# Отрезки, прямоугольники и... комбинаторика

В.ГОЛУБЕВ, П.КОЖЕВНИКОВ

Предлагаем читателю подумать над следующими задачами (ниже мы приведем их решения).

**Задача 1.** Сколько можно указать различных отрезков, концы которых расположены в целых точках числовой прямой, принадлежащих отрезку $[0;n]$, где $n$ – натуральное число?

**Задача 2.** На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных прямоугольников, стороны которых параллельны осям, а все вершины – целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату?

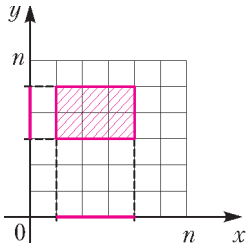
**Задача 3.** В координатном пространстве дан куб $n \times n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, ребра которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных прямоугольных параллелепипедов, ребра которых параллельны осям, а все вершины – целочисленные точки, принадлежащие данному кубу? [1]

**Решение задачи 1.** Целочисленные точки на отрезке $[0;n]$ – это точки 0, 1, …, $n$, их количество равно $n + 1$. Выбор отрезка с концами в этих точках равносилен выбору пары концов отрезка, т.е. выбору пары элементов из множества $\{0, 1, \ldots, n\}$. Тем самым, ответ в задаче: число сочетаний из $n + 1$ по 2, которое равно $\frac{(n+1)n}{2}$.

Этот результат нам пригодится в задачах 2 и 3.

**Решение задачи 2.** Можно считать, что одна из вершин данного квадрата расположена в точке $(0;0)$, а другая – в точке $(n;n)$.

Спроектируем прямоугольник, удовлетворяющий условию задачи, на оси координат. Проекция на ось абсцисс – отрезок, концы которого принадлежат отрезку $[0;n]$, из задачи 1 вытекает, что ее можно выбрать $\frac{(n+1)n}{2}$ способами. Аналогичное утверждение верно для проекции на ось ординат. Независимый выбор двух проекций однозначно определяет выбор прямоугольника (см. рисунок). Тем самым, получаем ответ: $\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$.




**Упражнения**

**1.** Докажите, что в задаче 3 ответ такой: $\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^3$.

**2.** Найдите и исправьте ошибку в следующем «решении» задачи 2.

Чтобы выбрать нужный прямоугольник, достаточно выбрать пару его противоположных вершин $A$ и $B$. В качестве $A$ может выступать любая из $(n+1)^2$ целочисленных точек, принадлежащих данному квадрату. Пусть вершина $A$ уже выбрана. Вершиной $B$ может быть любая из целочисленных точек, принадлежащих данному квадрату, которая имеет абсциссу, отличную от абсциссы точки $A$, и ординату, отличную от ординаты точки $A$. Таким образом, для каждой точки $A$ имеется $n^2$ возможностей выбрать точку $B$. Для каждой конкретной пары $A$, $B$ выбор вначале точки $B$, а затем точки $A$ даст ту же пару. Значит, ответ в этой задаче: $\frac{(n+1)^2 n^2}{2}$.

*Замечание.* Обратим внимание, что, в силу известной формулы $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$, ответ в задаче 2 может быть записан как $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. Интересно, можно ли установить комбинаторное соответствие, дающее эту сумму?

**3.** Обобщите задачи 2 и 3 для прямоугольника $m \times n$ и параллелепипеда $m \times n \times k$.

Давайте вернемся еще раз к задаче 1. Попробуем сформулировать ее плоский аналог по-другому, заменив отрезок не на прямоугольник, а на квадрат. Получается другая задача.

**Задача 2′.** На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных *квадратов*, стороны которых параллельны осям, а все вершины – целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату?

Формулировки задач 2 и 2′ отличаются лишь одним словом, но это отличие существенно. Чтобы решить задачу 2′, приведем сперва другое решение задачи 1.

**Еще одно решение задачи 1.** Зафиксируем некоторое число $l$ из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и найдем вначале количество различных отрезков длины $l$, концы которых расположены в целых точках числовой прямой, принадлежащих отрезку $[0;n]$. Этот вопрос решить несложно: возьмем отрезок $[0;l]$ и будем сдвигать его на 1 вправо, пока правый конец отрезка не совпадет с точкой $n$. Правый конец нашего отрезка длины $l$ пройдет через точки $l$, $l + 1$, …, $n - 2$, $n$ – всего $n - l + 1$ возможных положений, а значит, и $n - l + 1$ возможных положений отрезка длины $l$.

Чтобы завершить решение задачи 1, теперь достаточно суммировать величины $n - l + 1$ для всевозможных длин $l = 1, 2, \ldots, n$. Итого: $n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{(n+1)n}{2}$.

Теперь мы можем немедленно получить решение задачи 2′, пользуясь подсчетом количества возможных положений отрезка длины $l$ на отрезке длины $n$ и идеей проектирования на оси (см. решение задачи 2).

**Упражнения**

**4.** Проведите нужные рассуждения и докажите, что ответ в задаче 2′ равен $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, или $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. [2]

**5.** Сформулируйте и решите задачу 3′, аналогичную задаче 2′, про кубы в кубе $n \times n \times n$.

**6.** Обобщите задачу 2′ и для прямоугольника $m \times n$, где $m > n$.

[1] По сути, в задачах 1, 2 и 3 решается один и тот же вопрос для прямой (1-мерная задача), плоскости (2-мерная задача) и пространства (3-мерная задача).

[2] Здесь и далее мы используем известные формулы для суммы квадратов, кубов первых $n$ натуральных чисел. Об этих формулах см. например, статью В.Абрамовича «Суммы одинаковых степеней натуральных чисел» в «Кванте» №5 за 1973 год.

