= (c_0, c_1, \dots, c_{2n-1}, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots) \quad \text{и} \\ \mathfrak{t} &:= (c_0^*, c_1^*, \dots, c_{2n-1}^*, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots), \end{aligned}$$

в которых лишь $2n$ начальных элементов могут различаться. Если $(c_i)_{i=2n}^{\infty} \in \mathrm{Det}_H$, то $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{t}$ совпадают — кроме, быть может, начальных элементов c_0 и c_0^*.

Иными словами, если $\mathfrak{h} \in \mathrm{Det}_H$ и $\operatorname{ind}_0(\mathfrak{h}) \geqslant n$, тогда

$$c_1^* = c_1, \quad c_2^* = c_2, \quad \dots, \quad c_{2n-1}^* = c_{2n-1}.$$

Доказательство. Если $(c_i)_{i=2n}^{\infty} \in \mathrm{Det}_H$, тогда из Леммы 2.1 следуют вложения $\mathfrak{h}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Det}_H$; таким образом, существуют две меры $d\mu(x)$ и $d\nu(x)$, однозначно задаваемые последовательностями $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{t}$ соответственно. Кроме того, благодаря равенству $x^{2n} d\mu(x) = x^{2n} d\nu(x)$ эти меры могут различаться только лишь на сконцентрированную в начале координат массу: $d\mu(x) = d\nu(x) + M \cdot \delta(x)\, dx$, где $M \in \mathbb{R}$. Поэтому $c_0 = M + c_0^*$, в то время как остальные члены последовательностей $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{t}$ совпадают. $\square$

Рассматривая симметричные последовательности моментов Гамбургера, немедленно получаем:

Следствие 3.2. *Пусть n будет некоторым положительным числом, и пусть*

$$\mathfrak{s} = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, \dots) \quad \text{и} \quad \mathfrak{t} := (s_0^*, s_1^*, \dots, s_{n-1}^*, s_n, s_{n+1}, \dots)$$

являются последовательностями моментов Стилтьеса, различающимися не более чем на n начальных членов. Если $(s_i)_{i=n}^{\infty} \in \mathrm{Det}_S$, то $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ совпадают — кроме, быть может, начальных элементов s_0 и s_0^*.

Иными словами, если $\mathfrak{s} \in \mathrm{Det}_S$ и $\mathrm{ind}(\mathfrak{s}) \geqslant n$, то необходимо выполняются равенства

$$s_1^* = s_1, \quad s_2^* = s_2, \quad \dots, \quad s_{n-1}^* = s_{n-1}.$$

Теорема 3.1 показывает, что последовательности моментов Гамбургера с бесконечным индексом определённости являются жёсткими. Следующая теорема даёт противоположный результат для последовательностей неопределённых или определённых, но с конечным индексом определённости.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_H$ или $\mathrm{ind}_0(\mathfrak{h}) < n$ для некоторого положительного целого n. Тогда, для произвольно заданных действительных чисел c_1^*, $c_3^*, \dots, c_{2n-1}^*$, последовательность*

$$\mathfrak{t} := (c_0^*, c_1^*, \dots, c_{2n-1}^*, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots) \in \mathrm{Indet}_H,$$

является последовательностью моментов Гамбургера, чьи чётные моменты c_{2i}^* для i, пробегающего $n-1, n-2, \dots, 0$, может обращаться в произвольное число из полубесконечного интервала $(b_{2i}, +\infty)$, где $b_{2i} > 0$ определяется выбором последующих членов c_{2i+1}^*, c_{2i+2}^*, $\dots$, c_{2n-1}^*, c_{2n}, c_{2n+1}, $\dots$

Если вдобавок $c_{2n-1}^* = c_{2n-1}$, тогда $b_{2n-2} \leqslant c_{2n-2}$, где неравенство оказывается строгим либо при $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$, либо при $\mathrm{ind}_0(\mathfrak{h}) < n-1$.

Доказательство этой теоремы находится в Разделе 5. Стоит отметить, что, подобно неопределённым последовательностям, определённые последовательности моментов Гамбургера с $\mathrm{ind}_0(\mathfrak{h}) = 0$ позволяют изменять любое конечное число своих членов. Из соответствия между симметричными последовательностями моментов Гамбургера и последовательностями Стилтьеса следует такой факт:

Следствие 3.4. *Пусть* $\mathfrak{s} = (s_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_S$ *или* $\mathrm{ind}(\mathfrak{s}) < n$. *Тогда существует последовательность моментов Стилтьеса*

$$\mathfrak{t} := (s_0^*, s_1^*, \ldots, s_{n-1}^*, s_n, s_{n+1}, \ldots) \in \mathrm{Indet}_S,$$

такая что s_i^* *для каждого* $i = n-1, n-2, \ldots, 0$ *можно задать равным любому числу из полубесконечного интервала* $(b_i, +\infty)$ *с нижней границей* $b_i > 0$ *зависящей от выбора моментов* s_{i+1}^*, s_{i+2}^*, $\ldots$, s_{n-1}^*, s_n, s_{n+1}, $\ldots$

В частности, $b_{n-1} \leqslant s_{n-1}$, *где равенство эквивалентно выполнению условий* $\mathfrak{s} \in \mathrm{Det}_S$ *и* $\mathrm{ind}(\mathfrak{s}) = n-1$.

4 Малые возмущения моментов

Более сильная версия рассмотренной выше задачи состоит в определении условий, при которых «нежёсткие» последовательности моментов позволяют произвольные малые возмущения конечного числа своих членов. В этом разделе мы формулируем главные результаты этой работы.

Непосредственно из определения (1) следует, что для двух последовательностей моментов Гамбургера $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{t}$, соответствующих мерам $d\mu(x)$ and $d\nu(x)$, их выпуклая комбинация $\eta\mathfrak{h} + (1-\eta)\mathfrak{t}$, где $0 < \eta < 1$, тоже является последовательностью Гамбургера, соответствующей мере $\eta d\mu(x) + (1-\eta)d\nu(x)$. Простейший пример того, что сумма двух определённых последовательностей моментов является неопределённой, может быть найден в доказательстве Леммы 5.1, где одна из последовательностей порождается дираковской мерой $\delta(x)\,dx$, см. Раздел 5. Однако если по крайней мере одна из последовательностей $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{t}$ неопределённа, то их выпуклая комбинация $\eta\mathfrak{h} + (1-\eta)\mathfrak{t}$ тоже должна быть неопределённой: по крайней мере, одно из слагаемых в $\eta d\mu(x) + (1-\eta)d\nu(x)$ определяется неединственным образом. Обрезка начальных членов определённых последовательностей Гамбургера с конечными индексами немедленно приводит к следующему выводу:

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathfrak{h}$ *и* $\mathfrak{t}$ *— две последовательности моментов Гамбургера, и путь* $0 < \eta < 1$. *Тогда*

$$\mathrm{ind}_0\left(\eta\mathfrak{h} + (1-\eta)\mathfrak{t}\right) \leqslant \min\left\{\,\mathrm{ind}_0(\mathfrak{h}), \mathrm{ind}_0(\mathfrak{t})\right\}.$$

Если мы зададим последовательности $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{t}$ как в Теореме 3.3 и если $\mathfrak{t} \in \mathrm{Indet}_H$, то их выпуклая комбинация $(1-\varepsilon)\mathfrak{h} + \varepsilon\mathfrak{t}$ тоже является неопределённой для любого $\varepsilon \in (0,1)$. С другой стороны, эта выпуклая комбинация может быть сделана сколь угодно близкой к $\mathfrak{h}$ за счёт выбора η. Таким образом:

