В. Е. Трощиев, О ширине зоны влияния для уравнения теплопроводности,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, том 5, номер 6, 1135–1138

полиномиальной индикатрисы при условии, что определитель, составленный из коэффициентов при $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в системе (16), отличен от 0, представляется в виде

$$I(0, \mu) = \frac{H(\mu)}{1 - k\mu} [C_0 + C_1\mu + \ldots + C_n\mu^n].$$

Поступила в редакцию
17.10.1964

Цитированная литература

1. В. В. Соболев. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гостехиздат, 1956.
2. И. Б. Руссман. Сведение к сингулярному уравнению задачи о лучистом переносе в полупространстве. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 6, 1122—1126.
3. С. Чандрасекар. Перенос лучистой энергии. М., Изд-во ин. лит., 1953.
4. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
5. М. В. Масленников. Проблема Милна с произвольной индикатрисой. Докл. АН СССР, 118, № 5, 895—898.
6. Ch. Fox. A solution of Chandrasekhar's integral equation. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, 99, № 2, 285—291.

УДК 517.9 : 536.2

О ШИРИНЕ ЗОНЫ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. Е. ТРОЩИЕВ

(Москва)

Известно, что для уравнений с частными производными гиперболического типа существует зона влияния, которая определяется характеристиками этих уравнений. Причем при рассмотрении устойчивости явных разностных схем для гиперболических систем условия устойчивости и ширина зоны влияния тесно связаны.

В данной заметке рассматривается вопрос о ширине зоны влияния для уравнения теплопроводности на примере задачи Коши:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \tag{1}$$

$$\sigma = \text{const} > 0, \qquad u(x, t) \mid_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\varphi(x) \geqslant 0, \qquad \max \varphi(x) < M \text{ для } -\infty < x < +\infty.$$

Под зоной влияния для задачи (1), (2) будем понимать следующее.

Возьмем шаг по времени Δt, и определим в некоторый момент времени $T = m\Delta t$ решение $u(x, T)$ последовательным применением формулы

$$u(x, k\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma\Delta t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\sigma\Delta t}\right] u(y, (k-1)\Delta t)\, dy, \tag{3}$$

$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

которая легко может быть получена из интеграла Пуассона (см. [1]).

Заметим, что из (3) следует, что решение в любой точке x в момент $k\Delta t$ зависит от решения в момент $(k-1)\Delta t$ на всем бесконечном интервале, в то время как для гиперболических уравнений область зависимости конечна.

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $f(\Delta t)$, удовлетворяющую условию

$$f(\Delta t) > 0 \text{ для } \Delta t > 0, \tag{4}$$

и будем вычислять $u(x, k\Delta t)$ по формуле

$$\tilde{u}(x, k\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma\Delta t}} \int\limits_{x-f(\Delta t)}^{x+f(\Delta t)} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\sigma\Delta t}\right] u(y, (k-1)\Delta t)\,dy, \tag{5}$$

где $\tilde{u}$ — приближенное значение u.

Применяя последовательно формулу (5), легко получить

$$\tilde{u}(x, m\Delta t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma\Delta t}}\right)^m \int\limits_{x-f}^{x+f} \exp\left[-\frac{(x-y_{m-1})^2}{4\sigma\Delta t}\right] dy_{m-1} \times \tag{6}$$

$$\times \int\limits_{y_{m-1}-f}^{y_{m-1}+f} \exp\left[-\frac{(y_{m-1}-y_{m-2})^2}{4\sigma\Delta t}\right] dy_{m-2} \ldots \int\limits_{y_2-f}^{y_2+f} \exp\left[-\frac{(y_2-y_1)^2}{4\sigma\Delta t}\right] dy_1 \times$$

$$\times \int\limits_{y_1-f}^{y_1+f} \exp\left[-\frac{(y_1-y_0)^2}{4\sigma\Delta t}\right] \varphi(y_0)\,dy_0.$$

Ставится вопрос, можно ли указать класс функций $\{f(\Delta t)\}$, удовлетворяющих условию (4) и таких, что при $\Delta t \to 0$ решение $\tilde{u}(x, t)$, определяемое по (6), сходится к точному решению $u(x, t)$ задачи (1), (2).