Это звучит как шутка, но иногда новые задачи рождаются при невнимательном прочтении условий старых (сравните условия задач 2 и 2′).[3] Давайте в условии задачи 2′ пропустим фразу «стороны которых параллельны осям», получится еще более трудная

**Задача 2″.** На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных *квадратов*, у которых все вершины – целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату?

Решение этой задачи и ее аналога для треугольной решетки читатель может узнать из статьи В.Журавлева и П.Самовола «Математические тайны печати царя Соломона» в «Кванте» №1 за 2012 год.

В заключение приведем несколько задач, родственных разобранным, для самостоятельного решения.

**Задача 4.** Сколькими способами в данном клетчатом прямоугольнике $22 \times 40$ можно закрасить клетчатый прямоугольник: а) площади 35; б) периметра 72?

**Задача 5** (олимпиада МФТИ 2013 г.). На клетчатой доске $22 \times 25$ требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 4 и 7, параллельными краям доски. Сколькими способами это можно сделать?

**Задача 6.** На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ ($n \geq 7$) с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных квадратов площади 25, все вершины которых – целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату?

[3] Это действительно случается. Например, таким образом появилась непростая задача М2369 из «Задачника «Кванта» этого номера. В начальной (гораздо более простой) версии в ней даны 100 *подряд идущих натуральных* чисел.

---

*(Начало см. на с. 36)*

собой, создавая дополнительные максимумы на освещенной стороне радуги. Их иногда можно увидеть в виде слабых розовато-зеленоватых полос.

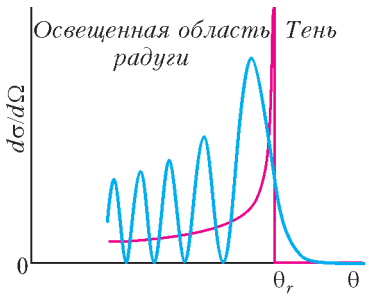



*Рис.6. Сечения радужного рассеяния, рассчитанные в рамках геометрической оптики (красная линия) и волновой оптики Эйри (синяя линия)*

– Приближенную теорию радуги на основе волновой оптики построил в 1838 году британский астроном Джордж Эйри. Да-да, он знаменит не только тем, что не прислушался к молодому Адамсу и проморгал открытие Нептуна! – При этом профессор Ван-Теллер почему-то строго посмотрел на Дзинтару. – Возникшая в теории радуги функция Эйри заняла прочное место в математической физике, в частности в квазиклассическом приближении квантовой механики. Точная теория оптической радуги была построена лишь в начале XX века.

– XX век принес нам не только более точную теорию оптической радуги. Вспомните, ведь поведение частиц в квантовой механике обладает волновыми свойствами. В 1959 году Кеннет Форд и Джон Арчибальд Уилер (тот самый, с черными дырами) исследовали возможность радужного рассеяния в квантовой механике и, тем самым, в атомной и ядерной физике. Ядерная радуга – это звучит гордо! В некоторых экспериментах удается увидеть радугу вплоть до десятого порядка!

Прозвеневший звонок вернул учеников и профессора с небес на землю, точнее – на лунную поверхность.

– Я мог бы рассказывать о радуге часами, но, как учил великий Ричард Фейнман, хороший учитель должен уметь вовремя остановиться и передать инициативу студентам. До встречи!

* * *

Во время ланча студенты все еще оставались под впечатлением от лекции.

– В древности у многих народов Земли было поверье, что пробежавшего под радугой ожидает счастье, – произнесла Дзинтара. – Люди всегда были наблюдательны и заметили, что к радуге нельзя приблизиться – она просто исчезает. Такой вот грустный символ недостижимости счастья, смягченный красотой явления. А красота всегда вселяла надежду.

Джерри был поглощен какими-то вычислениями на своем планшетнике, но в этот момент бросил на Дзинтару быстрый взгляд.

Когда после ланча студенты вышли в парк колледжа, Джерри встал перед Никки и торжественным тоном произнес:

– Сегодня произошли два исторических события! «Селена-Телеком» все-таки перечислил мне зарплату, а в Тропическом парке Луна-сити открывается новый фонтан. Чтобы достойно их отметить, я хочу пригласить тебя в Луна-сити на уикэнд.

* * *

Новый фонтан поражал воображение: с высокой скалы, нависавшей над искусственным озером, низвергался самый настоящий водопад, окутанный тучей брызг. Огибающая озеро дорожка, достигнув скалы, сменялась решетчатыми мостками с перилами, уводившими в пространство между скалой и потоком падающей воды. Желающие освежиться устремлялись по этим мосткам и со смехом выскакивали с другой стороны, а какой-то галантный кавалер раскрыл над своей спутницей невесть откуда взявшийся на Луне зонтик.

Был полдень по гринвичскому времени, которому подчинялся ритм местной жизни, но астрономический лунный полдень давно уже миновал и светившее сквозь прозрачный купол солнце отбрасывало заметные тени. Никки и Джерри не спеша шли по дорожке вокруг озера, приближаясь к водопаду, как вдруг…

В воздухе, заполненном водяными брызгами, вспыхнула и засияла удивительно чистыми и легкими красками она, радуга! От ощущения воздушности этого свечения, исходившего будто бы ниоткуда, захватывало дух.

– Так вот она какая! – воскликнула Никки. – Все фотографии в интернете, вместе взятые, – ничто!

– Никки! – Джерри говорил громко, то ли от волнения, то ли от желания перекрыть шум воды. – Помнишь, что говорила Дзинтара? Но мы-то теперь знаем, откуда берется радуга! Даже если мы перестанем ее видеть, капельки по-прежнему будут на нужных местах! Мы можем пробежать под ней!

Они посмотрели друг другу прямо в глаза, а потом, взявшись за руки, помчались по рукотворной тропинке.