Следствие 4.2. *Пусть $\varepsilon > 0$ есть произвольное число. Тогда Теорема 3.3 остаётся верной и при дополнительном условии, что*

$$\max_{0\leqslant i\leqslant 2n-1} |c_i - c_i^*| < \varepsilon.$$

Аналогично, в Следствии 3.4 можно дополнительно требовать

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |s_i - s_i^*| < \varepsilon.$$

Иными словами, каждая окрестность (в банаховом пространстве l_∞ ограниченных последовательностей) любой определённой последовательности моментов Гамбургера или Стилтьеса конечного индекса определённости содержит неопределённую последовательность моментов того же типа, которая отличается лишь конечным числом членов. Неопределённые последовательности позволяют ещё большую свободу в изменении своих членов:

Теорема 4.3. *Если последовательность моментов Стилтьеса или Гамбургера неопределённа, тогда любое достаточно малое возмущение конечного числа её членов даёт неопределённую последовательность того же типа.*

Однако для определённых последовательностей это неправда, даже если индекс определённости конечен:

Следствие 4.4. *Пусть $\mathfrak{h} = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ — последовательность моментов Гамбургера или Стилтьеса, и пусть дано некоторое целое $m > 0$. Предположим, что все члены c_n при $n \neq m$ фиксированны. Тогда последовательность $\mathfrak{h}$ с необходимостью является неопределённой ($\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$ или, соотв., $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_S$), если для всех достаточно малых возмущений члена c_m результирующая последовательность оказывается последовательностью моментов того же типа.*

Для заданных целых чисел $m > 0$ и n введём обозначение

$$\Delta_m^{(n)} := \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+m-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{n+m} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & c_{n+4} & \dots & c_{n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+m-1} & c_{n+m} & c_{n+m+1} & \dots & c_{n+2m-2} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_0^{(n)} := 1. \qquad (5)$$

Следствие 4.4 напрямую следует из двух теорем, которые дают иную интерпретацию наших результатов. Их версии для моментов Стилтьеса не приводятся: как и раньше, они получаются благодаря соответствию симметричным последовательностям моментов Гамбургера, если в теоремах приравнять все нечётные моменты к нулю.

Теорема 4.5. *Пусть $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty}$ — последовательность моментов Гамбургера, такая что носитель соответствующей меры содержит бесконечно много точек. Тогда для данного положительного целого n предел*

$$R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) := \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta_{m+n}^{(0)}}{\Delta_m^{(2n)}}$$

существует и является многочленом многих переменных полной степени n, и, для $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = 0 &\iff \mathfrak{h} \in \mathrm{Det}_H, \\ R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) > 0 &\iff \mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H. \end{aligned}$$

Для $i = 0, 1, \dots, n-1$ степень $R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ по c_i равна $i+1$; коэффициенты всех мономов могут зависеть только от $c_n, c_{n+1}, \dots$, и единственным мономом полной степени n является $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c_{n-1}^n$.

Теорема 4.6. *Для данных целого $n > 1$ и фиксированной последовательности моментов Гамбургера*

$$\mathfrak{t} := (c_0^*, c_1^*, \dots, c_{n-1}^*, c_n, c_{n+1}, \dots)$$

введём два множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, так чтобы

$$\begin{aligned} (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \Omega &\iff (c_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_H, \\ (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \Gamma &\iff (c_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathrm{Det}_H, \end{aligned}$$

а стало быть, $(c_0^*, c_1^*, \dots, c_{n-1}^*) \in \Omega \cup \Gamma$. Предположим, что многочлен $R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ определяется по $\mathfrak{t}$ так же, как в Теореме 4.5. Тогда $\Omega = \emptyset$ эквивалентно

$$\Gamma \neq \left\{c_0 \geqslant b_0^*,\ c_1 = c_1^*,\ c_2 = c_2^*,\ \dots,\ c_{n-1} = c_{n-1}^*\right\}$$

для некоторого[5] $b_0^* \in \left(0, c_0^*\right]$. Кроме того, если $\Omega \neq \emptyset$, то Ω есть строго выпуклая область, совпадающая с компонентой связанности

[5]Неравенство $c_0 \geqslant b_0^*$ можно записать в виде $R_1(c_0) \geqslant 0$ при условии, что носитель меры, соответствующей $\mathfrak{t}$, содержит бесконечно много точек, см. Лемму 6.3. Подобное же выражение можно записать и в случае, когда носитель состоит из конечного числа точек.

множества

$$\{(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) > 0\},$$

а $\Gamma = \partial\Omega := \Omega \setminus \overline{\Omega}$; *в частности, включение* $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \Gamma$ *влечёт за собой* $R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = 0$.

5 Доказательство Теорем 3.3 и 4.3

Будем опираться на следующую лемму (её доказательство следует ниже):

Лемма 5.1. *Если* $\mathfrak{h} = (c_0, c_1, \dots) \in \mathrm{Indet}_H$, *то для произвольно заданного действительного числа* c_{-1} *найдётся такое* c_{-2}, *что удлинённая последовательность*

$$\mathfrak{t} := (c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, \dots)$$

также является последовательностью моментов Гамбургера. Более того, число c_{-2} *должно лишь удовлетворять неравенству*

$$c_{-2} \geqslant c_{-1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} P_k^2(0) + \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^2(0) + 2c_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) Q_k(0), \tag{6}$$

где $P_k(z)$ *— это* k*-й ортонормированный многочлен, отвечающий последовательности* $\mathfrak{h}$, *а* $Q_k(z)$ *— это соответствующий многочлен второго рода.*

Кроме того, неравенство (6) *и необходимо для того, чтобы новая последовательность* $\mathfrak{t}$ *являлась последовательностью моментов Гамбургера; оно оказывается строгим, если и только если* $\mathfrak{t}$ *неопределённа.*

Замечание 5.2. *Отметим, что правая часть последнего неравенства,* c_{-2}, *достигает своего минимума*

$$c_{-2}^* = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^2(0) - \rho(0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) Q_k(0) \right)^2 \quad \text{при } c_{-1}, \text{ обращающемся в}$$

$$c_{-1}^* = -\frac{\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) Q_k(0)}{\sum_{k=0}^{\infty} P_k^2(0)} = -\rho(0) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) Q_k(0),$$

где $\rho(0)$ *обозначает максимальную массу среди всех отвечающих* $\mathfrak{h}$ *распределений масс, сконцентрированную в начале координат; в нижеследующем доказательстве соответствующая мера обозначается* *через* $d\mu(x;\infty)$. *В обозначениях выражений* (7) *и* (11) *минимальное значение* c_{-2} *выражается как*

$$c^*_{-2} = a'(0) - \frac{b'(0)c'(0)}{d'(0)} \quad \textit{при} \quad c^*_{-1} = -\frac{b'(0)+c'(0)}{2d'(0)} = -\frac{b'(0)}{d'(0)}.$$

Формулы в Замечании 5.2 могут быть также записаны с помощью пределов некоторых определителей матриц, состоящих из моментов, см., напр., [8, стр. 181] или [10, стр. 66–67]. Условие (6) тогда принимает вид $\lim_{m\to\infty} \Delta_m^{(-2)}/\Delta_{m-1}^{(0)} \geqslant 0$, имеющий отношение к критерию Гамбургера (дальнейшие детали можно найти в Разделе 6 и, в частности, в Лемме 6.3).