Если такой класс функций существует, то очевидно, что ширина зоны влияния не превосходит любой $f(\Delta t)$ из $\{f(\Delta t)\}$, а дальнейшее исследование этого класса позволит сделать более точные заключения о ширине зоны влияния.

Ответ на поставленный вопрос дает следующая

Теорема. *Существует класс функций $\{f(\Delta t)\}$ таких, что при $\Delta t \to 0$ решение $\tilde{u}(x, t)$ сходится к точному решению $u(x, t)$ задачи* (1), (2). *Этот класс состоит из функций вида*

$$f(\Delta t) = \Delta t^{1/2}\sqrt{4\sigma}\,\psi(\Delta t), \tag{7}$$

где в качестве $\psi(\Delta t)$ может рассматриваться любая функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\Delta t \to 0} \psi(\Delta t) = +\infty, \tag{8}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \exp[-\psi^2(\Delta t)]\,\psi'(\Delta t) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Сделаем в интеграле (6) последовательно замены переменных:

$$\frac{y_0-y_1}{\sqrt{4\sigma\Delta t}} = z_1, \ldots, \frac{y_{m-2}-y_{m-1}}{\sqrt{4\sigma\Delta t}} = z_{m-1}, \quad \frac{y_{m-1}-x}{\sqrt{4\sigma\Delta t}} = z_m. \tag{10}$$

Мы получаем

$$\tilde{u}(x, m\Delta t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int\limits_{-\psi}^{+\psi} \exp(-z_m^2)\,dz_m \int\limits_{-\psi}^{+\psi} \exp(-z_{m-1}^2)\,dz_{m-1} \ldots \tag{11}$$

$$\ldots \int\limits_{-\psi}^{+\psi} \exp(-z_2^2)\,dz_2 \int\limits_{-\psi}^{+\psi} \exp(-z_1^2)\,\varphi(x + \sqrt{4\sigma\Delta t}\,z_m + \ldots + \sqrt{4\sigma\Delta t}\,z_1)\,dz_1.$$

где

$$\psi(\Delta t) = f(\Delta t)\Delta t^{-1/2}(1/\sqrt{4\sigma}). \tag{12}$$

1. Сначала рассмотрим $\varphi(x) = a = \text{const} > 0$.

Тогда из (11) легко получаем

$$\tilde{u}(x, T) = a\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\psi(\Delta t)} \exp(-z^2)\,dz\right]^{T/\Delta t}. \tag{13}$$

Очевидно, что для сходимости (13) к точному решению необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\psi} \exp(-z^2)\,dz\right]^{T/\Delta t} = 1. \tag{14}$$

Отсюда сразу следует необходимость условия (8), ибо в противном случае интеграл $\int\limits_0^{\psi} \exp(-z^2)\,dz$ не будет сходиться к $\sqrt{\pi}/2$.

Далее, логарифмируя (14) и пользуясь правилом Лопиталя, получаем, что для того чтобы имел место предел (14), достаточно

$$\lim_{\Delta t\to 0}[\exp[-\psi^2(\Delta t)]\,\psi'(\Delta t)] = 0. \tag{15}$$

Предполагается при этом, что условие (8) уже выполнено.

2. Теперь рассмотрим произвольную $\varphi(x)$, удовлетворяющую условию (2), и покажем, что (11) сходится к точному решению, если $\psi(\Delta t)$ удовлетворяет условиям (8) и (9).

Интеграл (11) есть m-кратный интеграл по m-мерному кубу с длиной ребра, равной $2\psi(\Delta t)$.

Обозначим часть m-мерного пространства Π_m, ограничиваемого этим кубом, через K_m.

Легко видеть, что если в (11) провести интегрирование по всему пространству Π_m (а не по кубу K_m, как это там сделано), мы получим точное решение $u(x, m\Delta t) = u(x, T)$ задачи (1), (2).

