

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Макаров, В. Р. Романовский, Решение сопряженной задачи теплопроводности для трех тонкостенных тел при переменном неидеальном контакте, *ТВТ*, 1979, том 17, выпуск 4, 822–827

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.239.90.61

11 ноября 2024 г., 01:15:43



УДК 536.201

РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТРЕХ ТОНКОСТЕННЫХ ТЕЛ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НЕИДЕАЛЬНОМ КОНТАКТЕ

Макаров А. М., Романовский В. Р.

Методом конечного интегрального преобразования решена сопряженная задача теплопроводности для триады тонкостенных тепловыделяющих геометрически разнородных областей при переменном неидеальном термическом сопротивлении на границе раздела сред. Задача сведена к исследованию бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, для решения которых показана возможность применения метода редукции. Приведены изотермы в сечениях сопряженных областей при наличии расслоения части поверхности соприкосновения.

Рассмотрим в пространственной структуре (рис. 1)

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_\Phi^{(i)}, \quad \Omega_\Phi^{(1)} = \{(z, \rho, \varphi) : z \in (0, a_1)\}, \quad i=1;$$

$$\rho \in (a, a_2), \quad i=2; \quad \rho \in (0, a), \quad i=3; \quad \varphi \in (0, \gamma)\}$$

сопряженную задачу стационарной теплопроводности

$$L^{(i)} u^{(i)} - \alpha^{(i)} u^{(i)} + f^{(i)} = 0, \quad i=1, 3 \quad (1)$$

при граничных условиях второго рода

$$\left. \frac{\partial u^{(i)}}{\partial n_j^{(i)}} \right|_\Gamma = 0, \quad \Gamma = \bigcup_{i,j} \Gamma_j^{(i)}, \quad (2)$$

с условием ограниченности при $\rho \rightarrow 0$ и смешанными условиями сопряжения

$$u^{(2)}(a, \varphi) = u^{(3)}(a, \varphi),$$

$$u^{(3)}(a, \varphi) - u^{(1)}(0, \varphi) = -\lambda^{(1)} R_c(\varphi) \partial u^{(1)} / \partial z(0, \varphi), \quad (3)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}(0, \varphi) + \lambda^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \rho}(a, \varphi) - \lambda^{(3)} \frac{\partial u^{(3)}}{\partial \rho}(a, \varphi) = 0.$$

Здесь $\lambda^{(i)}$ — коэффициенты теплопроводности соответствующих областей; $\alpha^{(i)} > 0$ — известные постоянные; $f^{(i)}$, R_c — заданные функции; $n_j^{(i)}$ — нормаль к участку контура Γ ; $L^{(i)}$ — дифференциальный оператор от пространственных переменных

$$L^{(i)} = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, & i=1, \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, & i=2, 3. \end{cases}$$

Краевая задача (1)–(3) описывает стационарное температурное поле в тонкостенном тепловыделяющем элементе цилиндрической оболочки

($i=1$), разделенной заданным переменным термическим сопротивлением с плоским основанием ($i=3$) и подкрепленной ребром жесткости ($i=2$). При этом боковые поверхности обмениваются теплом по закону Ньютона с окружающей средой заданной температуры, а торцевые грани — теплоизолированы.

Сопряженным задачам теплопроводности уделяется значительное внимание [1, 2]. Их решение связано с исследованием дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами при наличии на поверхности

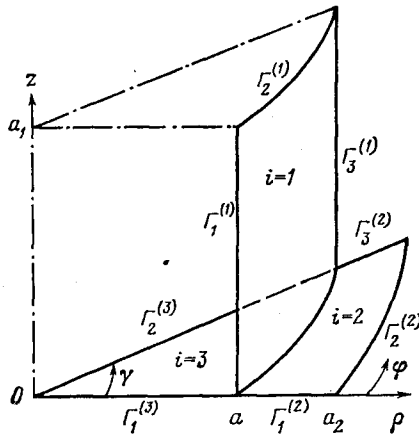


Рис. 1. Исследуемая область

раздела сред определенных термоконтактных условий. Обычно рассматривается задача с постоянным (чаще всего нулевым) значением термического сопротивления контакта для составных областей, граница которых представляет собой геометрические поверхности одного семейства: пакет пластин, многослойные цилиндрические или сферические тела [3]. В настоящей работе рассматривается более общий случай — сопряженная задача для геометрически разнородных неидеально сопряженных областей при переменном термическом контакте.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{z}=z/a; \quad \bar{\rho}=\rho/a; \quad \bar{f}^{(i)}=f^{(i)}/f_{\text{макс}}^{(i)}; \quad \bar{u}^{(i)}=u^{(i)}/f_{\text{макс}}^{(i)} a^2,$$