При условии $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_H$ существует отвечающая последовательности $\mathfrak{h}$ параметризация Неванлинны (см., напр., [1, Гл. II §4]) — четыре действительные целые функции $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ и $d(z)$ не более минимального типа экспоненциального порядка, которые удовлетворяют равенству[6]

$$m(z;t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x;t)}{x-z} = -\frac{a(z)-tc(z)}{b(z)-td(z)} \qquad \left(m(z;\infty) = -\frac{c(z)}{d(z)}\right) \tag{7}$$

с параметром t, пробегающим $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Каждая из мер $d\mu(x;t)$ является решением проблемы моментов (1), то есть

$$c_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i\, d\mu(x;t) \quad \text{для всех} \quad i = 0,1,\dots$$

вне зависимости от $t \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Эти меры называются *N-экстремальными*, поскольку многочлены полны в пространствах $L_2\big(\mu(\,\cdot\,;t)\big)$. Всё множество решений проблемы моментов (1) получается при подстановке в равенство (7) вместо $(-t)$ всех отображений верхней полуплоскости в себя. В начале координат эти четыре функции удовлетворяют условиям

$$b(0) = -1, \quad c(0) = 1 \quad \text{and} \quad a(0) = d(0) = 0. \tag{8}$$

Доказательство Леммы 5.1. Предположим, что $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$ и что отвечающая этой последовательности N-экстремальная мера $d\mu(x;t)$ задаётся равенством (7). Ограничимся лишь конечными действительными значениями параметра t. При этом условии носитель $d\mu(x;t)$ не

[6] Для удобства читателя отметим, что параметризация Неванлинны в книге [1] использует обратную величину к нашему параметру t; наша версия ближе к [10].

имеет точек вблизи начала координат, т.е. неравенство $|t| < t_{\max}$ влечёт $(-\epsilon, \epsilon) \notin \operatorname{supp} d\mu(x;t)$ для некоторого $\epsilon > 0$, зависящего от $t_{\max}$. Таким образом, выражение $x^{-2} d\mu(x;t)$ тоже определяет меру с тем же носителем и с моментами

$$c_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x;t)}{x^2}, \quad c_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x;t)}{x}, \quad c_0, c_1, c_2, \ldots \tag{9}$$

Функция $m(z;t)$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} m(z;t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{z}{x}} \cdot \frac{d\mu(x;t)}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{x}\right)^k \cdot \frac{d\mu(x;t)}{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x;t)}{x} + z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x;t)}{x^2} + O(z^2) \\ &= c_{-1}(t) + z c_{-2}(t) + O(z^2). \end{aligned}$$

Выражение справа совпадает с тейлоровским разложением $m(z;t)$ около начала координат, а потому

$$c_{-1}(t) = m(0;t) \quad \text{и} \quad c_{-2}(t) = \frac{dm}{dz}(0;t).$$

Значит, из равенств (8) следует

$$c_{-1}(t) = -\frac{a(0) - tc(0)}{b(0) - td(0)} = -\frac{0 - t}{-1 - 0t} = -t \quad \text{и} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} c_{-2}(t) &= -\frac{\big(a'(0) - tc'(0)\big)\big(b(0) - td(0)\big) - \big(a(0) - tc(0)\big)\big(b'(0) - td'(0)\big)}{\big(b(0) - td(0)\big)^2} \\ &= a'(0) - tc'(0) - t\big(b'(0) - td'(0)\big) \\ &= t^2 d'(0) + a'(0) - t\big(c'(0) + b'(0)\big). \end{aligned} \tag{11}$$

Наши рассуждения практически дословно повторяют [8, стр. 181]; стало быть, тем же путём можно вывести определённость удлинённой последовательности (9). Свяжем, однако, этот результат с теоремой М. Рисса об N-экстремальности и полноте системы ортогональных многочленов, см., напр., [2, стр. 2796, стр. 2801] или [1, стр. 62].

Пусть $\big(P_k(z)\big)_{k=0}^{\infty}$ — последовательность ортонормированных многочленов, порождённых $\mathfrak{h}$ или, что то же самое, мерами $d\mu(x;t)$ для любых $t \in (-t_{\max}, t_{\max})$; пусть, кроме того, $\big(Q_k(z)\big)_{k=0}^{\infty}$ обозначает систему соответствующих многочленов второго рода. Если дано число $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то равенство Парсеваля для $(x-z)^{-1}$ запишется как

$$\frac{m(z;t)-m(\overline{z};t)}{z-\overline{z}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x;t)}{|x-z|^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \bigl|m(z;t)P_k(z)+Q_k(z)\bigr|^2,$$

см. [1, стр. 56]. Фигурирующий в его правой части ряд сходится благодаря неопределённости $\mathfrak{h}$. Предел этого выражения при $z \to 0$ существует, поскольку $0 \notin \operatorname{supp} d\mu(x;t)$; он равен

$$\begin{aligned} c_{-2}(t) = \frac{dm}{dz}(0;t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \bigl|m(0;t)P_k(0)+Q_k(0)\bigr|^2 \\ &= c_{-1}^2(t)\sum_{k=0}^{\infty} P_k^2(0) + \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^2(0) + 2c_{-1}(t)\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0)Q_k(0), \end{aligned}$$

что является лишь другой записью формулы (11), сравните с [1, ф-ла (6) на стр. 72]. В соответствии с (10), каждому значению $c_{-1}(t)$ отвечает единственная N-экстремальная мера $d\mu(x;t)$. В то же время задание $c_{-2}(t)$ равенством (11) эквивалентно выполнению равенства Парсеваля[7] и, стало быть, N-экстремальности $d\mu(x;t)$. Таким образом, последовательность моментов (9) определяет единственную меру. Если же допустимый выбор величин c_{-1} и c_{-2} не фиксирует единственную меру, тогда равенство Парсеваля переходит в неравенство Бесселя (6). Неравенство, обратное к (6), противоречит гильбертовости пространства $L_2\bigl(\mu(\,\cdot\,;t)\bigr)$.

Действительно, пусть заданы действительные числа c_{-1} и c_{-2}. Если выполняется равенство в (6), то $c_{-2} = c_{-2}(-c_{-1})$ в соответствии с (11) и, стало быть, последовательность моментов $\mathfrak{t}$ определённа. Как видно из (9), единственная соответствующая мера не имеет точек носителя в окрестности начала координат; стало быть, выполнение неравенства, обратного к (6), привело бы к появлению отрицательной массы $c_{-2}(t)-c_{-2}$ в нуле, что противоречит определению проблемы моментов Гамбургера. Положим теперь, что c_{-2} — это произвольное действительное число, для которого в (6) имеет место строгое неравенство. Тогда существует столь малое $\varepsilon > 0$, что обе точки (c_{-1}, c_{-2}) и $(c_{-1}, c_{-2}-\varepsilon)$ попадают внутрь параболической области, заданной неравенством (6). Поэтому

[7] В наших условиях справедливость равенства Парсеваля в начале координат влечёт за собой его справедливость всюду за пределами действительной оси по теореме М. Рисса [1, стр. 59]: при условии $0 \notin \operatorname{supp} d\mu(x;t)$ её доказательство распространяется на начало координат без существенных изменений.