Следовательно,

$$R_m(x) = \int\limits_{\Pi_m - K_m}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m \exp(-z_m^2 - \ldots - z_1^2)\,\varphi(x + \sqrt{4\sigma\Delta t}\,z_m + \ldots + \sqrt{4\sigma\Delta t}\,z_1)\,d\tau_m \tag{16}$$

есть погрешность формулы (11), т. е.

$$R_m(x) = u(x, T) - \tilde{u}(x, T). \tag{17}$$

Здесь $d\tau_m = dz_m \ldots dz_1$.

Доказав сходимость (11) для $\varphi(x) = \text{const}$, мы тем самым показали, что

$$\lim \int\limits_{\Pi_m - K_m}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m \exp(-z_m^2 - \ldots - z_1^2)\,d\tau_m = 0, \qquad \Delta t = \frac{T}{m} \to 0. \tag{18}$$

Если же $\varphi(x)$ в (16) удовлетворяет условию (2), то очевидно, что

$$\lim_{m\to+\infty} R_m(x) \leqslant M \lim \int\limits_{\Pi_m - K_m}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m \exp(-z_m^2 - \ldots - z_1^2)\,d\tau_m = 0, \tag{19}$$

так как (18) нами уже доказано.

С другой стороны, ввиду неотрицательности подынтегральной функции в (16)

$$R_m(x) \geqslant 0. \tag{20}$$

Следовательно, $\lim\limits_{m\to+\infty} R_m(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрение полученного класса функций показывает, что не всякая $\psi(\Delta t)$, удовлетворяющая условию (8), одновременно удовлетворяет и условию (9). Так, например, $\psi(\Delta t) = -\ln \Delta t$, $\psi(\Delta t) = \sqrt{-\ln \Delta t}$, удовлетворяют условию (9), а $\psi(\Delta t) = \ln \ln (1 / \Delta t)$ и $\psi(\Delta t) = \sqrt{\ln \ln (1 / \Delta t)}$ уже ему не удовлетворяют.

Но легко проверить, что

$$\psi(\Delta t) = b\Delta t^{-\alpha} \tag{21}$$

удовлетворяет (8) и (9) при любом $\alpha > 0$ и $b > 0$.

Отсюда и из (7) следует, что порядок ширины зоны влияния сколько угодно близок к $\Delta t^{1/2}$.

Все известные явные разностные схемы для уравнения теплопроводности имеют условие устойчивости вида

$$\Delta x \geqslant B\Delta t^{1/2}, \qquad B > 0. \tag{22}$$

Сравнивая (7) и (21) с условием (22), мы видим, что условие (22), являясь, с одной стороны, свойством разностной схемы, также соответствует закономерностям распространения тепла, которые описываются точным решением задачи (1), (2).

Поступила в редакцию
6.07.1964

Цитированная литература

1. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. II. М.— Л., Гостехиздат, 1952.

УДК 517.9 : 532

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ

Л. М. СИМУНИ

(Ленинград)

В работах по исследованию развития профиля скорости в плоской трубе обычно используются приближенные уравнения движения, справедливые для больших чисел Рейнольдса (см. [1] — [4]). Представляет интерес сравнение решения приближенных уравнений и решения полных уравнений Навье — Стокса. Приближенные уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered} u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial P}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad P = P(\xi) \end{gathered} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u = 0, \qquad v = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } \eta = 1,$$

$$u = 1 \text{ при } \xi = 0 \qquad (0 < \eta < 1).$$

В системе (1) введены обозначения $u = v_x / V$, $v = v_y \operatorname{Re} / V$, $\xi = x / h \operatorname{Re}$, $\eta = y / h$, $P = p / \rho V^2$, $\operatorname{Re} = Vh / \nu$, $V = \text{const}$, h — ширина канала. Для решения уравнения (1) воспользуемся методом конечных разностей (см. [3] — [4]), причем используем условие, определяющее расход жидкости:

$$\int_0^1 u \, d\eta = 1. \tag{2}$$