относительно которых первоначальная задача (1) — (3) примет вид

$$L^{(i)}\bar{u}^{(i)} - d_i^2 \bar{u}^{(i)} + \bar{f}^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$L^{(i)} = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, & i=1, \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{\rho}^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, & i=2, 3, \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial n_j^{(i)}} = 0; \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

$$\bar{u}^{(2)}(1, \varphi) = \bar{u}^{(3)}(1, \varphi), \quad (6)$$

$$\bar{u}^{(3)}(1, \varphi) - \bar{u}^{(1)}(0, \varphi) = -\omega(\varphi) \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{z}}(0, \varphi), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \bar{z}}(0, \varphi) + \sigma^{(2)} \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial \bar{\rho}}(1, \varphi) - \sigma^{(3)} \frac{\partial \bar{u}^{(3)}}{\partial \bar{\rho}}(1, \varphi) = 0, \quad (8)$$

где $d_i = a\sqrt{\alpha^{(i)}}$; $\omega = \lambda^{(1)} R_c/a$; $\sigma^{(2)} = \lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}$; $\sigma^{(3)} = \lambda^{(3)}/\lambda^{(1)}$; $f_{\text{макс}}^{(1)}$ — максимальное значение функции $f^{(1)}$. Решение уравнений (4) найдем с помощью проводимого по узловой переменной φ конечного интегрального преобразования. Ядро последнего в данном случае имеет вид

$$Q_m = \begin{cases} 1/\sqrt{\gamma}, & m=0, \\ \sqrt{2/\gamma} \cos \mu_m \varphi, & \mu_m = \pi m/\gamma, \quad m=1, 2, \dots \end{cases}$$

Для упрощения записи черты над безразмерными величинами здесь и ниже опущены.

Согласно принятому методу решения искомые функции определяются по формуле

$$u^{(i)} = \sum_{m=0}^{\infty} T_m^{(i)} Q_m, \quad i=\overline{1, 3}, \quad (9)$$

в которой значения трансформант $T_m^{(i)}$ для задачи (4), (5) равны

$$T_m^{(i)} = C_m^{(i)} t_m^{(i)} + \Phi_m^{(i)}.$$

Здесь $t_m^{(i)}$ определяются соотношениями

$$t_m^{(1)} = \frac{\text{ch } p_m^{(1)} (a_1 - z)}{\text{ch } p_m^{(1)} a_1}, \quad p_m^{(1)} = \sqrt{\mu_m^2 + d_1^2}, \quad t_m^{(3)} = I_\mu(\rho d_3),$$

$$t_m^{(2)} = I_\mu(\rho d_2) - K_\mu(\rho d_2) \frac{I_\mu'(a_2 d_2)}{K_\mu'(a_2 d_2)};$$

$\Phi_m^{(i)}$ — некоторые известные функции, причем

$$\Phi_m^{(1)}(0) = 0; \quad \Phi_m^{(2)}(1) \neq \Phi_m^{(3)}(1) \neq 0,$$

I_μ, K_μ — цилиндрические функции мнимого аргумента соответственно первого и второго рода с порядком, равным значению μ_m (штрих обозначает производную по аргументу при его указанном значении).

Константы $C_m^{(i)}$ в силу (9) образуют бесконечную последовательность неизвестных, что приводит к бесконечным системам линейных уравнений при их определении. Для условий (6), (8) они вырождаются в совокупность равенств вида

$$C_m^{(2)} = C_m^{(3)} v_m^{(3)} + v_m^{(2)}, \quad C_m^{(3)} = C_m^{(1)} v_m^{(1)} + v_m, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

$$v_m^{(3)} = \frac{t_m^{(3)}(1)}{t_m^{(2)}(1)}, \quad v_m^{(2)} = \frac{\Phi_m^{(3)}(1) - \Phi_m^{(2)}(1)}{t_m^{(2)}(1)},$$

$$v_m^{(1)} = \frac{dt_m^{(1)}}{dz}(0) \left[\sigma^{(3)} \frac{dt_m^{(3)}}{d\rho}(1) - v_m^{(3)} \sigma^{(2)} \frac{dt_m^{(2)}}{d\rho}(1) \right]^{-1}, \quad (10)$$

$$v_m = \frac{v_m^{(2)} \sigma^{(2)} \frac{dt_m^{(2)}}{d\rho}(1) + \frac{d\Phi_m^{(1)}}{dz}(0) + \sigma^{(2)} \frac{d\Phi_m^{(2)}}{d\rho}(1) - \sigma^{(3)} \frac{d\Phi_m^{(3)}}{d\rho}(1)}{\sigma^{(3)} \frac{dt_m^{(3)}}{d\rho}(1) - v_m^{(3)} \sigma^{(2)} \frac{dt_m^{(2)}}{d\rho}(1)}$$