квадратное уравнение

$$t^2\sum_{k=0}^{\infty}P_k^2(0)-2t\sum_{k=0}^{\infty}P_k(0)Q_k(0)+\sum_{k=0}^{\infty}Q_k^2(0)=c_{-2}$$

относительно t имеет два различных действительных решения, скажем t_1,t_2. То же самое верно и для уравнения

$$t^2\sum_{k=0}^{\infty}P_k^2(0)-2t\sum_{k=0}^{\infty}P_k(0)Q_k(0)+\sum_{k=0}^{\infty}Q_k^2(0)=c_{-2}-\varepsilon,$$

чьи решения обозначим через t_3,t_4. Точки (t_1,c_{-2}) и (t_2,c_{-2}), так же как и $(t_3,c_{-2}-\varepsilon)$ и $(t_4,c_{-2}-\varepsilon)$, при этом попадают на границу вышеупомянутой области. Поскольку эта область выпукла, всегда найдутся такие числа $\vartheta,\eta\in(0,1)$, что $c_{-1}=\vartheta t_1+(1-\vartheta)t_2=\eta t_3+(1-\eta)t_4$. В результате, мера

$$d\nu_1(x):=\vartheta\frac{d\mu(x;t_1)}{x^2}+(1-\vartheta)\frac{d\mu(x;t_2)}{x^2}$$

имеет следующие моменты:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}d\nu_1(x)=\vartheta c_{-2}(t_1)+(1-\vartheta)c_{-2}(t_2)=c_{-2}(t_1)=c_{-2},\\ \int_{-\infty}^{\infty}x\,d\nu_1(x)=\theta t_1+(1-\theta)t_2=c_{-1},\\ \theta c_k+(1-\theta)c_k=c_k\quad\text{for }k=0,1,2,\ldots\end{aligned}$$

Мера

$$d\nu_2(x):=\eta\frac{d\mu(x;t_3)}{x^2}+(1-\eta)\frac{d\mu(x;t_4)}{x^2}+\varepsilon\delta(x)\,dx$$

имеет, в свою очередь, в точности ту же последовательность моментов:

$$\begin{aligned}\eta c_{-2}(t_3)+(1-\eta)c_{-2}(t_4)+\varepsilon=c_{-2}-\varepsilon+\varepsilon=c_{-2},\\ \eta t_3+(1-\eta)t_4=c_{-1},\\ \eta c_k+(1-\eta)c_k=c_k\quad\text{for }k=0,1,2,\ldots\end{aligned}$$

Тем не менее, носители $d\nu_1(x)$ и $d\nu_2(x)$ не имеют общих точек, см., напр., сноску в [1, стр. 74]. Поэтому последовательность моментов $\mathfrak{t}=(c_{-2},c_{-1},c_0,c_1,\ldots)$ заведомо является неопределённой. □

Доказательство Теоремы 3.3. Поскольку $\mathfrak{h}\in\mathrm{Indet}_H$ или $\mathrm{ind}_0(\mathfrak{h})<n$, укороченная последовательность $(c_i)_{i=2n}^{\infty}$ является неопределённой. Из

Леммы 5.1 поэтому следует, что для произвольно заданного действительного числа c^*_{2n-1} существует b_{2n-2}, такое что[8]

$$\begin{aligned}(c^*_{2n-2}, c^*_{2n-1}, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots) \in \mathrm{Indet}_H \quad \text{как только} \quad c^*_{2n-2} > b_{2n-2};\\ (c^*_{2n-2}, c^*_{2n-1}, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots) \in \mathrm{Det}_H \quad \text{как только} \quad c^*_{2n-2} = b_{2n-2}.\end{aligned}$$

Более того, $c^*_{2n-2} \not< b_{2n-2}$ по Лемме 5.1: иначе последовательность

$$(c^*_{2n-2}, c^*_{2n-1}, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots)$$

не может быть последовательностью моментов Гамбургера. В частности, полагая на минуту c^*_{2n-1}, c^*_{2n-2} равными соответственно c_{2n-1}, c_{2n-2}, немедленно получаем $c_{2n-2} \geqslant b_{2n-2}$, где равенство означает

$$(c^*_{2n-2}, c^*_{2n-1}, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots) \in \mathrm{Det}_H$$

и, стало быть, $\mathrm{ind}_0(\mathfrak{h}) = n - 1$.

Выбираем $c^*_{2n-2} > b_{2n-2}$. Ясно, что выбрать c^*_{2n-2} всегда можно так, чтобы дополнительно выполнялось условие $c^*_{2n-2} \neq c_{2n-2}$.

Подобным образом, если мы уже имеем последовательность

$$(c^*_{2n-2k}, \dots, c^*_{2n-1}, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots) \in \mathrm{Indet}_H$$

при целом k, $1 \leqslant k < n$, то Лемма 5.1 для произвольно заданного действительного числа c^*_{2n-k-1} гарантирует существование такого $b_{2n-2k-2}$, что

$$(c^*_{2n-2k-2}, \dots, c^*_{2n-1}, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots) \in \mathrm{Indet}_H \quad \text{при} \quad c^*_{2n-2k-2} > b_{2n-2k-2}.$$

Стало быть, теорема верна вследствие индуктивного перехода. □

Доказательство Теоремы 4.3. Пусть $n+1$ есть количество тех начальных членов в неопределённой последовательности моментов Гамбургера $\mathfrak{h}$, которые можно варьировать. Чтобы применить индукцию по n, рассмотрим сперва базовый случай $n = 0$. Поскольку $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$, найдётся N-экстремальная мера $d\mu(x)$, отвечающая $\mathfrak{h}$, с атомом $\varepsilon_0 \delta(x)\, dx$ в начале координат, $\varepsilon_0 > 0$. Значит, $d\mu(x) + \gamma\delta(x)\, dx$ — это положительная мера с моментами $c_0 + \gamma, c_1, c_2, \dots$ при условии $\gamma > -\varepsilon_0$. Следовательно, $(f_0, c_1, c_2, \dots) \in \mathrm{Indet}_H$, как только $|f_0 - c_0| < \varepsilon_0$.

[8] Число b_{2n-2} будет задаваться правой частью неравенства (6), если в последовательности $(c_i)_{i=2n}^{\infty}$ сдвинуть индексацию.

Теперь положим, что для $n-1 \geqslant 0$ выполняется следующая импликация:

$$\max_{0\leqslant i<n} |f_i - c_i| < \varepsilon_{n-1} \implies (f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, c_n, c_{n+1}, \dots) \in \mathrm{Indet}_H.$$

Для обоснования индуктивного перехода требуется показать существование $\varepsilon_n > 0$, такого что

$$\max_{0\leqslant i<n+1} |f_i - c_i| < \varepsilon_n \implies (f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots) \in \mathrm{Indet}_H. \tag{12}$$

Вспомним, что $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$. По Теореме 3.3 существуют действительные числа $d_0, d_1, \dots, d_n$ и $e_0, e_1, \dots, e_n$, такие что обе последовательности

$$\mathfrak{d} := (d_0, d_1, \dots, d_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots) \quad \text{и} \quad \mathfrak{e} := (e_0, e_1, \dots, e_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots)$$

оказываются неопределёнными последовательностями моментов Гамбургера. Более того, их нечётные члены могут выбираться произвольным образом; для произвольно заданных $\varepsilon > 0$ и чётного n мы, в частности, полагаем

$$d_n := c_n + \varepsilon \quad \text{and} \quad e_n := c_n - \varepsilon. \tag{13}$$

Из последнего утверждения Теоремы 3.3 также следует, что случай чётных n отличается лишь дополнительным требованием достаточной малости $\varepsilon > 0$, позволяющей определить член e_n как в (13). Положим

$$\vartheta := \min_{0\leqslant i<n} \frac{\varepsilon_{n-1}}{\max\left\{\varepsilon_{n-1}, 2|c_i - d_i|, 2|c_i - e_i|\right\}} \quad \text{и} \quad \varepsilon_n := \min\left\{\frac{\varepsilon_{n-1}}{4}, \frac{\vartheta\varepsilon}{2}\right\},$$

так что $0 < \vartheta \leqslant 1$.

Пусть действительные числа $f_0, f_1, \dots, f_n$ удовлетворяют

$$\max_{0\leqslant i<n+1} |f_i - c_i| < \varepsilon_n.$$

Сперва рассмотрим случай $f_n \leqslant c_n$. Число

$$\alpha := \frac{c_n - f_n}{c_n - e_n} = \frac{|c_n - f_n|}{\varepsilon} \in \left[0, \frac{\vartheta}{2}\right)$$

таково, что

$$f_n = c_n - \alpha(c_n - e_n) = \alpha e_n + (1-\alpha) c_n. \tag{14}$$

В то же время абсолютное значение величины $\zeta_i := f_i - c_i + \alpha(c_i - e_i)$ при $i < n$ удовлетворяет

$$|\zeta_i| \leqslant |f_i - c_i| + \alpha|c_i - e_i| < \varepsilon_n + \frac{\vartheta}{2}|c_i - e_i| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon_{n-1} + \frac{1}{4}\varepsilon_{n-1} = \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}.$$

Поскольку

$$\left|\frac{\zeta_i}{1-\alpha}\right| < 2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-1},$$

последовательность

$$\mathfrak{g} := \left(c_0 + \frac{\zeta_0}{1-\alpha}, c_1 + \frac{\zeta_1}{1-\alpha}, \dots, c_{n-1} + \frac{\zeta_{n-1}}{1-\alpha}, c_n, c_{n+1}, \dots\right)$$

является неопределённой последовательностью моментов Гамбургера в соответствии с гипотезой индукции. Однако при $i < n$ тождество (14) можно дополнить аналогичными:

$$\begin{aligned} f_i &= c_i - \alpha(c_i - e_i) + f_i - c_i + \alpha(c_i - e_i) = \alpha e_i + (1-\alpha)c_i + \zeta_i \\ &= \alpha e_i + (1-\alpha)\left(c_i + \frac{\zeta_i}{1-\alpha}\right). \end{aligned}$$

Другими словами, мы получили представление

$$(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots) = \alpha\vartheta\mathfrak{e} + (1-\alpha\vartheta)\mathfrak{g},$$

где оба члена в правой части равенства и, стало быть, левая часть принадлежат Indet_H. Итак, в случае $f_n \leqslant c_n$ это представление обеспечивает выполнение и импликации (12). Случай $f_n > c_n$ следует аналогичным образом после замены $\mathfrak{e}$ на $\mathfrak{d}$, поэтому для последовательностей моментов Гамбургера теорема верна.

Утверждение относительно моментов Стилтьеса напрямую следует из рассмотрения соответствующей симметричной последовательности Гамбургера. □

6 Доказательство Теорем 4.5 и 4.6

Используя критерий Сильвестра [5, Гл. I, §7], положительную определённость квадратичных форм (2) можно легко выразить через ганкелевы определители (5), что даёт следующий факт:

Следствие 6.1. *Последовательность $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty}$ является последовательностью моментов Гамбургера, соответствующей мере с бесконечным числом точек в носителе, тогда и только тогда, когда $\Delta_m^{(0)} > 0$ для всех $m = 0, 1, \ldots$*

Гамбургер сформулировал свой знаменитый критерий определённости проблемы моментов [8, стр. 183–185] через ганкелевы определители:

Теорема 6.2 (Гамбургер)**.** *Для определённости последовательности моментов Гамбургера $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из пределов*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta_{m-1}^{(2)}} \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta_{m-1}^{(2)}}{\Delta_{m-2}^{(4)}}$$

обратился в ноль.

Ключевую роль в работах Гамбургера [6, 7, 8] сыграл тот факт, что для последовательности моментов $\mathfrak{h}$ участвующие в Теореме 6.2 отношения положительны и не возрастают[9] при растущем m (при условии, что носители соответствующих мер содержат более конечного числа точек). Действительно, к неравенствам из Следствия 6.1 переупорядочивание строк и столбцов добавляет $\Delta_m^{(2n)} > 0$ для всех $n, m > 0$. Детерминантное тождество Сильвестра [5, Гл. I, §2] потому даёт

$$\begin{aligned} \Delta_{m+2}^{(2n-2)}\Delta_m^{(2n)} = \Delta_{m+1}^{(2n-2)}\Delta_{m+1}^{(2n)} - \left(\Delta_{m+1}^{(2n-1)}\right)^2 \leqslant \Delta_{m+1}^{(2n-2)}\Delta_{m+1}^{(2n)} \\ \Longrightarrow \frac{\Delta_{m+2}^{(2n-2)}}{\Delta_{m+1}^{(2n)}} \leqslant \frac{\Delta_{m+1}^{(2n-2)}}{\Delta_m^{(2n)}}. \quad (15) \end{aligned}$$

Следовательно, оба предела в Теореме 6.2 существуют для любой последовательности моментов Гамбургера. Итерации последнего неравенства дают другую удобную оценку:

$$\frac{\Delta_{m+n+1}^{(0)}}{\Delta_{m+1}^{(2n)}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{m+k+1}^{(2n-2k)}}{\Delta_{m+k}^{(2n-2k+2)}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{m+k}^{(2n-2k)}}{\Delta_{m+k-1}^{(2n-2k+2)}} = \frac{\Delta_{m+n}^{(0)}}{\Delta_m^{(2n)}}. \quad (16)$$

Следующая лемма — это всего лишь переформулировка результата Гамбургера, полученного им для доказательства Теоремы 6.2 (ср. также с Леммой 5.1):

[9] Сам Гамбургер выражал этот факт через условные минимумы квадратичных форм (2).

Лемма 6.3. *Пусть $\Delta_m^{(2)} > 0$ для всех $m > 0$, и пусть c_0, c_1 суть какие-либо действительные числа. Тогда $(c_i)_0^\infty$ является последовательностью моментов Гамбургера, если и только если предел $R_1(c_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta_{m-1}^{(2)}}$ существует, линеен по c_0, и $R_1(c_0) \geqslant 0$.*

Доказательство. Аналогично (15), мы можем записать $\Delta_2^{(0)} = c_0c_2 - (c_1)^2 \leqslant c_0c_2$ и, при $m \geqslant 1$,

$$\Delta_{m+2}^{(0)}\Delta_m^{(2)} = \Delta_{m+1}^{(0)}\Delta_{m+1}^{(2)} - \left(\Delta_{m+1}^{(1)}\right)^2 \implies \frac{\Delta_{m+1}^{(0)}}{\Delta_m^{(2)}} \leqslant \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta_{m-1}^{(2)}}.$$

Поскольку деление в последнем неравенстве производится только на положительный член, оно продолжает быть верным независимо от знака c_0. Стало быть, для $c_0 \in \mathbb{R}$ предел

$$R_1(c_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta_{m-1}^{(2)}} = \inf_{m>1} \frac{\Delta_m^{(0)}}{\Delta_{m-1}^{(2)}} \tag{17}$$

существует и конечен или равен $-\infty$. Если нарушается неравенство $R_1(c_0) \geqslant 0$, то найдётся такой индекс $m > 0$, что $\Delta_m^{(0)} < 0$, а значит, последовательность $(c_i)_0^\infty$ не может быть последовательностью моментов Гамбургера: квадратичная форма (2) с $p = m - 1$ не является неотрицательно определённой.