Условие сопряжения (7) приводит в свою очередь к бесконечной системе с матрицей при неизвестных, зависящей от характера функции $\omega(\varphi)$.

Если $\omega(\varphi)$ не равна нулю при $0 \leq \varphi \leq \gamma$, то имеет место

$$\frac{1}{\omega} [u^{(3)}(1, \varphi) - u^{(1)}(0, \varphi)] = - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}(0, \varphi), \quad (11)$$

которое в пространстве изображений с учетом (9), (10) приводит к системе

$$C_n^{(1)} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} s_{n,m} = r_n, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где

$$s_{n,m} = \frac{1 - v_m^{(1)} t_m^{(3)}(1)}{p_n^{(1)} \operatorname{th} p_n^{(1)} a_1} \int_0^\gamma \frac{1}{\omega} Q_n Q_m d\varphi,$$

$$r_n = \frac{\operatorname{cth} p_n^{(1)} a_1}{p_n^{(1)}} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} [v_m t_m^{(3)}(1) + \Phi_m^{(3)}(1)] \int_0^\gamma \frac{1}{\omega} Q_n Q_m d\varphi + \frac{d\Phi_n^{(1)}}{dz}(0) \right\}.$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} s_{n,m}^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n^2 < \infty. \quad (13)$$

Поэтому бесконечная система (12) имеет решение, удовлетворяющее условию

$$\sum_{m=0}^{\infty} (C_m^{(1)})^2 < \infty, \quad (14)$$

для нахождения которого применим метод редукции [4], состоящий в замене системы (12) системой с конечными матричными коэффициентами.

Заметим, что если $1/\omega$ имеет на $[0, \gamma]$ кусочнонепрерывную производную с точками разрыва первого рода, то бесконечная система (12) — квазирегулярна.

В качестве примера такого состояния контактной поверхности отметим составные структуры при наличии в области стыка линейных нетеплопроводных включений, теплоизолированных трещин. К формуле (11) приводят также задачи о теплосъеме с оребренных конструкций при произвольном числе неидеальных контактов на поверхности соприкосновения, разделенных теплоизолированными промежутками. В случае непрерывного изменения контактного сопротивления вдоль границы раздела сред бесконечная система (12) позволяет эффективно решать сопряженные задачи с учетом соответствующей неравномерности физико-химических свойств контактной области. В частности, при постоянном значении R_c по периметру оболочки решение системы (12) записывается в явном виде

$$C_n^{(1)} = r_n / (1 + s_{n,m}), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Если функция $\omega(\varphi)$ такова, что на узловой линии она принимает нулевые значения (точечный контакт), то для определения $C_m^{(1)}$ следует рассмотреть исходное условие сопряжения (7). Переводя последнее в пространство изображений, с учетом (9), (10) получим

$$C_n^{(1)} (1 - v_n^{(1)} t_n^{(3)}(1)) + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} a_{n,m} = R_n, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где

$$a_{n,m} = p_m^{(1)} \operatorname{th} p_m^{(1)} a_1 \int_0^\gamma \omega Q_n Q_m d\varphi,$$

$$R_n = \Phi_n^{(3)}(1) + v_n t_n^{(3)}(1) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d\Phi_m^{(1)}}{dz}(0) \int_0^\gamma \omega Q_n Q_m d\varphi.$$

Введем

$$A_{n,m} = \begin{cases} 0, & n=m \\ \frac{a_{n,m}}{1 - v_n^{(1)} t_n^{(3)}(1) + a_{n,n}}, & n \neq m. \end{cases}$$

Тогда (14) преобразуется к бесконечной системе

$$C_n^{(1)} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} A_{n,m} = R_n / (1 - v_n^{(1)} t_n^{(3)}(1) + a_{n,n}), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

решение которой в силу оценок, аналогичных (13), удовлетворяет условию (14), а для нахождения решения можно использовать метод редукции, если $\omega(\varphi)$ — непрерывная на $(0, \varphi)$ функция.