Обратно, если $R_1(c_0) \geqslant 0$, то $\Delta_m^{(0)} \geqslant 0$ для каждого значения индекса $m > 0$ из-за положительности знаменателя в правой части (17). Поэтому $(c_i)_0^\infty$ есть последовательность моментов Гамбургера в соответствии со Следствием 6.1, при условии, что $\Delta_m^{(0)} \neq 0$ для каждого m. В то же время $\Delta_m^{(0)} = 0$ имело бы следствием $\Delta_{m+1}^{(0)} = \Delta_{m+2}^{(0)} = \cdots = 0$, и, значит, ранг квадратичных форм (2) должен быть меньше m по теореме Кронекера, см. Замечание 2.2. Последнее, однако, невозможно благодаря $\Delta_{m+1}^{(2)} > 0$. □

Лемма 6.4. *Пусть целые числа i, n удовлетворяют $0 \leqslant i < n$, и пусть последовательность $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^\infty$ такова, что $\Delta_m^{(0)} > 0$ для всех $m > 0$. Тогда*

$$\sum_{m=0}^\infty A_{i,m}^2 \leqslant c_{2i}, \quad \textit{где} \quad A_{i,m} := \frac{1}{\sqrt{\Delta_m^{(2n)}\Delta_{m+1}^{(2n)}}} \begin{vmatrix} c_{i+n} & c_{i+n+1} & \cdots & c_{i+n+m} \\ c_{2n} & c_{2n+1} & \cdots & c_{2n+m} \\ c_{2n+1} & c_{2n+2} & \cdots & c_{2n+m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2n+m-1} & c_{2n+m} & \cdots & c_{2n+2m-1} \end{vmatrix}$$

и, в частности, $A_{i,0} := \frac{c_{i+n}}{\sqrt{c_{2n}}}$.

Доказательство. Из Следствия 6.1 следует, что найдутся некоторые неубывающие функции $\mu(x)$ и $\nu(x)$, такие что

$$c_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i d\mu(x), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{и} \quad d\nu(x) = x^{2n} d\mu(x). \tag{18}$$

Другими словами, $\mu(x)$ — это одна из функций распределения, отвечающих $\mathfrak{h}$, в то время как $\nu(x)$ определяется единственным образом через $\mu(x)$ и соответствует последовательности $(c_i)_{i=2n}^{\infty}$. Рассмотрим многочлены, ортогональные по отношению к $\nu(x)$, т.е. соответствующие укороченной последовательности $(c_i)_{i=2n}^{\infty}$ (см. [1, Гл. 1, §1]):

$$p_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{c_{2n}}}, \quad p_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_m^{(2n)} \Delta_{m+1}^{(2n)}}} \begin{vmatrix} c_{2n} & c_{2n+1} & \ldots & c_{2n+m} \\ c_{2n+1} & c_{2n+2} & \ldots & c_{2n+m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2n+m-1} & c_{2n+m} & \ldots & c_{2n+2m-1} \\ 1 & x & \ldots & x^m \end{vmatrix}. \tag{19}$$

По определению, эти многочлены удовлетворяют

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_m(x) p_j(x)\, d\nu(x) = \delta_{mj},$$

где $m, j = 0, 1, 2, \ldots$ и δ_{mj} обозначает дельта-символ Кронекера.

С одной стороны, для $0 \leqslant i < n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{vmatrix} c_{2n} & c_{2n+1} & \ldots & c_{2n+n} \\ c_{2n+1} & c_{2n+2} & \ldots & c_{2n+m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2n+m-1} & c_{2n+m} & \ldots & c_{2n+2m-1} \\ 1 & x & \ldots & x^m \end{vmatrix} x^{i+n} d\mu(x)$$

$$= \begin{vmatrix} c_{2n} & c_{2n+1} & \ldots & c_{2n+m} \\ c_{2n+1} & c_{2n+2} & \ldots & c_{2n+m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2n+m-1} & c_{2n+m} & \ldots & c_{2n+2m-1} \\ c_{i+n} & c_{i+n+1} & \ldots & c_{i+n+m} \end{vmatrix}.$$

Стало быть, из (18) и (19) мы получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_m(x)x^{i-n}d\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_m(x)x^{i+n}d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta_m^{(2n)}\Delta_{m+1}^{(2n)}}} \begin{vmatrix} c_{2n} & c_{2n+1} & \cdots & c_{2n+m} \\ c_{2n+1} & c_{2n+2} & \cdots & c_{2n+m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2n+m-1} & c_{2n+m} & \cdots & c_{2n+2m-1} \\ c_{i+n} & c_{i+n+1} & \cdots & c_{i+n+m} \end{vmatrix} = (-1)^m A_{i,m}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_0(x)x^{i-n}d\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{c_{2n}}}\int_{-\infty}^{\infty} x^{i+n}d\mu(x) = \frac{c_{i+n}}{\sqrt{c_{2n}}} = A_{i,0}.$$

С другой стороны, функция x^{i-n} при $0 \leqslant i < n$ принадлежит пространству $L_2(\nu)$ функций, квадратично суммируемых относительно меры $d\nu(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(x^{i-n}\right)^2 d\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2i-2n}x^{2n}\, d\mu(x) = c_{2i} < \infty.$$

Значит, число c_{2i} есть возведённая в квадрат норма x^{i-n} в $L_2(\nu)$. Более того, эта функция удовлетворяет неравенству Бесселя:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} p_m(x)x^{i-n}d\nu(x)\right)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} A_{i,m}^2 \leqslant c_{2i}. \tag{20}$$

□

Применяя неравенство Коши к Лемме 6.4, мы незамедлительно получаем:

Следствие 6.5. *В условиях Леммы 6.4,*

$$\sum_{m=0}^{\infty} |A_{i,m}A_{j,m}| \leqslant \sqrt{c_{2i}c_{2j}}.$$

Пусть целые числа m, n, i, j подчиняются условиям $0 \leqslant i < n,\ 0 \leqslant$

$j < n$ и $m > 0$. Обозначим

$$f_m^{(i,j)} := \begin{vmatrix} c_{i+j} & c_{i+n} & c_{i+n+1} & \cdots & c_{i+n+m-1} \\ c_{j+n} & c_{2n} & c_{2n+1} & \cdots & c_{2n+m-1} \\ c_{j+n+1} & c_{2n+1} & c_{2n+2} & \cdots & c_{2n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j+n+m-1} & c_{2n+m-1} & c_{2n+m} & \cdots & c_{2n+2m-2} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} c_{i+j} & c_{i+n} & \cdots & c_{i+n+m-1} \\ c_{j+n} & & & \\ \vdots & & \Delta_m^{(2n)} & \\ c_{j+n+m-1} & & & \end{vmatrix};$$

краткости ради, параметр n входит неявным образом. Матрица

$$F_m^{(n)} := \left(f_m^{(i,j)}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

симметрична, так как определители не меняются при транспонировании. Если $\Delta_m^{(2n)} \neq 0$, детерминантное тождество Сильвестра [5, Гл. I, §2] для ганкелевых миноров $\Delta_{m+n}^{(0)}$ можно записать следующим образом:

$$\Delta_{m+n}^{(0)} = \left(\Delta_m^{(2n)}\right)^{-n+1} \cdot \det F_m^{(n)} = \Delta_m^{(2n)} \cdot \det \left(\frac{f_m^{(i,j)}}{\Delta_m^{(2n)}}\right)_{i,j=0}^{n-1}.$$

Элементы последнего определителя в правой части имеют вид:

$$\frac{f_m^{(i,j)}}{\Delta_m^{(2n)}} = c_{i+j} - g_m^{(i,j)}, \quad \text{где} \tag{21}$$
$$g_m^{(i,j)} := -\frac{1}{\Delta_m^{(2n)}} \begin{vmatrix} 0 & c_{i+n} & \cdots & c_{i+n+m-1} \\ c_{j+n} & & & \\ \vdots & & \Delta_m^{(2n)} & \\ c_{j+n+m-1} & & & \end{vmatrix}.$$

Лемма 6.6. *Пусть* $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty}$ *— это последовательность, для которой* $\Delta_k^{(0)} > 0$ *при* $k > 0$. *Если целые* m, n, i, j *удовлетворяют* $0 \leqslant i < n$, $0 \leqslant j < n$ *и* $m > 0$, *тогда* $g_m^{(i,j)}$ *сходится для* $m \to \infty$ *и*

$$\left|g_m^{(i,j)}\right| \leqslant \sqrt{c_{2i}c_{2j}}$$

равномерно по m.

Доказательство. Для $m > 1$ детерминантное тождество Сильвестра даёт следующее выражение:

$$\Delta_{m-1}^{(2n)} f_m = f_{m-1}\Delta_m^{(2n)} - \left(\sqrt{\Delta_{m-1}^{(2n)}\Delta_m^{(2n)}}\right)^2 A_{i,m-1}A_{j,m-1}.$$

После деления на положительное произведение $\Delta_{m-1}^{(2n)}\Delta_m^{(2n)}$ это выражение преобразуется в

$$\frac{f_m}{\Delta_m^{(2n)}} = \frac{f_{m-1}}{\Delta_{m-1}^{(2n)}} - A_{i,m-1}A_{j,m-1}.$$

Последняя формула может применяться рекурсивно, давая таким образом:

$$\frac{f_m}{\Delta_m^{(2n)}} = \frac{f_{m-2}}{\Delta_{m-2}^{(2n)}} - \sum_{k=m-2}^{m-1} A_{i,k}A_{j,k} = \cdots = \frac{f_1}{\Delta_1^{(2n)}} - \sum_{k=1}^{m-1} A_{i,k}A_{j,k}. \tag{22}$$

Для оценки правой части (22) обратим внимание, что

$$\frac{f_1}{\Delta_1^{(2n)}} = \frac{1}{c_{2n}}\begin{vmatrix} c_{i+j} & c_{i+n} \\ c_{j+n} & c_{2n} \end{vmatrix} = \frac{c_{i+j}c_{2n}}{c_{2n}} - \frac{c_{i+n}c_{j+n}}{c_{2n}} = c_{i+j} - A_{i,0}A_{j,0}.$$

Поэтому равенство (22) эквивалентно

$$\frac{f_m}{\Delta_m^{(2n)}} = c_{i+j} - \sum_{k=0}^{m-1} A_{i,k}A_{j,k}.$$

Как видно из (21), здесь левая часть совпадает с $c_{i+j} - g_m^{(i,j)}$, что означает

$$g_m^{(i,j)} = \sum_{k=0}^{m-1} A_{i,k}A_{j,k}. \tag{23}$$

Предел этого выражения при $m \to \infty$ существует и равен

$$\lim_{m\to\infty} g_m^{(i,j)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{i,k}A_{j,k},$$

поскольку по Следствию 6.5 ряд в его правой части удовлетворяет оценке

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_{i,k}A_{j,k}| \leqslant \sqrt{c_{2i}c_{2j}}.$$

$\square$

Замечание 6.7. *Стоит отметить, что* $g_m^{(i,i)} \geqslant \frac{c_{i+n}^2}{c_{2n}} \geqslant 0$ *и что эта величина растёт при возрастающем* m*, см. выражение* (23)*. Если мера* $d\nu(x)$ *является* N*-экстремальной, то есть если полиномы плотны в пространстве* $L_2\big(\nu\big)$*, тогда неравенство Бесселя* (20) *переходит в равенство Парсеваля:*

$$\lim_{m\to\infty} g_m^{(i,i)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{i,k}^2 = c_{2i}.$$

Доказательство Теоремы 4.5. Имеем последовательность моментов Гамбургера $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty}$, такую что носитель соответствующей ей меры содержит бесконечно много точек. Стало быть, $\Delta_m^{(n)} > 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ и $n = 0, 1, \ldots$ в соответствии со Следствием 6.1.

Заметим, что значение $g_m^{(i,j)}$ для всех $0 \leqslant i, j < n$ не зависит от c_0, c_1, $\ldots$, c_{n-1}. Поэтому если моменты $c_n, c_{n+1}, \ldots$ фиксированны, то

$$\frac{\Delta_{m+n}^{(0)}}{\Delta_m^{(2n)}} = \det\Big(c_{i+j} - g_m^{(i,j)}\Big)_{i,j=0}^{n-1} = \det\Big(c_{i+j} - g_m^{(i,j)}\Big)_{i,j=0}^{n-1} \tag{24}$$

является многочленом полной степени n. Для m, стремящегося к бесконечности, предел равенства (24) существует в силу Леммы 6.6, то есть:

$$R_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta_{m+n}^{(0)}}{\Delta_m^{(2n)}} = \det\Big(c_{i+j} - \lim_{m\to\infty} g_m^{(i,j)}\Big)_{i,j=0}^{n-1}. \tag{25}$$

Последнее выражение показывает, что $R_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ есть многочлен полной степени n с теми же мономами, что и (24). Его степень по c_i для $i = 0, 1, \ldots, n-1$ равняется $i + 1$. Как предел положительных отношений, $R_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ неотрицателен, как только $\mathfrak{h}$ является последовательностью моментов Гамбургера. Ясно также, что

$$R_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c_{n-1}^n + \big\langle \text{члены меньших степеней} \big\rangle.$$

Кроме того, для $n \geqslant 2$

$$R_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta_{m+n}^{(0)}}{\Delta_m^{(2n)}} = \prod_{k=0}^{n-1} \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta_{m+n-k}^{(2k)}}{\Delta_{m+n-k-1}^{(2k+2)}},$$

где мы использовали тот факт, что пределы в правой части выражения существуют благодаря (16). Теперь, если последовательность $\mathfrak{h}$ неопределённа, тогда то же самое верно и для всех укороченных последовательностей $(c_{2k}, c_{2k+1}, c_{2k+2}, \dots)$ при $0 < k < n$, см. Лемму 2.1. Как следствие, критерий Гамбургера (сформулированный у нас как Теорема 6.2) даёт

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Delta^{(2k)}_{m+n-k}}{\Delta^{(2k+2)}_{m+n-k-1}} > 0,$$

и, значит, $R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) > 0$.