В более общих случаях задания функции $\omega(\varphi)$ (например, при наличии расслоения контакта, контактных пятен) вместо системы (15) следует рассмотреть бесконечную систему относительно новой неизвестной

$$X_m = C_m^{(1)} p_m^{(1)} \operatorname{th} p_m^{(1)} a_1,$$

матричные коэффициенты при которой равны

$$\bar{a}_{n,m} = \begin{cases} \frac{1 - v_n^{(1)} t_n^{(3)}(1)}{p_n^{(1)} \operatorname{th} p_n^{(1)} a_1} + \int_0^\gamma \omega Q_n Q_m d\varphi, & n=m \\ \int_0^\gamma \omega Q_n Q_m d\varphi, & n \neq m. \end{cases}$$

При этом выполнение условий

$$\sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_{n,m}^2 < \infty, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\left[\sum_{n=0}^p \varepsilon_n R_n \right] \leq M \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^p \varepsilon_n \bar{a}_{n,m} \right)^2 \right]^{1/2}$$

позволяет использовать для определения X_m метод редукции [5]. Здесь M — некоторая известная постоянная, зависящая от свойств коэффициентов $\bar{a}_{n,m}$, R_n ; p , ε_n — произвольные числа.

Определив неизвестные постоянные $C_m^{(1)}$, общее решение запишем в виде (9).

Для иллюстрации предложенной методики на рис. 2 изображены изотеры в областях $i=1, 2$, рассчитанные при следующих параметрах:

$$a=0,1 \text{ м}; \quad a_1=0,1 \text{ м}; \quad a_2=0,2 \text{ м}; \quad \gamma=\pi,$$

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = 22,2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}; \quad \lambda^{(2)} = 51,9 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1},$$

$$f^{(1)}=f^{(3)}=1,04 \cdot 10^4 \text{ град} \cdot \text{м}^{-2}; \quad f^{(2)}=0,08 \cdot 10^4 \text{ град} \cdot \text{м}^{-2},$$

$$\alpha^{(1)}=\alpha^{(3)}=220 \text{ м}^{-2}; \quad \alpha^{(2)}=40 \text{ м}^{-2},$$

$$R_c = \begin{cases} 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{град} \cdot \text{Вт}^{-1}, & 0 \leq \varphi \leq \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon < \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Эта задача описывает стационарное распределение температуры в сварной секции подкрепленной цилиндрической камеры при наличии в зоне стыка расслоения контакта. Приведенные результаты демонстрируют неравномерный характер температуры и ее разрыв в области расслоения.

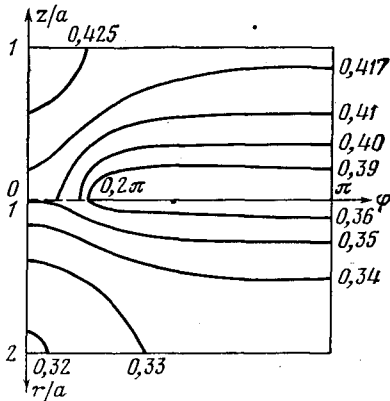


Рис. 2. Изотермы на развертке цилиндра ($i=1$) и шпангоута ($i=2$) для $\varepsilon=0,2\pi$

В заключение отметим, что указанная расчетная модель с одноузловой линией сопряжения может иметь более сложное физическое строение (разнородные подобласти в каждой из областей) и конструктивное исполнение (с большим числом узловых точек). Кроме того, использование результатов [6, 7] расширяет тип поставленных граничных условий.

Научно-производственное объединение криогенного машиностроения им. 40-летия Октября

Поступила в редакцию
14 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков. В сб. Проблемы теплопереноса. «Наука и техника», Минск, 1976.
2. Некоторые итоги развития науки о тепло- и массопереносе. ИФЖ, 23, № 5, 773, 1977.
3. Тез. докл. XIV Научн. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций. «Наукова думка», Киев, 1977.
4. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.
5. Fr. Riesz. Les systemes d'equations lineaires a une infinite d'inconnues. Paris, 1913.
6. А. М. Макаров, В. Р. Романовский. ТВТ, 15, № 1, 226, 1977.
7. А. М. Макаров, В. Р. Романовский. ТВТ, 16, № 1, 220, 1978.