Если, наоборот, $\mathfrak{h} \in \mathrm{Det}_H$, то Теорема 6.2 влечёт равенство

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Delta^{(0)}_{m+2}}{\Delta^{(4)}_{m}} = 0,$$

так что $R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = 0$ при $n \geqslant 2$. $\square$

Лемма 6.8. *Положим, что* $\mathfrak{h} = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ *— это последовательность моментов Гамбургера или Стилтьеса, и пусть зафиксированы какие-либо действительные числа* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$*, где* $n > 1$ *и* $\alpha_{n-1} \neq 0$*. Если существуют* $\gamma_1, \gamma_2 > 0$*, такие что*

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} &:= \mathfrak{h} + \gamma_1 \cdot (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0, 0, \dots) \quad \text{и} \\ \mathfrak{e} &:= \mathfrak{h} - \gamma_2 \cdot (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

являются последовательностями моментов того же типа, то последовательность $\mathfrak{h}$ *необходимо неопределённа:* $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$ *или, соответственно,* $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_S$*.*

Эта лемма показывает строгую выпуклость области Ω, введённой в Теореме 4.6: для любого вектора $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ приложенного к такой точке $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$, что $R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = 0$, оба направления $\boldsymbol{\alpha}$ и $-\boldsymbol{\alpha}$ не могут указывать внутрь Ω.

Доказательство Леммы 6.8. Выпуклая комбинация $\eta\mathfrak{d} + (1-\eta)\mathfrak{e}$, где $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, является последовательностью моментов того же типа, что и $\mathfrak{h}$, см. обсуждение в начале Раздела 4. Стало быть,

$$\mathfrak{h} + \gamma \cdot (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0, 0, \dots)$$

остаётся последовательностью моментов для всех $\gamma \in [-\gamma_2, \gamma_1]$.

Пусть $\mathfrak{h}$ есть последовательность моментов Гамбургера. Теорема 4.5 даёт

$$R(\gamma) := R_n(c_0 + \alpha_0\gamma, c_1 + \alpha_1\gamma, \dots, c_{n-1} + \alpha_{n-1}\gamma) \geqslant 0,$$

как только $\gamma \in [-\gamma_2, \gamma_1]$. Как многочлен степени n по γ, наш $R(\gamma)$ имеет не более n действительных корней. Поэтому найдётся некоторое положительное число $\gamma_0 < \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, удовлетворяющее

$$R(\gamma_0) > 0, \quad \text{и} \quad R(-\gamma_0) > 0.$$

Следовательно, обе последовательности

$$\mathfrak{h} + \gamma_0 \cdot (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0, 0, \dots) \quad \text{и} \quad \mathfrak{h} - \gamma_0 \cdot (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0, 0, \dots)$$

неопределённы по Теореме 4.5. Их полусумма

$$\mathfrak{h} + \left(\frac{\gamma_0}{2} - \frac{\gamma_0}{2}\right) \cdot (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0, 0, \dots) = \mathfrak{h}$$

также обязана быть неопределённой: $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$. Тот же результат для моментов Стилтьеса следует из рассмотрения симметричных последовательностей моментов Гамбургера. □

Доказательство Теоремы 4.6. Значения $g_m^{(i,j)}$ в формуле (25) не зависят от $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$. Значит, коэффициенты многочлена $R_n(c_0^*, c_1^*, \dots, c_{n-1}^*)$, построенного по $\mathfrak{t}$, совпадают с коэффициентами $R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$, построенного по $\mathfrak{h}$, для каждого $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \Omega \cup \Gamma$. Другими словами, существует единственный многочлен $R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ сразу для всех последовательностей моментов, отвечающих точкам области $\Omega \cup \Gamma$, и даже для всех точек $\mathbb{R}^n$, поскольку речь идёт о покоэффициентном пределе многочленов. Однако он может принимать как положительные, так и отрицательные значения вне $\Omega \cup \Gamma$.

Предположим, что $(c_0^*, c_1^*, \dots, c_{n-1}^*) \in \Omega$, или, что то же самое, $\mathfrak{t} \in \mathrm{Indet}_H$. Тогда из Теоремы 4.3 следуют вложения $\mathfrak{h} := (c_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_H$ и, значит, $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \Omega$, как только

$$\max_{0 \leqslant i < n} |c_i - c_i^*| < \varepsilon \quad \text{для достаточно малого} \quad \varepsilon > 0.$$

Следовательно, множество Ω открыто. В то же время, Теорема 4.5 даёт неравенство

$$R_n(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) > 0,$$

справедливое для всех $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \Omega$. Строгая выпуклость Ω следует из Леммы 6.8.

Пусть теперь $(c_0^*, c_1^*, \ldots, c_{n-1}^*) \in \Gamma$, или, эквивалентно, $\mathfrak{t} \in \mathrm{Det}_H$. Если $\mathrm{ind}_0(\mathfrak{t}) \geqslant n$, то по Теореме 3.1

$$\Omega = \emptyset \quad \text{и} \quad (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in \Gamma \implies c_1 = c_1^*,\ c_2 = c_2^*,\ \ldots,\ c_{n-1} = c_{n-1}^*,$$

где c_0 неотрицательно. Нижняя граница для c_0 установлена в Лемме 6.3.

Если же $\Omega \neq \emptyset$ для $\mathfrak{t} \in \mathrm{Det}_H$, то существует точка $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in \Omega$, такая что $\mathfrak{h} = (c_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_H$. Стало быть, $(c_i)_{i=2\lceil n/2\rceil}^{\infty} \in \mathrm{Indet}_H$ по Лемме 2.1, то есть $2\,\mathrm{ind}_0(\mathfrak{t}) < n$. Согласно Следствию 4.2, для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся неопределённая последовательность $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$, дополнительно удовлетворяющая условию

$$\max_{0 \leqslant i < n} |c_i - c_i^*| < \varepsilon.$$

Иными словами, $(c_0^*, c_1^*, \ldots, c_{n-1}^*)$ — это предельная точка множества Ω, а потому $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Обратно, если $(c_0^*, c_1^*, \ldots, c_{n-1}^*) \in \partial\Omega$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\mathfrak{h} \in \mathrm{Indet}_H$, такая что

$$\max_{0 \leqslant i < n} |c_i - c_i^*| < \varepsilon.$$

Все соответствующие $\mathfrak{h}$ квадратичные формы (2) являются положительно определёнными, см. Замечание 2.2. При $\varepsilon \to 0$ каждая из них стремится к неотрицательно определённой форме по непрерывности. Следовательно, $\mathfrak{t}$ должна быть последовательностью моментов Гамбургера. Поскольку $\partial\Omega = \Omega \setminus \overline{\Omega}$, мы получаем определённость последовательности $\mathfrak{t}$, что эквивалентно $(c_0^*, c_1^*, \ldots, c_{n-1}^*) \in \Gamma$. Стало быть, $\partial\Omega = \Gamma$. $\square$

Список литературы

[1] Ахиезер Н.И. *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* М.: Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., 1961. 311 с.

[2] Berg C., Durán, A. *The index of determinacy for measures and the l_2-norm of orthonormal polynomials* // Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), № 8. С. 2795–2811.

[3] Berg C., Thill M. *Rotation invariant moment problems* // Acta Math. **167** (1991). С. 207–227.

[4] Chihara T. *Indeterminate symmetric moment problems* // J. Math. Anal. Appl. **85** (1982), № 2. C. 331–346.

[5] Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* 2-е изд., Москва-Ленинград: Гос. Изд. Техн.-Теор. Лит., 1950. 360 с.

[6] Hamburger H. *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems (Teil I)* // Mat. Ann., **81** (1920). C. 235–319.

[7] Hamburger H. *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems (Teil II)* // Math. Ann. **82** (1920). C. 120–164.

[8] Hamburger H. *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems (Teil III)* // Math. Ann. **82** (1920). C. 168–187.

[9] Kronecker L. *Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen* // Berl. Monatsber. 1881. C. 535–600.

[10] Shohat J., Tamarkin J. *The Problem of Moments.* New York: American Mathematical Society, 1950. 144 c.

Оглавление